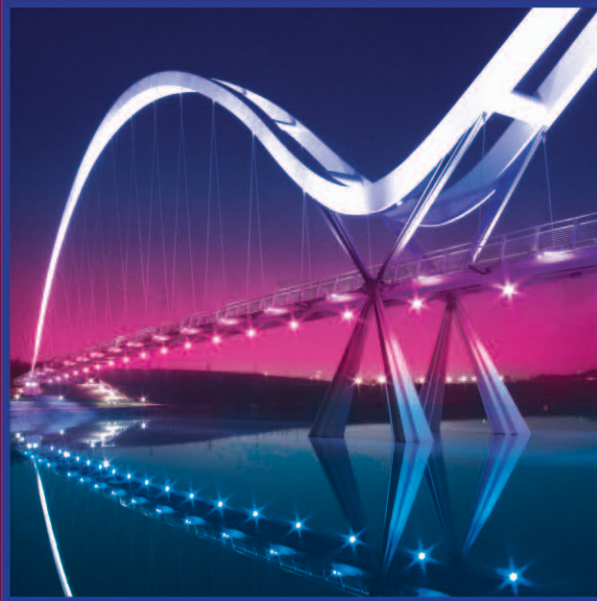




George B. Thomas
Maurice D. Weir
Joel Hass

Basisbuch Analysis



**George B. Thomas
Maurice D. Weir
Joel R. Hass**

Basisbuch Analysis

12., aktualisierte Auflage

PEARSON

Higher Education

München • Harlow • Amsterdam • Madrid • Boston
San Francisco • Don Mills • Mexico City • Sydney

a part of Pearson plc worldwide

Zweite Ableitungen Berechnen Sie in den Aufgaben 10–12 die Ableitungen dy/dx und d^2y/dx^2 mithilfe der impliziten Differentiation.

10. $x^2 + y^2 = 1$

11. $y^2 = x^2 + 2x$

12. $2\sqrt{y} = x - y$

13. Bestimmen Sie für $x^3 + y^3 = 16$ den Wert von d^2y/dx^2 im Punkt $(2, 2)$.

Bestimmen Sie in den Aufgaben 14 und 15 die Steigung der Kurven in den gegebenen Punkten.

14. $y^2 + x^2 = y^4 - 2x$ bei $(-2, 1)$ und $(-2, -1)$.

15. $(x^2 + y^2)^2 = (x - y)^2$ bei $(1, 0)$ und $(1, -1)$.

Steigungen, Tangenten und Normalen Bestätigen Sie in den Aufgaben 16–20, dass der gegebene Punkt auf der Kurve liegt, und bestimmen Sie dann **a.** die Tangenten und **b.** die Normalen der Kurve am gegebenen Punkt.

16. $x^2 + xy - y^2 = 1$, $(2, 3)$

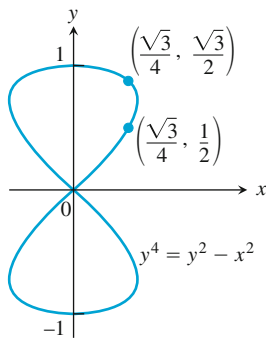
17. $x^2y^2 = 9$, $(-1, 3)$

18. $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0$, $(-1, 0)$

19. $2xy + \pi \sin y = 2\pi$, $(1, \pi/2)$

20. $y = 2 \sin(\pi x - y)$, $(1, 0)$

21. Die Kurve der Acht (Lemniskate) Bestimmen Sie die Steigung der Kurve $y^4 = y^2 - x^2$ in den beiden in der Abbildung eingezeichneten Punkten.

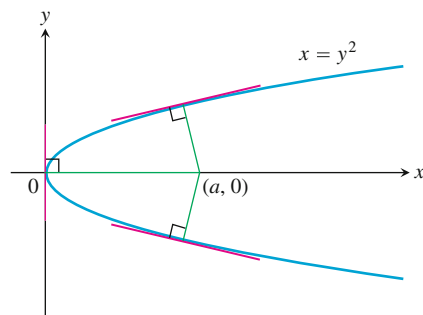


22. Parallele Tangenten Berechnen Sie zwei Punkte, in denen die Kurve $x^2 + xy + y^2 = 7$ die x -Achse schneidet, und zeigen Sie, dass die Tangenten der Kurve in diesen Punkten parallel sind. Welches ist die gemeinsame Steigung dieser Tangenten?

Theorie und Beispiele

23. Normalen schneiden die Kurve Die Gerade, die im Punkt $(1, 1)$ normal auf der Kurve $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ steht, schneidet die Kurve in welchem anderen Punkt?

24. Normalen einer Parabel Zeigen Sie: Wenn es möglich ist, von einem Punkt $(a, 0)$ drei Normalen an die Parabel $x = y^2$ zu zeichnen, dann muss a größer als $1/2$ sein. Eine der Normalen ist die x -Achse. Für welchen Wert von a sind die anderen beiden Normalen rechtwinklig zueinander?



25. Zeigen Sie, dass sich die folgenden beiden Kurvenpaare jeweils senkrecht zueinander schneiden.

a. $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 = 3y^2$

b. $x = 1 - y^2$, $x = \frac{1}{3}y^2$

Bestimmen Sie in den Aufgaben 26 und 27 sowohl dy/dx (betrachten Sie y als differenzierbare Funktion von x) als auch dx/dy (betrachten Sie x als differenzierbare Funktion von y). Welche Beziehung besteht anscheinend zwischen dy/dx und dx/dy ? Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen den Graphen geometrisch.

26. $xy^3 + x^2y = 6$

27. $x^3 + y^3 = \sin^2 y$

3.8 Verknüpfte Änderungsraten

In diesem Abschnitt behandeln wir Probleme, in denen die Geschwindigkeit gesucht wird, mit der sich bestimmte Variablen ändern, wenn die Änderungsgeschwindigkeit einer anderen Variable (oder auch mehrerer anderer Variablen) bekannt ist und diese mit der gesuchten Änderungsrate zusammenhängen. Diese Aufgaben, in denen man von einer gegebenen Änderungsrate auf andere Geschwindigkeiten schließt, nennt man *Probleme mit verknüpften Änderungsraten*.

Gleichungen mit verknüpften Änderungsraten

Nehmen Sie an, wir pumpen Luft in einen kugelförmigen Ballon. Sowohl das Volumen als auch der Radius des Ballons nehmen dann mit der Zeit zu. Wenn V das Volumen und r der Radius des Ballons zu einem Zeitpunkt t sind, dann gilt:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Mithilfe der Kettenregel leiten wir beide Seiten nach t ab und erhalten so eine Gleichung, die die Änderungsraten von V und r verknüpft:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

Wenn wir also den Radius r des Ballons kennen sowie die Geschwindigkeit dV/dt , mit der das Volumen zu einem gegebenen Zeitpunkt zunimmt, dann können wir die letzte Gleichung nach dr/dt auflösen und so bestimmen, wie schnell der Radius zu demselben Zeitpunkt zunimmt. Physikalisch ist es leichter, die Geschwindigkeit zu messen, mit der das Volumen zunimmt (sie entspricht der Geschwindigkeit, mit der die Luft in den Ballon gepumpt wird), als die Zunahme des Radius. Mit der Gleichung, die die Änderungsraten verknüpft, können wir dr/dt aus dV/dt bestimmen.

In vielen Fällen kann man den Zusammenhang zwischen den Variablen in Aufgaben mit verknüpften Änderungsraten am besten mit einer Skizze der geometrischen Zusammenhänge erkennen. Dies wird in den folgenden Beispielen gezeigt.

Beispiel 3.29 Wasser läuft in einen kegelförmigen Tank mit einem Durchsatz von $9 \text{ m}^3/\text{min}$. Der Tank steht mit der Spitze nach unten und ist 10 m hoch, seine Basis hat einen Radius von 5 m . Wie schnell steigt der Wasserspiegel bei einer Wassertiefe von 6 m ?

Wasser in einem
kegelförmigen Tank

Lösung ► Abbildung 3.24 auf der nächsten Seite zeigt einen teilweise gefüllten kegelförmigen Tank. Die Variablen in dieser Aufgabe sind:

V :	Volumen (m^3) des Wassers im Tank zur Zeit t (min)
x :	Radius (m) der Wasseroberfläche zur Zeit t
y :	Wassertiefe (m) im Tank zur Zeit t

Wir nehmen an, dass V , x und y differenzierbare Funktionen von t sind. Die Konstanten sind die Abmessungen des Tanks. Wir wollen dy/dt mit

$$y = 6 \text{ m} \quad \text{und} \quad \frac{dV}{dt} = 9 \text{ m}^3/\text{min}$$

bestimmen. Das Wasser bildet einen Kegel mit dem Volumen

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y.$$

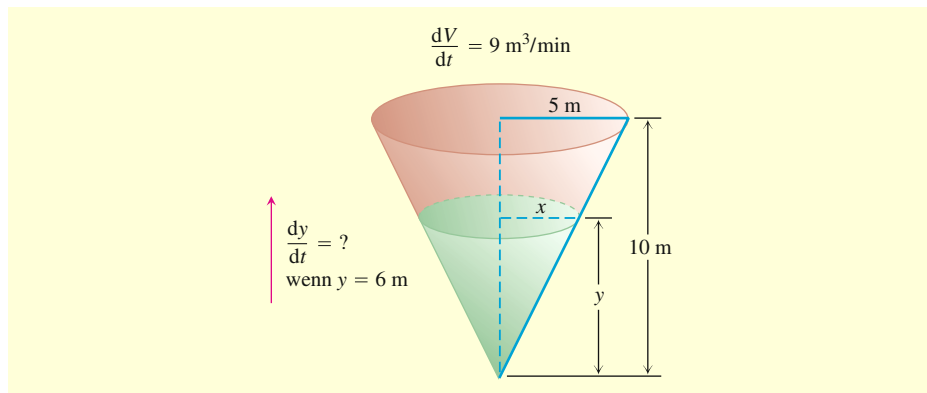


Abbildung 3.24

Die Geometrie des kegelförmigen Tanks und die Geschwindigkeit, mit der das Wasser den Tank füllt, bestimmen, wie schnell der Wasserspiegel steigt (Beispiel 3.29).

Diese Gleichung enthält sowohl x als auch V und y . Da wir keine Information zu x und dx/dt zur fraglichen Zeit haben, müssen wir x eliminieren. Mithilfe der einander ähnlichen Dreiecke in Abbildung 3.24 können wir x als Funktion von y ausdrücken:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \quad \text{oder} \quad x = \frac{y}{2}.$$

Damit erhalten wir

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 y = \frac{\pi}{12}y^3$$

und daraus die Ableitung

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3y^2 \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}y^2 \frac{dy}{dt}.$$

In diese Gleichung setzen wir $y = 6$ und $dV/dt = 9$ ein und lösen nach dy/dt auf:

$$9 = \frac{\pi}{4}(6)^2 \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\pi} \approx 0,32.$$

Im betrachteten Moment steigt der Wasserspiegel um etwa 0,32 m/min. ■

Merke

Lösungsstrategie für Aufgaben mit verknüpften Änderungsraten

1. Erstellen Sie eine Skizze und benennen Sie alle Variablen und Konstanten. Bezeichnen Sie die Zeit mit t . Nehmen Sie an, dass alle Variablen differenzierbare Funktionen von t sind.
2. Notieren Sie alle gegebenen numerischen Informationen. Verwenden Sie die Symbole, die Sie im ersten Schritt vergeben haben.
3. Notieren Sie die gesuchten Größen. Üblicherweise wird das eine Änderungsrate sein, die als Ableitung ausgedrückt wird.
4. Stellen Sie eine Gleichung auf, die die Variablen verbindet. Vielleicht müssen Sie zwei oder mehr Gleichungen kombinieren, um eine zu erhalten, die die gesuchte Änderungsrate einer Variablen mit der bekannten Änderungsrate einer anderen verknüpft.

5. *Leiten Sie nach t ab.* Drücken Sie dann die gesuchte Änderungsrate mit den Änderungsraten und Variablen aus, die bekannt sind.
6. *Berechnen Sie.* Setzen Sie bekannte Werte ein, um die gesuchte Änderungsrate zu bestimmen.

Beispiel 3.30 Ein Heißluftballon steigt senkrecht von einem ebenen Feld auf und wird von einem Entfernungsmessgerät angepeilt, das 150 m vom Startpunkt des Ballons entfernt steht. Zu dem Zeitpunkt, zu dem der Steigungswinkel vom Messgerät aus $\pi/4$ beträgt, vergrößert er sich um 0,14 rad/min. Wie schnell steigt der Ballon in diesem Moment?

Steiggeschwindigkeit eines Ballons

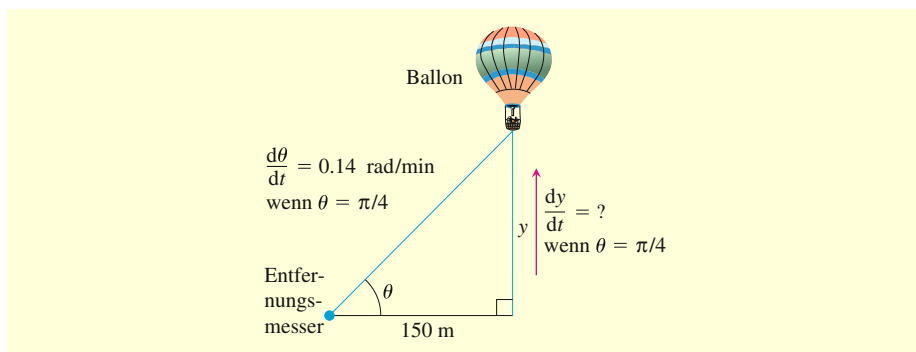


Abbildung 3.25 Die Steiggeschwindigkeit des Ballons ist verknüpft mit der Änderungsrate des Winkels, den der Entfernungsmesser zwischen Ballon und Boden bestimmt (Beispiel 3.30).

Lösung Wir lösen die Aufgabe in sechs Schritten.

1. *Erstellen Sie eine Skizze und benennen Sie alle Variablen und Konstanten* (►Abbildung 3.25). Die Variablen in der Abbildung sind:

θ : Winkel zwischen Ballon und Boden (in Radiant),

y : Höhe des Ballons in Metern.

t sei die Zeit in Minuten, wir nehmen an, dass θ und y differenzierbare Funktionen von t sind.

Die einzige Konstante in der Skizze ist der Abstand zwischen dem Entfernungsmesser und dem Startpunkt (150 m). Hierfür wird kein eigenes Symbol benötigt.

2. *Notieren Sie die zusätzlich gegebenen numerischen Informationen.*

$$\frac{d\theta}{dt} = 0,14 \text{ rad/min} \quad \text{bei} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

3. *Notieren Sie die gesuchten Größen.* Gesucht ist dy/dt bei $\theta = \pi/4$.

4. *Stellen Sie eine Gleichung auf, die die Variablen y und θ verbindet.*

$$\frac{y}{150} = \tan \theta \quad \text{oder} \quad y = 150 \tan \theta$$

5. *Leiten Sie mithilfe der Kettenregel nach t ab.* Mit dem Ergebnis erhalten wir einen Zusammenhang zwischen dy/dt (gesucht) und $d\theta/dt$ (bekannt).

$$\frac{dy}{dt} = 150 \left(\sec^2 \theta \right) \frac{d\theta}{dt}$$

6 Berechnen Sie dy/dt mit den gegebenen Werten $\theta = \pi/4$ und $d\theta/dt = 0,14$.

$$\frac{dy}{dt} = 150(\sqrt{2})^2(0,14) = 42 \quad \sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

Die Steiggeschwindigkeit des Ballons ist im betrachteten Moment 42 m/min. ■

Abstand zwischen sich
verfolgenden Autos

Beispiel 3.31 Ein Streifenwagen der Polizei verfolgt ein davonjagendes Auto und nähert sich von Norden einer rechtwinkligen Kreuzung. Das verfolgte Auto ist in der Kreuzung abgebogen und bewegt sich nun genau nach Osten. Als der Streifenwagen 1 km nördlich der Kreuzung und das Auto 1,3 km östlich der Kreuzung ist, stellt die Polizei mit Radar fest, dass der Abstand zwischen beiden Autos um 32 km/h zunimmt. Der Streifenwagen fährt in diesem Moment 100 km/h. Wie groß ist die Geschwindigkeit des verfolgten Autos?

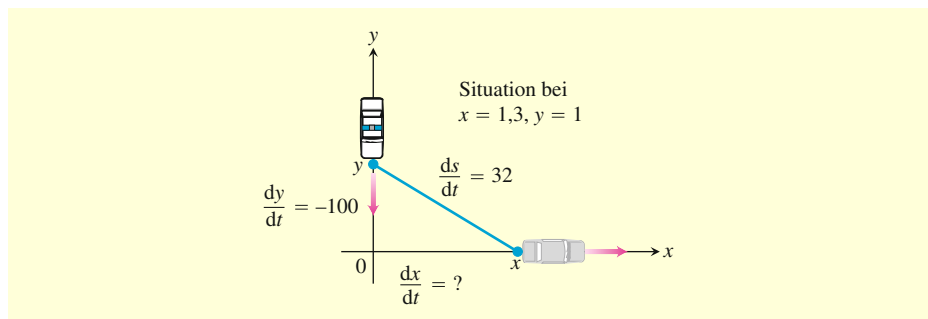


Abbildung 3.26 Die Geschwindigkeit des Autos ist verknüpft mit der Geschwindigkeit des Streifenwagens und mit der Änderung des Abstands zwischen beiden (Beispiel 3.31).

Lösung Wir zeichnen Auto und Streifenwagen in ein Koordinatensystem, dabei ist die positive x -Achse die Straße nach Osten und die positive y -Achse die Straße nach Norden (►Abbildung 3.26). Mit t für die Zeit legen wir die Variablen fest:

- x : Position des Autos zur Zeit t ,
- y : Position des Streifenwagens zur Zeit t ,
- s : Abstand zwischen Auto und Streifenwagen zur Zeit t .

Wir nehmen an, dass x , y und s differenzierbare Funktionen von t sind.

Wir suchen dx/dt , wenn gilt:

$$x = 1,3 \text{ km}, \quad y = 1 \text{ km}, \quad \frac{dy}{dt} = -100 \text{ km/h}, \quad \frac{ds}{dt} = 32 \text{ km/h}.$$

dy/dt ist negativ, weil y kleiner wird. Wir differenzieren die Gleichung für den Abstand

$$s^2 = x^2 + y^2$$

(wir könnten auch von der Gleichung $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ ausgehen) und erhalten:

$$\begin{aligned} 2s \frac{ds}{dt} &= 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{s} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right). \end{aligned}$$

Wir setzen $x = 1,3$, $y = 1$, $dy/dt = -100$, $ds/dt = 32$ ein und lösen nach dx/dt auf.

$$32 = \frac{1}{\sqrt{(1,3)^2 + (1)^2}} \left(1,3 \frac{dx}{dt} + (1)(-100) \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{32\sqrt{(1,3)^2 + (1)^2} + (1)(100)}{1,3} = 117,3$$

Im betrachteten Moment beträgt die Geschwindigkeit des Autos 117,3 km/h. ■

Aufgaben zum Abschnitt 3.8

1. Flächeninhalt eines Kreises Der Radius r und der Flächeninhalt $A = \pi r^2$ seien differenzierbare Funktionen von t . Stellen Sie eine Gleichung für den Zusammenhang zwischen dA/dt und dr/dt auf.

2. Gegeben sind $y = 5x$ und $dx/dt = 2$. Bestimmen Sie dy/dt .

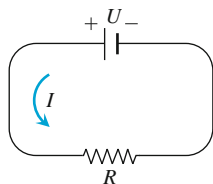
3. Es gilt $y = x^2$ und $dx/dt = 3$. Welchen Wert nimmt dann dy/dt für $x = -1$ an?

4. Es gilt $x^2 + y^2 = 25$ und $dx/dt = -2$. Welchen Wert nimmt dann dy/dt für $x = 3$ und $y = -4$ an?

5. Ein Würfel hat ursprünglich eine Kantenlänge x von 24 m. x soll um 5 m/min abnehmen. Wie schnell ändert sich bei $x = 3$ m dann

- die Oberfläche
- das Volumen des Würfels?

6. Sich ändernde elektrische Spannung Die Spannung U (in Volt), der Strom I (in Ampere) und der Widerstand R (in Ohm) eines elektrischen Schaltkreises wie unten dargestellt sind verknüpft durch die Gleichung $U = IR$. Wir nehmen an, dass U mit 1 V/s zunimmt, während I um 1/3 A/s abnimmt. t sei die Zeit in Sekunden.



- Was ist der Wert von dU/dt ?
- Was ist der Wert von dI/dt ?
- Welche Gleichung verknüpft dR/dt mit dU/dt und dI/dt ?
- Bestimmen Sie die Änderungsrate von R für $U = 12$ V und $I = 2$ A. Nimmt R zu oder ab?

7. Größenänderungen an einem Rechteck Die Länge l eines Rechtecks nimmt mit 2 cm/s ab, während

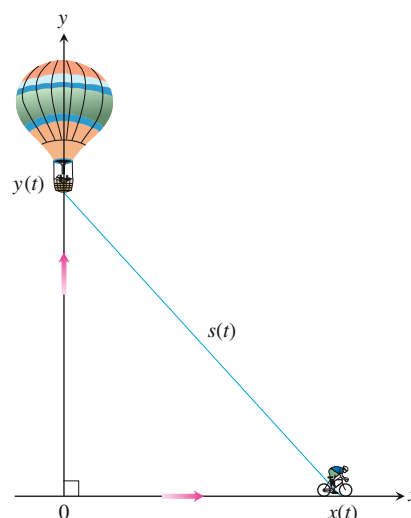
die Breite w um 2 cm/s zunimmt. Es sei $l = 12$ cm und $w = 5$ cm. Bestimmen Sie die Änderungsraten

- des Flächeninhalts,
- des Umfangs
- der Länge der Diagonalen des Rechtecks.

Welche dieser Größen nehmen zu, welche ab?

8. Der Radius eines Ballons beim Füllen Ein kugelförmiger Ballon wird mit 3π m³/min Helium gefüllt. Wie schnell nimmt der Radius des Ballons in dem Moment zu, in dem er 2 m beträgt? Wie schnell nimmt die Oberfläche zu?

9. Ein Ballon und ein Fahrrad Ein Ballon steigt vom Bodenniveau aus senkrecht mit einer konstanten Geschwindigkeit von 0,3 m/s in die Höhe. Genau in dem Moment, in dem der Ballon 20 m über dem Boden ist, fährt ein Fahrrad auf einer schnurgeraden Straße mit einer konstanten Geschwindigkeit von 5 m/s unter ihm entlang. Wie schnell nimmt der Abstand $s(t)$ zwischen Fahrrad und Ballon 3 s später zu?



3.9 Linearisierung und Differentiale

Manchmal können wir komplizierte Funktionen durch einfachere annähern, die für bestimmte Anwendungen ausreichend genau sind und mit denen sich leichter arbeiten lässt. Die Näherungsfunktionen, die wir in diesem Abschnitt besprechen, heißen **Linearisierungen** und basieren auf Tangenten.

Wir führen neue Variablen dx und dy ein, die **Differentiale** genannt werden und mit denen eine Ableitung in der Leibniz-Schreibweise (dx/dy) zu einem echten Bruch wird. Wie verwenden dy auch, um einen Messfehler abzuschätzen; daraus können wir dann einen exakten Beweis der Kettenregel herleiten (Abschnitt 3.6).

Linearisierung

In Abbildung 3.27 kann man sehen, dass eine Tangente der Kurve $y = x^2$ in der Nähe des Berührungspunkts sehr nah an der Kurve liegt. In einem kleinen Intervall auf beiden Seiten des Punkts sind die y -Werte der Tangente eine gute Näherung für die y -Werte der Kurve. Wir untersuchen dies genauer, indem wir kleinere Ausschnitte der beiden Graphen (Kurve und Tangente) betrachten oder indem wir Wertetabellen aufstellen, die den Unterschied zwischen $f(x)$ und der Tangente in der Nähe der x -Koordinate des Berührungspunkts auflisten. Dies gilt nicht nur bei Parabeln, jede differenzierbare Funktion verhält sich in einem kleinen Intervall wie ihre Tangente.

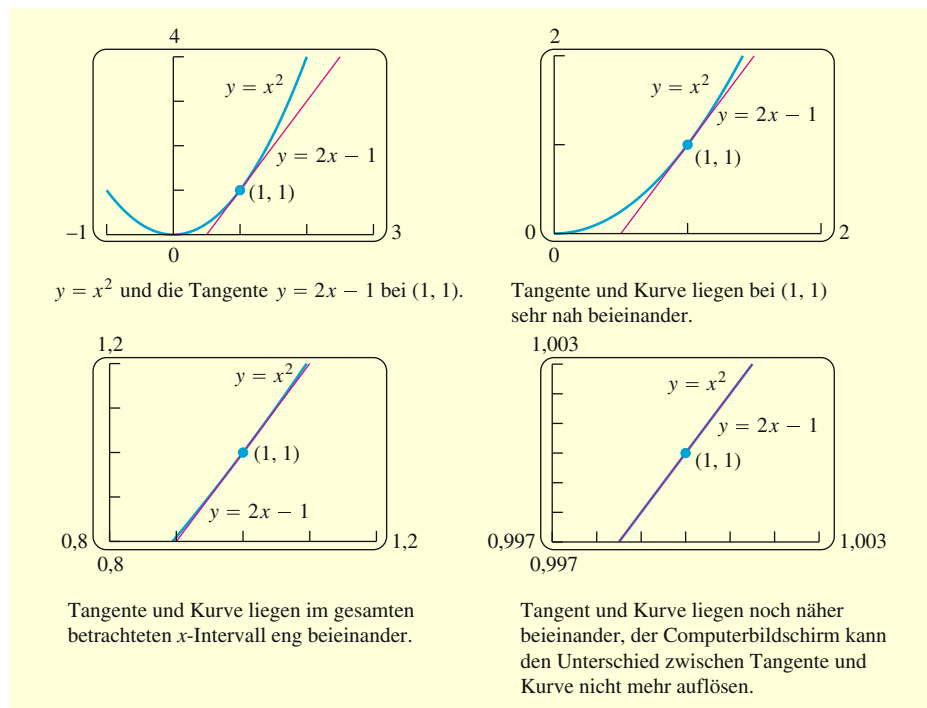


Abbildung 3.27 Je mehr wir den Graph einer Funktion in der Nähe einer Stelle vergrößern, in dem die Funktion differenzierbar ist, desto „gerader“ wird der Graph und desto mehr ähnelt er der Tangente.

Allgemein gilt: Die Tangente $y = f(x)$ an der Stelle $x = a$, an der f differenzierbar ist (►Abbildung 3.28 auf der nächsten Seite), geht durch den Punkt $(a, f(a))$, und die Punkt-Steigungsform ihrer Gleichung ist

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

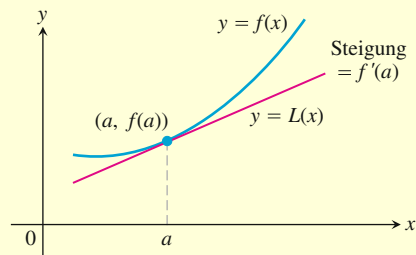


Abbildung 3.28 Die Tangente der Kurve $y = f(x)$ an der Stelle $x = a$ ist die Gerade $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Diese Tangente ist der Graph der linearen Funktion

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

In dem Intervall, in dem diese Gerade nahe an dem Graphen von f bleibt, ist $L(x)$ eine gute Näherung von $f(x)$.

Wenn f bei $x = a$ differenzierbar ist, dann ist die Näherungsfunktion

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

die **Linearisierung** von f bei a . Die Näherung

$$f(x) \approx L(x)$$

von f durch L ist die **lineare Näherung** von f bei a . Die Stelle $x = a$ ist das **Zentrum** der Näherung.

Definition

Beispiel 3.32 Bestimmen Sie die Linearisierung von $f(x) = \sqrt{1+x}$ bei $x = 0$ (► Abbildung 3.29).

Linearisierung einer Wurzelfunktion

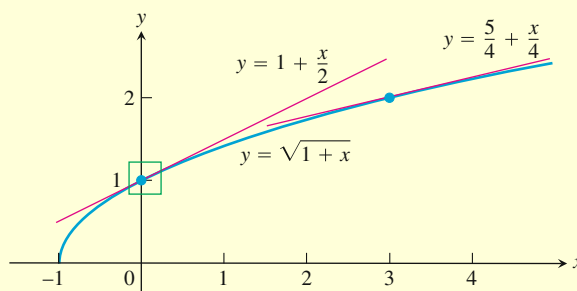


Abbildung 3.29 Der Graph von $y = \sqrt{1+x}$ und seine Linearisierungen an den Stellen $x = 0$ und $x = 3$. Abbildung 3.30 auf der nächsten Seite vergrößert einen kleinen Ausschnitt um den Wert 1 auf der y-Achse.

Lösung Wegen

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$$

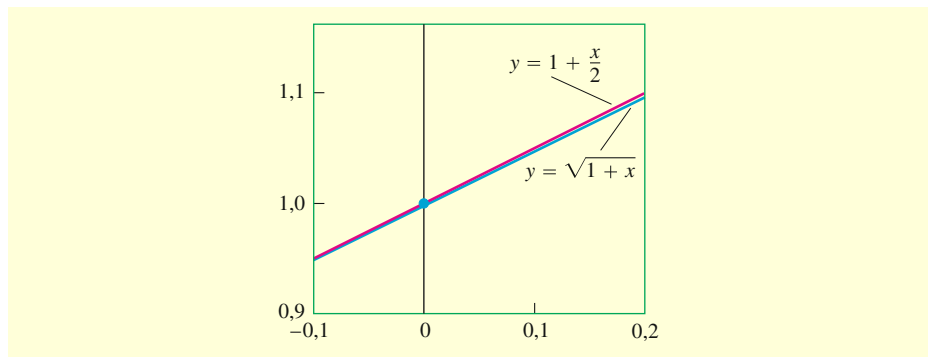


Abbildung 3.30 Vergrößerter Ausschnitt des Graphen aus Abbildung 3.29 auf der vorherigen Seite.

folgt $f(0) = 1$ und $f'(0) = 1/2$ und damit die Linearisierung

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}(x - 0) = 1 + \frac{x}{2}$$

(► Abbildung 3.30).

Die nachfolgende Tabelle zeigt, wie genau die Näherung $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ aus Beispiel 3.32 für einige Werte von x bei 0 ist. Je weiter wir uns von null entfernen, desto ungenauer werden die Werte. So ergibt die Linearisierung für $x = 2$ als Näherung für $\sqrt{3}$ den Wert 2, was noch nicht einmal in der ersten Dezimalstelle übereinstimmt.

Näherung	Exakter Wert	Exakter Wert – Näherung
$\sqrt{1,2} \approx 1 + \frac{0,2}{2} = 1,10$	1,095445	$< 10^{-2}$
$\sqrt{1,05} \approx 1 + \frac{0,05}{2} = 1,025$	1,024695	$< 10^{-3}$
$\sqrt{1,005} \approx 1 + \frac{0,005}{2} = 1,00250$	1,002497	$< 10^{-5}$

Aus diesen Rechnungen könnte man schlussfolgern, dass Linearisierungen umständlich und ungenau sein können und man die Werte besser mit einem Taschenrechner bestimmt. Damit hätte man aber der Sinn der linearen Näherung nicht erkannt. Natürlich würde man in der Praxis niemals eine lineare Näherung benutzen, um eine bestimmte Quadratwurzel zu bestimmen. Linearisierungen sind dann nützlich, wenn man einen komplizierten Ausdruck in einem ganzen Intervall von Werten durch einen einfacheren ersetzen kann. Wenn wir also für den Bereich nahe bei 0 mit dem Ausdruck $\sqrt{1+x}$ arbeiten müssen und wenn wir kleine Abweichungen tolerieren können, so können wir stattdessen mit $1 + (x/2)$ arbeiten. Natürlich müssen wir dabei wissen, wie groß der Fehler ist.

Eine lineare Näherung wird normalerweise ungenauer, wenn man sich vom Zentrum der Näherung entfernt. Wie man in Abbildung 3.29 auf der vorherigen Seite sieht, wird die Näherung $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ in der Nähe von $x = 3$ wohl zu ungenau für einen sinnvollen Einsatz sein. Hierfür bräuchten wir die Linearisierung bei $x = 3$.

Linearisierung einer Wurzelfunktion (2)

Beispiel 3.33 Bestimmen Sie die Linearisierung von $f(x) = \sqrt{1+x}$ bei $x = 3$.

Lösung Wir bestimmen die Gleichung für $L(x)$ bei $a = 3$. Mit

$$f(3) = 2, \quad \text{und} \quad f'(3) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \Big|_{x=3} = \frac{1}{4}$$

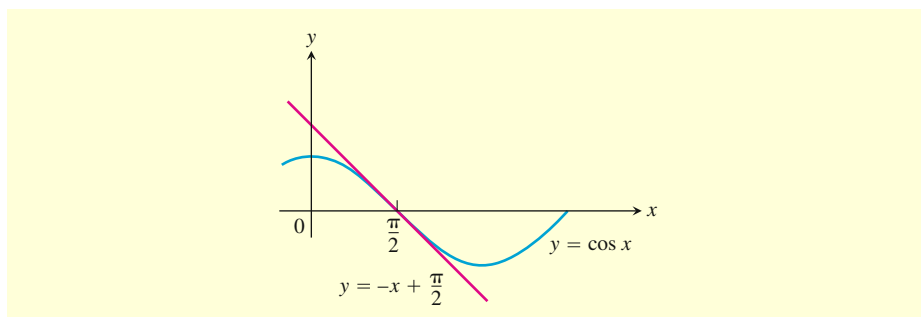


Abbildung 3.31 Der Graph von $f(x) = \cos x$ und seine Linearisierung bei $x = \pi/2$. In der Nähe von $x = \pi/2$ ist $\cos x \approx -x + (\pi/2)$ (Beispiel 3.34).

erhalten wir

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}.$$

Für $x = 3,2$ ergibt die Linearisierung aus Beispiel 3.33

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3,2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3,2}{4} = 1,250 + 0,800 = 2,050,$$

die von dem exakten Wert $\sqrt{4,2} \approx 2,04939$ um weniger als ein Tausendstel abweicht.

Die Linearisierung aus Beispiel 3.32 würde zu

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3,2} \approx 1 + \frac{3,2}{2} = 1 + 1,6 = 2,6$$

führen, dieses Ergebnis weicht vom exakten Wert um mehr als 25 % ab. ■

Beispiel 3.34 Bestimmen Sie die Linearisierung von $f(x) = \cos x$ bei $x = \pi/2$ (► Abbildung 3.31).

Linearisierung der Kosinusfunktion

Lösung Mit $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, $f'(x) = -\sin x$ und $f'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$ erhalten wir für die Linearisierung bei $a = \pi/2$:

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) \\ &= 0 + (-1) \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -x + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

■

Eine wichtige lineare Näherung für Wurzeln und Potenzen ist

$$(1+x)^k \approx 1+kx \quad (x \text{ nahe bei } 0, \text{ beliebige Werte für } k).$$

Die Näherung, die für genügend nahe bei 0 liegende Werte von x gilt, hat viele Anwendungen. So gilt z. B. für kleine x :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &\approx 1 + \frac{1}{2}x & k = 1/2 \\ \frac{1}{1-x} &= (1-x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1+x & k = -1; \text{ ersetze } x \text{ durch } -x. \\ \sqrt[3]{1+5x^4} &= (1+5x^4)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}(5x^4) = 1 + \frac{5}{3}x^4 & k = 1/3; \text{ ersetze } x \text{ durch } 5x^4. \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-1/2} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 & k = -1/2; \text{ ersetze } x \text{ durch } -x^2. \end{aligned}$$

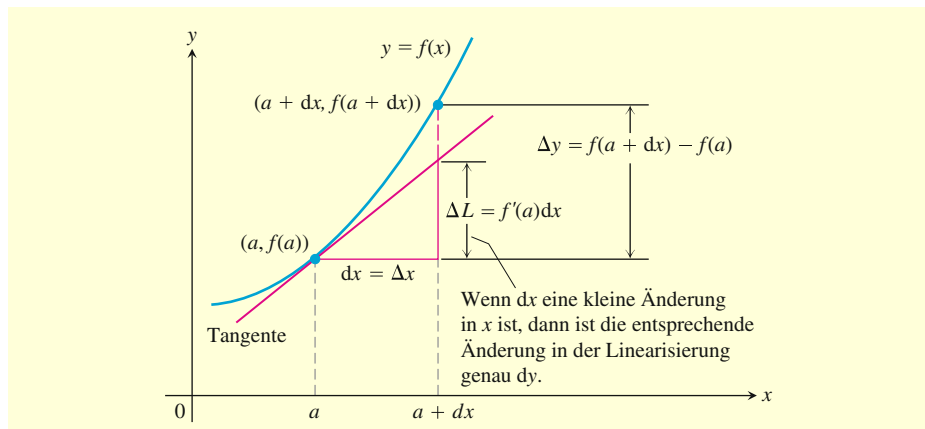


Abbildung 3.32

Geometrisch betrachtet entspricht das Differential dy der Änderung ΔL der Linearisierung von f , wenn $x = a$ sich um $dx = \Delta x$ ändert.

Differentiale

Wir haben schon einige Male die Leibniz-Schreibweise dy/dx verwendet, um die Ableitung von y nach x darzustellen. Auch wenn es so aussieht, ist dies kein Quotient. Wir führen nun die beiden neuen Variablen dx und dy ein, für die gilt: Wenn ihr Quotient existiert, dann ist er gleich der Ableitung.

Definition

Es sei $y = f(x)$ eine differenzierbare Funktion. Das **Differential dx** ist eine unabhängige Variable. Das **Differential dy** ist

$$dy = f'(x)dx.$$

Im Gegensatz zu der unabhängigen Variablen dx ist dy also immer eine abhängige Variable. Sie hängt sowohl von x als auch von dx ab. Wenn dx ein spezieller Wert zugeordnet wird und x eine bestimmte Zahl im Definitionsbereich der Funktion f ist, so ist mit diesen Werten der Zahlenwert von dy festgelegt.

Differentiale und ihr Wert

Beispiel 3.35

- a Bestimmen Sie dy für $y = x^5 + 37x$.
- b Bestimmen Sie den Wert von dy für $x = 1$ und $dx = 0,2$.

Lösung

- a $dy = (5x^4 + 37)dx$.
- b Setzen wir $x = 1$ und $dx = 0,2$ in den Ausdruck für dy ein, erhalten wir:

$$dy = (5 \cdot 1^4 + 37)0,2 = 8,4. \quad \blacksquare$$

Die geometrische Bedeutung der Differentiale wird in ►Abbildung 3.32 gezeigt. Es sei $x = a$ und $dx = \Delta x$. Die entsprechende Änderung von $y = f(x)$ ist

$$\Delta y = f(a + dx) - f(a).$$

Copyright

Daten, Texte, Design und Grafiken dieses eBooks, sowie die eventuell angebotenen eBook-Zusatzdaten sind urheberrechtlich geschützt. Dieses eBook stellen wir lediglich als **persönliche Einzelplatz-Lizenz** zur Verfügung!

Jede andere Verwendung dieses eBooks oder zugehöriger Materialien und Informationen, einschließlich

- der Reproduktion,
- der Weitergabe,
- des Weitervertriebs,
- der Platzierung im Internet, in Intranets, in Extranets,
- der Veränderung,
- des Weiterverkaufs und
- der Veröffentlichung

bedarf der **schriftlichen Genehmigung** des Verlags. Insbesondere ist die Entfernung oder Änderung des vom Verlag vergebenen Passwortschutzes ausdrücklich untersagt!

Bei Fragen zu diesem Thema wenden Sie sich bitte an: info@pearson.de

Zusatzdaten

Möglicherweise liegt dem gedruckten Buch eine CD-ROM mit Zusatzdaten bei. Die Zurverfügungstellung dieser Daten auf unseren Websites ist eine freiwillige Leistung des Verlags. **Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.**

Hinweis

Dieses und viele weitere eBooks können Sie rund um die Uhr und legal auf unserer Website herunterladen:

<http://ebooks.pearson.de>