

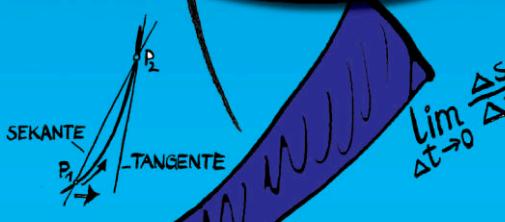
HEINZ PARTOLL, IRMGARD WAGNER  
ILLUSTRIERT VON PETER FEJES

# MATHE macchiato ANALYSIS

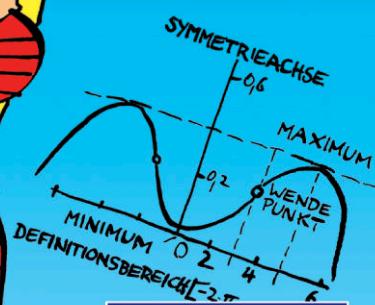
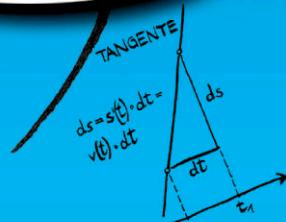
Fit für's Abi

ANALYSIS...

... MAL  
DIFFERENZIERT  
BETRACHTET!



$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$



## Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Die Informationen in diesem Buch werden ohne Rücksicht auf einen eventuellen Patentschutz veröffentlicht. Warennamen werden ohne Gewährleistung der freien Verwendbarkeit benutzt. Bei der Zusammenstellung von Texten und Abbildungen wurde mit großer Sorgfalt vorgegangen. Trotzdem können Fehler nicht ausgeschlossen werden. Verlag, Herausgeber und Autoren können für fehlerhafte Angaben und deren Folgen weder eine juristische Verantwortung noch irgendeine Haftung übernehmen. Für Verbesserungsvorschläge und Hinweise auf Fehler sind Verlag und Herausgeber dankbar.

Alle Rechte vorbehalten, auch die der fotomechanischen Wiedergabe und der Speicherung in elektronischen Medien. Die gewerbliche Nutzung der in diesem Produkt gezeigten Modelle und Arbeiten ist nicht zulässig.

Fast alle Produktbezeichnungen und weitere Stichworte und sonstige Angaben, die in diesem Buch verwendet werden, sind als eingetragene Marken geschützt. Da es nicht möglich ist, in allen Fällen zeitnah zu ermitteln, ob ein Markenschutz besteht, wird das ® Symbol in diesem Buch nicht verwendet.

### Umwelthinweis:

Dieses Produkt wurde auf chlor- und säurefreiem PEFC-zertifiziertem Papier gedruck. Um Rohstoffe zu sparen, haben wir auf Folienverpackung verzichtet.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1  
12 11 10

ISBN 978-3-86894-027-5

© 2010 Pearson Studium  
ein Imprint der Pearson Education Deutschland GmbH  
Martin-Kollar-Str. 10-12, D-81829 München  
Alle Rechte vorbehalten  
[www.pearson-studium.de](http://www.pearson-studium.de)

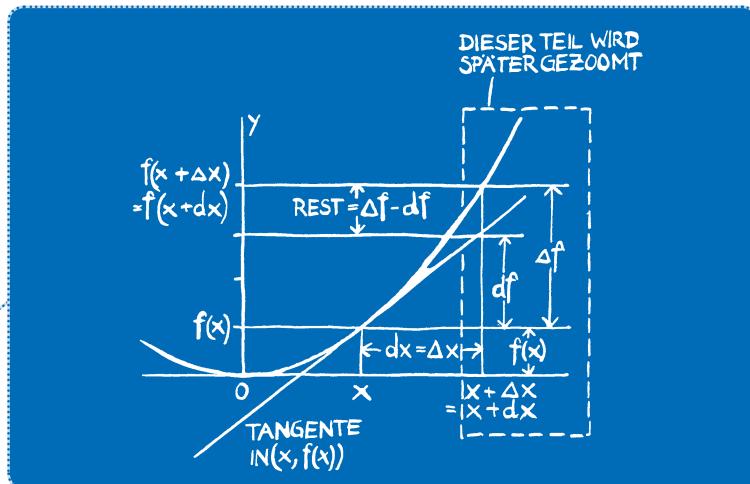
Lektorat: Birger Peil, [bpeil@pearson.de](mailto:bpeil@pearson.de), Irmgard Wagner, [irmwagner@t-online.de](mailto:irmwagner@t-online.de)  
Korrektorat: Petra Kienle, Fürstenfeldbruck  
Herstellung: Martha Kürzl-Harrison, [mkuerzl@pearson.de](mailto:mkuerzl@pearson.de)  
Satz: m2 design, Sterzing, [www.m2-design.org](http://www.m2-design.org)  
Druck und Verarbeitung: Bercker, Kevelaer

Printed in Germany

Die Gleichung  $df = f'(x) \cdot dx$  – die wir im mikroskopischen Bereich schon kennen – hat auch eine makroskopische Interpretation.

Sehen wir uns die Quotienten  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  und  $\frac{df}{dx}$  einmal genauer an, wenn wir  $\Delta x = dx$  kleiner und kleiner werden lassen.

$\frac{df}{dx}$  behält immer den Wert  $f'(x)$  – die Steigung der Tangente – bei, egal wie groß oder klein  $dx$  ist. Ganz anders zeigt  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  an jeder Stelle einen anderen Wert. Erst wenn  $\Delta x = dx$  null wird, bekommt auch dieser Quotient den Wert  $f'(x)$ .



Während  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  erst beim Grenzübergang mit der Ableitung identisch ist, wenn  $\Delta x$  null wird, sehen wir die Ableitung  $f'(x)$  beim Quotienten  $\frac{df}{dx}$  immer, weil wir hier die Tangente betrachten. Das berechtigt uns,  $\frac{df}{dx}$  als Quotienten aufzufassen und die Gleichung  $\frac{df}{dx} = f'(x)$  aufzulösen zu

$$df = f'(x) \cdot dx$$

Wir können diese Formel verwenden, um eine unbekannte Ableitung  $f'(x)$  zu bestimmen.

Wenn es uns gelingt, den **linearen Funktionszuwachs**  $df$  längs der Tangente durch  $dx$  auszudrücken oder geometrisch darzustellen, dann haben wir eine neue Methode zur Herleitung von Ableitungsfunktionen gefunden, weil der Faktor, der bei  $dx$  steht, die Ableitung sein muss.

Anhand der Zeichnung bauen wir eine alternative Formel zusammen, die beim Berechnen von Ableitungen gute Dienste tut. An der Stelle  $x + dx$  können wir den Funktionswert  $f(x+dx)$  auf mehrere Arten zusammenfügen:

**TJA, DR. KNOW, ES WIRD IMMER EINEN REST GEBEN, DER UNS TRENNT.**

SCHADE, ABER DIESEN KLEINEN WERT KANN MAN DOCH VERNACHLÄSSIGEN, ODER? ER IST DOCH FAST NULL.

$$f(x+dx) = f(x) + \Delta f = f(x) + df + \text{REST} =$$

$$f(x) + f'(x) \cdot dx + \text{REST} \approx f(x) + f'(x) \cdot dx$$



$f(x+dx)$   $x$ -ACHSE  
 $y$   
TANGENTE  
 $\Delta f$   
 $df$   
 $f(x)$   
 $x+dx$

Der letzte Teil der oben zitierten Formel zeigt uns zwei Dinge:

1. Der Rest ist völlig uninteressant, wenn es nur um die Bestimmung der Ableitung  $f'(x)$  geht, da er hier null wird.
2. Da der Rest  $= \Delta f - df$  verschwindet, wenn  $dx$  gegen null geht, kann diese Formel Nachbarwerte von  $f(x)$  abschätzen, wenn sie sich nicht zu weit entfernen, wenn also  $dx$  klein bleibt.

Wenn wir etwa  $f(x) = x^2$  wählen, dann gilt nach der binomischen Formel für  $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ :

$$f(x+dx) = (x+dx)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot dx + dx^2$$

Bei  $dx$  steht als **linearer Zuwachsfaktor** die Funktion  $2 \cdot x$  – sie ist also die Ableitung von  $x^2$ , die wir bereits kennen. Diese Methode zeigt aber, wie wir sie hätten auch gewinnen können.

$dx^2$  lässt sich wie folgt deuten.

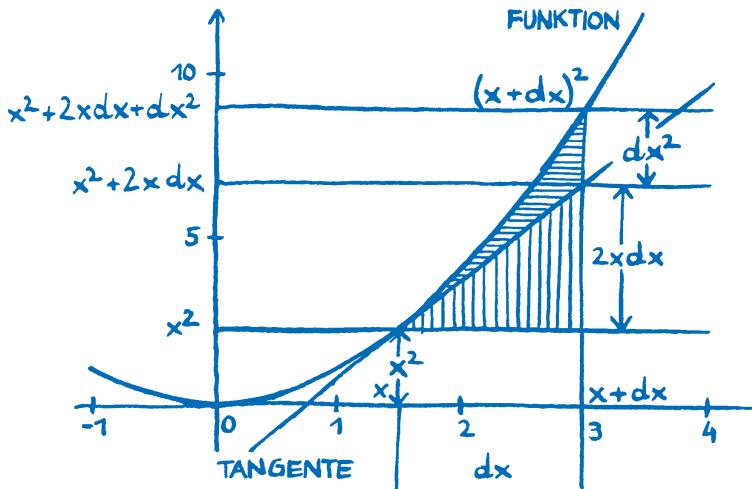
Während

$$f'(x) \cdot dx = 2 \cdot x \cdot dx$$

der tangentiale (lineare) Zuwachs bis zur Stelle  $x + dx$  ist, zeigen höhere Potenzen von  $dx$ , also z.B.

$$dx^2$$

den „krummlinigen“ – in diesem Fall den **quadratischen – Zuwachs**  $dx^2$  an. Dieser Teil ist der „Rest“ in unserer vorhergehenden Betrachtung.



Wenn wir also auf diese Art die Ableitung einer Funktion finden wollen, müssen wir – wie bereits festgestellt – den „linearen“ Zuwachs bestimmen – also alles, was beim  $dx$  steht. Den Rest, also den **„krummlinigen“ Zuwachs** – das ist alles was bei  $(dx)^2$ ,  $(dx)^3$ , ... steht –, dürfen wir einfach ignorieren.

# Die Ableitung des Produktes und des Quotienten

## Irgendwo ist immer ein Haken

IGOR?! ICH VERSTEHEN DAS NICHT.  
IMMER WENN ES SCHWIERIG WIRD,  
HAKT ES MEISTENS.

UND EBEN DAMIT ES KEINE  
MISSVERSTÄNDNISSE GIBT, HILFT UNS  
UNSER FREUND „TRA-FO“ MIT  
PRODUKT- UND QUOTIENTHAKEN WEITER.



Produkt und Quotient haben es in sich beim Differenzieren. Hier werden die Rechnungen lang und es passieren viele Fehler.

Das Produkt wird beim Ableiten zu einer Summe von Produkten. Beim Quotienten entsteht im Zähler eine Differenz von Produkten. Hier gibt es viele Haken, an denen man hängen bleiben kann: die Klammer um die Summe vergessen, bei der Differenz die Glieder verwechseln, die Übersicht verlieren, da so viele Regeln jetzt ineinander greifen ... Mensch Mathe, hier muss viel trainiert werden!

Zunächst mal eine Erklärung, wie diese Regeln (Haken) entstehen:

### Die Produktregel

Wieder leistet die Formel  $f(x+dx) \approx f(x) + f'(x) \cdot dx$  wertvolle Dienste, wenn wir der Ableitung des Produkts zweier Funktionen

$$F(x) = f(x) \cdot g(x)$$

auf die Schliche kommen wollen.

Wir wenden diese Formel sowohl auf  $F(x)$  als auch auf die Faktoren  $f(x)$  und  $g(x)$  an. Für  $F(x)$  ergibt die Formel:

$$F(x+dx) \approx F(x) + F'(x) \cdot dx$$

Für das Produkt  $F(x) = f(x) \cdot g(x)$  gilt:

$$F(x+dx) = f(x+dx) \cdot g(x+dx) \approx (f(x) + f'(x) \cdot dx) \cdot (g(x) + g'(x) \cdot dx)$$

Nach dem Auflösen des geklammerten Ausdrucks, zeigt uns der Vergleich der beiden Darstellungen Folgendes:

$$\underbrace{f(x) \cdot g(x)}_{F(x)} + \underbrace{(f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)) \cdot dx}_{F'(x) \cdot dx} + \underbrace{f'(x) \cdot g'(x) \cdot dx^2}_{\text{Rest (quadratischer Zuwachs)}}$$

Der Rest darf als quadratischer Zuwachs (laut Dr. Know) ignoriert werden, wenn es nur um das Bestimmen der Ableitung geht. Diese zeigt sich nämlich – wie wir wissen – als Faktor des linearen  $dx$ . Daher gilt:

$$F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Ersetzen wir links noch  $F'(x)$  durch  $(f(x) \cdot g(x))'$ , so ergibt sich die **Produktregel** der Differenziation:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$



In Worten (wenn die Funktionen nicht  $f$  und  $g$  heißen): Die **Ableitung eines Produkts** ist die Summe der Ableitungen der Faktoren jeweils multipliziert mit dem undifferenzierten anderen Faktor.

### Die Quotientenregel

Ein Quotient zweier Funktionen

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

kann natürlich auch als Gleichung so geschrieben werden:

$$\frac{f}{g} \cdot g = f$$

Dieser Trick erleichtert es uns, eine Regel für die Ableitung des Quotienten zu finden.

Wir differenzieren die Gleichung:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f'$$

Werten wir den linken Ausdruck nach der Produktregel aus, so ergibt sich:

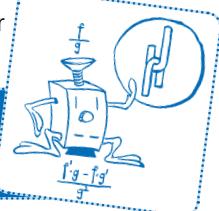
$$\left(\frac{f}{g}\right)' \cdot g + \frac{f}{g} \cdot g' = f'$$

Jetzt können wir den Trick zu Ende bringen. Es ist nur mehr die Gleichung aufzulösen, in der links die Ableitung des Quotienten übrig bleibt.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' \cdot g = f' - \frac{f}{g} \cdot g' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g}$$

Jetzt noch auf beiden Seiten durch  $g$  dividieren und wir erhalten die **Quotientenregel** in der üblichen Form (wir dürfen durch  $g$  dividieren, da der Quotient nur dann definiert ist, wenn der Nenner nicht null ist):

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$



Produktregel,  
zwei Faktoren

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) =$$

$$= f(x) \cdot g(x) \cdot \left(\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}\right)$$


Produktregel,  
drei Faktoren

$$(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' =$$

$$= f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \cdot \left(\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{h'(x)}{h(x)}\right)$$


Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$


Ohne Training – Weiterlesen auf eigene Gefahr! Die Haken lassen sich nur mit Training umgehen. In unseren Aufgaben helfen die Piktogramme, die Übersicht zu behalten. Das Training werden wir im folgenden Beispiel brauchen.

Großmutter hat keine Filtertüten mehr. Sie schneidet ein rundes Filterblatt (Radius  $R$ ) ein und lässt den Sektor mit dem Mittelpunktswinkel  $w$  überlappen. Dadurch entsteht ein Papiertrichter in Form eines Kegelmantels, den sie als Filter verwenden kann.

Während die Flüssigkeit sehr langsam durchsickert, überlegt sie: „Wie viel muss ich überlappen bzw. nicht überlappen lassen, damit der Kegel möglichst viel Flüssigkeit aufnimmt. Dann kann ich meine eigenen Filtertüten produzieren?“

VERDAMMT! KEINE KAFFEEFILTER MEHR. ))  
JETZT HEISST ES, DEN MAXIMALWERT  
DES FILTERKEGELVOLUMENS  
ZU ERRECHNEN.

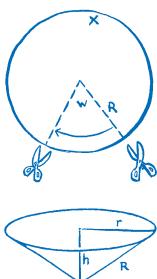


Offensichtlich sucht die Großmutter einen Maximalwert des Kegelvolumens.

Die **Zielfunktion** für dieses Extremwertproblem lautet:

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

Da  $w$  bzw.  $x$  – der Ergänzungswinkel auf  $2 \cdot \pi$  – unsere Variablen sind, die die Großmutter beeinflussen kann, müssen wir die Unbekannten  $r$  und  $h$  durch  $w$  oder – einfacher – durch  $x$  ausdrücken. Wir müssen also **Nebenbedingungen** finden!



Der Bogen, der zum Winkel  $x$  gehört, ist  $R \cdot x$ . Dieses Bogenstück entspricht aber zugleich dem Umfang des Basiskreises des Kegels, also  $2 \cdot r \cdot \pi = R \cdot x$ .

$$r = \frac{R \cdot x}{2 \cdot \pi}$$

Damit ist in einer ersten Nebenbedingung  $r$  durch  $x$  ausgedrückt.

Wegen

$$h = \sqrt{R^2 - r^2}$$

gilt

$$h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R \cdot x}{2 \cdot \pi}\right)^2} = R \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4 \cdot \pi^2}}$$

Damit ist in einer zweiten Nebenbedingung  $h$  durch  $x$  dargestellt.

Durch Einsetzen der Nebenbedingungen wird aus der Zielfunktion eine Funktion mit nur mehr einer Variablen.

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{R \cdot x}{2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4 \cdot \pi^2}} = \frac{R^3}{12 \cdot \pi} \cdot x^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4 \cdot \pi^2}} = \frac{R^3}{24 \cdot \pi^2} \cdot x^2 \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2}$$

Einen Extremwert finden wir, wenn wir zunächst

$$\frac{R^3}{24 \cdot \pi^2} \cdot x^2 \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2}$$

nach  $x$  differenzieren. Das ist schon recht komplex – die Sache steckt voller Haken. Am besten geht es schrittweise und hier helfen Piktogramme. Wichtig ist dabei die richtige Reihenfolge. Und nicht aufgeben!

$$V'(x) = \left( \frac{R^3}{24 \cdot \pi^2} \cdot x^2 \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2} \right)'$$



$$\frac{R^3}{24 \cdot \pi^2} \cdot \left( x^2 \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2} \right)'$$



$$\frac{R^3}{24 \cdot \pi^2} \cdot \left( (x^2)' \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2} + x^2 \cdot \left( \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2} \right)' \right)$$



$$\frac{R^3}{24 \cdot \pi^2} \cdot \left( 2 \cdot x \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2} + x^2 \cdot \left( \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2} \right)' \right) =$$

$$= \frac{R^3}{24 \cdot \pi^2} \cdot \left( 2 \cdot x \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2} + x^2 \cdot \left( z^{\frac{1}{2}} \right)' \right)$$



$$\frac{R^3}{24 \cdot \pi^2} \cdot \left( 2 \cdot x \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2} + x^2 \cdot \left( z^{\frac{1}{2}} \right)' \right) =$$

$$= \frac{R^3}{24 \cdot \pi^2} \cdot \left( 2 \cdot x \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2} + x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot z^{-\frac{1}{2}} \cdot z' \right) =$$

$$= \frac{R^3}{24 \cdot \pi^2} \cdot \left( 2 \cdot x \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2} + x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot \pi^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4 \cdot \pi^2 - x^2)' \right)$$



$$\frac{R^3}{24 \cdot \pi^2} \cdot \left( 2 \cdot x \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2} + x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot \pi^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot ((4 \cdot \pi^2)' - (x^2)') \right)$$



$$\frac{R^3}{24 \cdot \pi^2} \cdot \left( 2 \cdot x \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2} + x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot \pi^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-x^2)' \right)$$



$$\frac{R^3}{24 \cdot \pi^2} \cdot \left( 2 \cdot x \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2} + x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot \pi^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) \cdot (x^2)' \right)$$



$$\frac{R^3}{24 \cdot \pi^2} \cdot \left( 2 \cdot x \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2} + x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot \pi^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) \cdot 2 \cdot x \right)$$

$$\frac{R^3 \cdot x}{24 \cdot \pi^2} \cdot \left( 2 \cdot \sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2}} \right)$$

$$\frac{R^3}{24 \cdot \pi^2} \cdot \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot x - 3 \cdot x^3}{\sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2}}$$

Unser **Extremwert** muss sich unter den Nullstellen von  $V'(x)$  finden lassen.

$$\frac{R^3}{24 \cdot \pi^2} \cdot \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot x - 3 \cdot x^3}{\sqrt{4 \cdot \pi^2 - x^2}} = 0$$

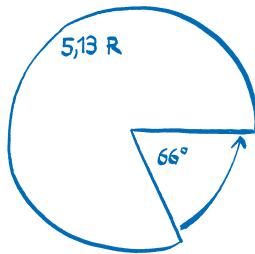
Wir kürzen durch die konstanten Faktoren, die vorne stehen, multiplizieren die Gleichung mit dem Wurzausdruck und heben  $x$  heraus.

$$x \cdot (8 \cdot \pi^2 - 3 \cdot x^2) = 0$$

Da bei  $x = 0$  mit  $V = 0$  nur ein Volumenminimum vorliegen kann, bleibt als einzige positive Lösung:

$$x = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ rad} = 5,13 \text{ rad}$$

Dieser Wert entspricht etwa  $294^\circ$ . Der einzufaltende Winkel ist demnach  $360^\circ - 294^\circ = 66^\circ$ .



Dass dieser Wert ein **Volumenmaximum** und nicht ein Minimum darstellt, ist geometrisch klar.

Überlappt man fast alles eventuell mehrfach (hoher, sehr schmaler Kegel), so ist das Volumen sehr klein. Dasselbe gilt, wenn man fast nichts einfaltet (breiter, sehr flacher Kegel). Dazwischen kann nur ein Maximalwert liegen.

Wer es mathematisch prüfen will, muss 5,13 in die zweite Ableitung  $V''(x)$  einsetzen. Der Wert, der sich ergibt, müsste dann negativ sein.

Das maximale Fassungsvermögen des Filters ist  $V_{\text{Kegel}}(5,13)$ . Der numerische Wert beträgt  $0,403 \cdot R^3$ .

# Kurvendiskussion ganzer Funktionen

## Mathematischer Schönheitswettbewerb

Bei unbekannten Funktionen können wir über deren grafischen Verlauf praktisch nichts aussagen. Wir könnten einzelne Punkte der Funktion berechnen und die Kurve durch die Punkte legen. Dabei wären wir nie sicher, ob sich das Bild der Funktion zwischen den Punkten nicht ganz anders verhält als unsere gut gemeinte Schätzung bezüglich des Verlaufs zwischen diesen Punkten.

Erst die Differenzialrechnung gibt uns die Möglichkeit, so **typische Kurvenpunkte** festzustellen, dass der Verlauf der Kurve einwandfrei erforscht werden kann. Diese Detektivarbeit an Kurven nennt man Kurvendiskussion.



Am Anfang einer Kurvendiskussionen steht die Frage, ob der definierende Ausdruck überall Sinn macht. Es ist der **Definitionsbereich** zu bestimmen.

# Copyright

Daten, Texte, Design und Grafiken dieses eBooks, sowie die eventuell angebotenen eBook-Zusatzdaten sind urheberrechtlich geschützt. Dieses eBook stellen wir lediglich als **persönliche Einzelplatz-Lizenz** zur Verfügung!

Jede andere Verwendung dieses eBooks oder zugehöriger Materialien und Informationen, einschließlich

- der Reproduktion,
- der Weitergabe,
- des Weitervertriebs,
- der Platzierung im Internet, in Intranets, in Extranets,
- der Veränderung,
- des Weiterverkaufs und
- der Veröffentlichung

bedarf der **schriftlichen Genehmigung** des Verlags. Insbesondere ist die Entfernung oder Änderung des vom Verlag vergebenen Passwortschutzes ausdrücklich untersagt!

Bei Fragen zu diesem Thema wenden Sie sich bitte an: [info@pearson.de](mailto:info@pearson.de)

## Zusatzdaten

Möglicherweise liegt dem gedruckten Buch eine CD-ROM mit Zusatzdaten bei. Die Zurverfügungstellung dieser Daten auf unseren Websites ist eine freiwillige Leistung des Verlags. **Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.**

## Hinweis

Dieses und viele weitere eBooks können Sie rund um die Uhr und legal auf unserer Website herunterladen:

**<http://ebooks.pearson.de>**