Jetzt mit eLearning

#besser lernen

Lineare Algebra

für Naturwissenschaftler und Ingenieure

Lehr- und Übungsbuch mit MyMathLab | Lineare Algebra

Michael Ruhrländer

Pearson

MIT eLEARNING

Satz 3.10 Basis von $\mathcal{P}_n$

Wir wollen nun zeigen, dass die Menge

$$B = \left(1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\right)$$

eine Basis von $\mathcal{P}_n$ bildet. Zunächst stellen wir fest, dass alle Elemente von B Polynome vom Grad höchstens n, also Elemente von $\mathcal{P}_n$ sind. Wenn wir uns ein beliebiges Polynom $p(x)$ aus $\mathcal{P}_n$ hernehmen, so hat dieses die Gestalt

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

mit reellen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Schreiben wir $p(x)$ als

$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n \,,$$

so folgt sofort, dass $p(x)$ eine Linearkombination der Elemente aus B ist. Es gilt also

$$\mathcal{P}_n = \operatorname{span}\left\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\right\} \,.$$

Um die lineare Unabhängigkeit der Vektoren aus B zu zeigen betrachten wir die Gleichung

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n = \mathbf{0} \,,$$

wobei die rechte Seite das Nullpolynom darstellt. Man beachte, dass die obige Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten muss und die linke Seite ein Polynom n-ten Grades ist:

$$q(x) = \lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n \,.$$

Nun besagt ein Satz aus der Algebra, dass ein reelles Polynom n-ten Grades höchstens n reelle Nullstellen hat, d. h., es gibt höchstens n reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die $q(x)$ zu null machen, d. h.

$$q(x) \begin{cases} = 0 & \text{für } x = x_i \\ \neq 0 & \text{für } x \neq x_i \end{cases} \,.$$

Damit trotzdem immer null herauskommt, muss $q(x)$ also das Nullpolynom sein, d. h., die Koeffizienten $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ müssen alle null sein.
Damit ist auch die lineare Unabhängigkeit von $\left(1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\right)$ gezeigt, d. h., das Kriterium (2. a) von Satz 3.7 ist ebenfalls erfüllt und B ist eine Basis von $\mathcal{P}_n$, die auch **Standardbasis** genannt wird. Zählt man die Basisvektoren durch, so folgt für die Dimension von $\mathcal{P}_n$

$$\dim \mathcal{P}_n = n + 1 \,.$$

Mit diesen Ergebnissen sind wir auch in der Lage zu zeigen, dass der Vektorraum $\mathcal{P}$ aller Polynome unendlichdimensional ist. Wir nehmen das Gegenteil an und führen diese Annahme auf einen Widerspruch. Also angenommen, $\mathcal{P}$ wäre endlichdimensional mit Dimension gleich $k \in \mathbb{N}$. Wir wissen, dass $\mathcal{P}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Unterraum von $\mathcal{P}$ ist, d. h., es gilt insbesondere

$$\dim \mathcal{P}_k \leq \dim \mathcal{P} \,.$$

Nun ist nach den obigen Überlegungen

$$\dim \mathcal{P}_k = k + 1 \,,$$

d. h.

$$\dim \mathcal{P}_k = k + 1 \leq \dim \mathcal{P} = k \,,$$

was offensichtlich falsch ist. Also ist $\mathcal{P}$ unendlichdimensional.

Funktionenräume

Auch Mengen beliebiger reeller Funktionen kann man in ganz ähnlicher Weise wie die Polynome mit Vektorraumstrukturen ausstatten.

Definition

3.9 Raum der reellen Funktionen

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller reellwertigen Funktionen

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ Funktion}\} \,.$$

Definieren wir wie bei den Polynomen die Addition zweier Funktionen f, g durch

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

und die skalare Multiplikation durch

$$(\lambda f)(x) = \lambda\,(f(x)) \,,$$

so sind die Ergebnisse wieder reellwertige Funktionen.

Als konkretes Beispiel betrachten wir

$$f(x) = 5 + 3\cos x + 2x$$

und

$$g(x) = 1 + 2x + 3x^2 \,,$$

dann folgt

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= 5+3\cos x+2x+1+2x+3x^2\\ &= 6+4x+3x^2+3\cos x\,,\end{aligned}$$

sowie

$$(3g)(x)=3\left(1+2x+3x^2\right)=3+6x+9x^2\,.$$

Die Vektorraumgesetze für $\mathcal{F}$ sind in natürlicher Weise erfüllt:

- Der Nullvektor in $\mathcal{F}$ ist die Funktion $\mathbf{0}$, die jedes Element auf null abbildet, d. h., es gilt

$$\mathbf{0}(x)=0$$

  für alle $x\in\mathbb{R}$. Denn dann folgt

$$(f+\mathbf{0})(x)=f(x)+\mathbf{0}(x)=f(x)+0=f(x)\,.$$

- Die zu einer Funktion f negative Funktion ist $-f$, denn

$$(f+(-f))(x)=f(x)+(-f(x))=f(x)-f(x)=0=\mathbf{0}(x)\,.$$

- Der Nachweis der übrigen Vektorraumgesetze folgt wiederum direkt aus dem für die reellen Zahlen.

Unterräume der reellen Funktionen

Weitere oft benutzte Funktionenräume, die allesamt Unterräume von $\mathcal{F}$ sind, sind

- die **Menge aller stetigen Funktionen**

$$\mathcal{C}=\{f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f\text{ stetige Funktion}\}\;,$$

- die **Menge aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen**

$$\mathcal{C}^k=\{f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f\ k\text{-mal stetig differenzierbare Funktion}\}$$

- sowie die **Menge aller auf dem Intervall $[a,b]$ integrierbaren Funktionen**

$$\mathcal{L}=\{f\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}, f\text{ integrierbare Funktion}\}\;.$$

Die Begründung dafür, dass diese Mengen Unterräume von $\mathcal{F}$ sind, liegt darin, dass die Summen und die Vielfachen solcher Funktionen wieder Elemente der jeweiligen Mengen sind.

Lineare Unabhängigkeit von Funktionen

Wir wollen Funktionen auf lineare Unabhängigkeit prüfen und schauen uns dazu ein Beispiel an. Sind die Funktionen $\{\sin x, \cos x, x \cos x\}$ linear unabhängig? Um das zu entscheiden, gehen wir von der Gleichung

$$\lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x + \lambda_3 x \cos x = \mathbf{0}\,(x)$$

aus, die für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt sein soll. Wenn wir zeigen können, dass diese Gleichung nur die Lösung

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

hat, so sind die Funktionen linear unabhängig. Als Erstes setzen wir $x = 0$ in die Gleichung ein und erhalten

$$\lambda_1 \underbrace{\sin 0}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{\cos 0}_{=1} + \lambda_3 \underbrace{0 \cdot \cos 0}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 0\,.$$

Für $x = \dfrac{\pi}{2}$ ergibt sich mit $\lambda_2 = 0$

$$\lambda_1 \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} + \lambda_3 \underbrace{\frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2}}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0\,.$$

Schließlich folgt für $x = \pi$ mit $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$\lambda_3 \pi \underbrace{\cos \pi}_{=-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_3 \pi = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = 0$$

und insgesamt ist gezeigt, dass die drei Funktionen linear unabhängig sind.

Lineare Abbildungen

Zwischen zwei Vektorräumen V und W lassen sich auch lineare Abbildungen definieren.

Definition

3.10 Lineare Transformation

Wir nennen eine Abbildung $T\colon V \to W$ **linear**, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. Sind $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ zwei beliebige Vektoren aus V, so folgt

$$T\,(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T\,(\mathbf{v}) + T\,(\mathbf{w})\ .$$

2. Ist $\mathbf{v}$ aus V und $\lambda \in \mathbb{R}$, so folgt

$$T\,(\lambda \mathbf{v}) = \lambda T\,(\mathbf{v})\ .$$

Die linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen werden üblicherweise **lineare Transformationen** genannt, bei den Funktionenräumen oftmals auch **Operatoren**.

Lineare Abbildungen zwischen Funktionenräumen

1. Es sei $D\colon \mathcal{C}^1 \to \mathcal{F}$ der **Differenzialoperator**, der jeder differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ihre 1. Ableitung zuordnet, also

$$D(f) = f' .$$

Dann ist D eine lineare Transformation, denn aus der **Analysis** wissen wir, dass folgende Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} D(f+g) &= (f+g)' = f' + g' = D(f) + D(g) \\ D(\lambda f) &= (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda D(f) \ . \end{aligned}$$

2. Es sei $I\colon \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ der **Integraloperator**, der jeder integrierbaren Funktion $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ das bestimmte Integral über $[a,b]$ zuordnet, also

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \,.$$

Dann ist I eine lineare Transformation, denn aus der **Analysis** wissen wir, dass folgende Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} I(f+g) &= \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = I(f) + I(g) \\ I(\lambda f) &= \int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx = \lambda I(f) \ . \end{aligned}$$

Homogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung

Eine Gleichung der Form

$$y'(x) + ay(x) = 0 \tag{3.1}$$

mit einer reellen differenzierbaren Funktion $y \in \mathcal{C}^1$ und einer reellen Zahl a nennt man **homogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung**. Eine Lösung von (3.1) ist eine differenzierbare Funktion $y = y(x)$, die die Gleichung für alle Werte von x erfüllt. Sind y_1, y_2 zwei Lösungen von (3.1), so gilt für alle x

$$\begin{aligned} y_1'(x) + ay_1(x) &= 0 \\ y_2'(x) + ay_2(x) &= 0 \end{aligned}$$

und daraus mit den Regeln der Differentiation

$$(y_1 + y_2)'(x) + a(y_1 + y_2)(x) = \underbrace{y_1'(x) + ay_1(x)}_{=0} + \underbrace{y_2'(x) + ay_2(x)}_{=0} = 0$$

sowie

$$(\lambda y_1)'(x) + a(\lambda y_1)(x) = \lambda y_1'(x) + \lambda a y_1(x) = \lambda \left(\underbrace{y_1'(x) + ay_1(x)}_{=0} \right) = 0 \, .$$

Das heißt, Summen und Vielfache von Lösungen sind wieder Lösungen. Es gilt also folgende Aussage.

Satz 3.11 **Die Menge $\mathbb{L}_h$ aller Lösungen von (3.1) ist ein Unterraum von $\mathcal{F}$.**

Wir wollen eine Basis von $\mathbb{L}_h$ bestimmen. Dazu wählen wir eine beliebige Lösung $y(x)$ aus $\mathbb{L}_h$ und definieren die reelle Funktion $z(x)$ durch

$$z(x) = y(x)\, e^{ax} \, .$$

Wir differenzieren diese Gleichung mit der **Produkt- und Kettenregel** der Analysis und erhalten

$$\begin{aligned} z'(x) &= y'(x)\, e^{ax} + y(x)\, ae^{ax} \\ &= e^{ax} \left(\underbrace{y'(x) + ay(x)}_{=0} \right) = 0 \, , \end{aligned}$$

da $y(x)$ eine Lösung der Differenzialgleichung ist. Also ist $z(x)$ eine konstante Funktion, etwa $z(x) = c$ mit einem c aus $\mathbb{R}$. Das bedeutet aber

$$z(x) = c = y(x)\, e^{ax} \quad \Rightarrow \quad y(x) = ce^{-ax} \, .$$

Da $y(x)$ ein beliebiges Element der Lösungsmenge war, ist jede Lösung also ein Vielfaches der Funktion e^{-ax}. Wir erhalten folgendes Resultat.

Satz 3.12 **Basis und Dimension der Lösungsmenge der Differenzialgleichung**
Die Funktion $\{e^{-ax}\}$ ist eine Basis der Lösungsmenge $\mathbb{L}_h$ und damit ist die Dimension von $\mathbb{L}_h$ gleich 1.

Zusammenfassung

- Ein reeller Vektorraum besteht aus einer Menge V, auf der die beiden Operationen Addition und skalare Multiplikation definiert sind. Diese Operationen müssen acht Rechengesetze erfüllen.
- Die Menge $\mathbb{R}^n$ ist ein reeller Vektorraum.
- Ein reeller n-dimensionaler Vektor $\mathbf{v}$ wird durch ein geordnetes n-Tupel reeller Zahlen definiert.
- Spezielle Einheitsvektoren im n-Dimensionalen sind die Koordinateneinheitsvektoren

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \cdots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

  die auch kartesische Basisvektoren genannt werden.
- Das Skalarprodukt von n-dimensionalen Vektoren wird durch die Komponenten der Vektoren berechnet:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \,.$$

- Die Länge eines Vektors $\mathbf{v}$ aus dem $\mathbb{R}^n$ wird durch

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

  definiert.
- Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ heißen orthogonal zueinander, wenn

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = 0$$

  gilt.
- Der Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ wird durch

$$\varphi = \arccos \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \arccos \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n}{\sqrt{\left(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2\right)\left(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2\right)}}$$

  berechnet.
- Die Projektion eines n-dimensionalen Vektors $\mathbf{v}$ auf einen Vektor $\mathbf{u}$ wird durch

$$\mathbf{v}_{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\right) \mathbf{u}$$

  definiert.

- Eine Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$ heißt Unterraum von $\mathbb{R}^n$, wenn gilt:
  - Sind $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ beliebige Elemente aus U, so ist auch $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ein Element von U.
  - Sind $\mathbf{u} \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt, so ist auch $\lambda\mathbf{u}$ ein Element von U.
- Die Menge aller möglichen Linearkombinationen, d. h.

$$\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n\,, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}\,,$$

  nennt man die von den Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ aufgespannte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.
- Die Menge $U = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.
- Eine Familie von Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ aus $\mathbb{R}^n$ heißt
  - linear abhängig, wenn wenigstens einer von ihnen als Linearkombination der anderen geschrieben werden kann, oder wenn einer von ihnen der Nullvektor $\mathbf{0}$ ist,
  - andernfalls heißt sie linear unabhängig.
- Fundamental-Lemma: Je $n+1$ Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}$ aus dem $\mathbb{R}^n$ sind stets linear abhängig.
- Eine Menge B von n linear unabhängigen Vektoren $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ aus $\mathbb{R}^n$ nennt eine Basis von $\mathbb{R}^n$ und die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ Basisvektoren.
- Der Raum $\mathbb{R}^n$ hat die Dimension n.
- Ist $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbf{v}$ ein beliebiger Vektor mit der Darstellung

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n\,,$$

  dann nennt man den Vektor

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

  den Koordinatenvektor von $\mathbf{v}$ bezüglich B.
- Die Koordinatenvektoren einer Basis sind die kartesischen Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^n$.
- Die Menge $\mathcal{P}_n$ aller Polynome vom Grad höchstens n bildet einen Vektorraum.
- Die Menge $B = \left(1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\right)$ ist eine Basis von $\mathcal{P}_n$.
- Die Menge der reellen Funktionen $\mathcal{F}$ kann als Vektorraum aufgefasst werden.
- Die Lösungsmenge $\mathbb{L}_h$ der homogenen linearen Differenzialgleichung $y'(x) + ay(x) = 0$ bildet einen Unterraum von $\mathcal{F}$.
- Die Funktion $\{e^{-ax}\}$ ist eine Basis der Lösungsmenge $\mathbb{L}_h$, d. h., die Dimension von $\mathbb{L}_h$ ist gleich 1.

Lernziele

In diesem Kapitel lernen Sie,

- dass eine $m \times n$-Matrix ein rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten ist.
- wie man Matrizen addiert und mit einer Zahl multipliziert.
- dass die Menge der Matrizen die acht Vektorraumgesetze erfüllt.
- wie man eine Matrix mit einem Vektor oder mit einer anderen Matrix multipliziert.
- welche Rechengesetze die Matrixmultiplikation erfüllt.
- was die Transponierte einer Matrix ist.
- was symmetrische Matrizen sind.
- wie man die Inverse einer Matrix bestimmt.
- wie mithilfe der Matrixrechnung lineare Gleichungssysteme gelöst werden können.
- was der Fundamentalsatz über invertierbare Matrizen besagt.
- welche Verbindungen es zwischen linearen Transformationen und Matrizen gibt.
- welche Unterräume durch eine Matrix generiert werden.
- dass Basiswechsel mit Matrizen dargestellt werden können.
- welche Kriterien zur Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen existieren.

Matrix Algebra

4

ÜBERBLICK

Übersicht

In Kapitel 1 haben wir Koeffizientenmatrizen bei der Darstellung und Lösung von linearen Gleichungssystemen genutzt. Hier behandeln wir Matrizen als selbstständige Objekte und untersuchen ihre vielfältigen algebraischen Eigenschaften. Als Resultate werden wir z. B. weitere elegante Lösungsmethoden für Gleichungssysteme erhalten oder auch Vektoren mit Matrix-Transformationen in andere Vektoren überführen können. Matrizen sind aber nicht nur Hilfsmittel für andere mathematische Disziplinen wie z. B. Vektorrechnung oder Differenzialgleichungen, sondern werden in vielen Disziplinen als Darstellungs- und Modellierungswerkzeuge genutzt, in der Physik z. B. als Lorentz-Matrizen in der Relativitätstheorie, in der Technik z. B. als Spannungsmatrizen oder in der Ökonomie z. B. als Konsummatrizen. Wir beginnen mit den grundlegenden Definitionen.