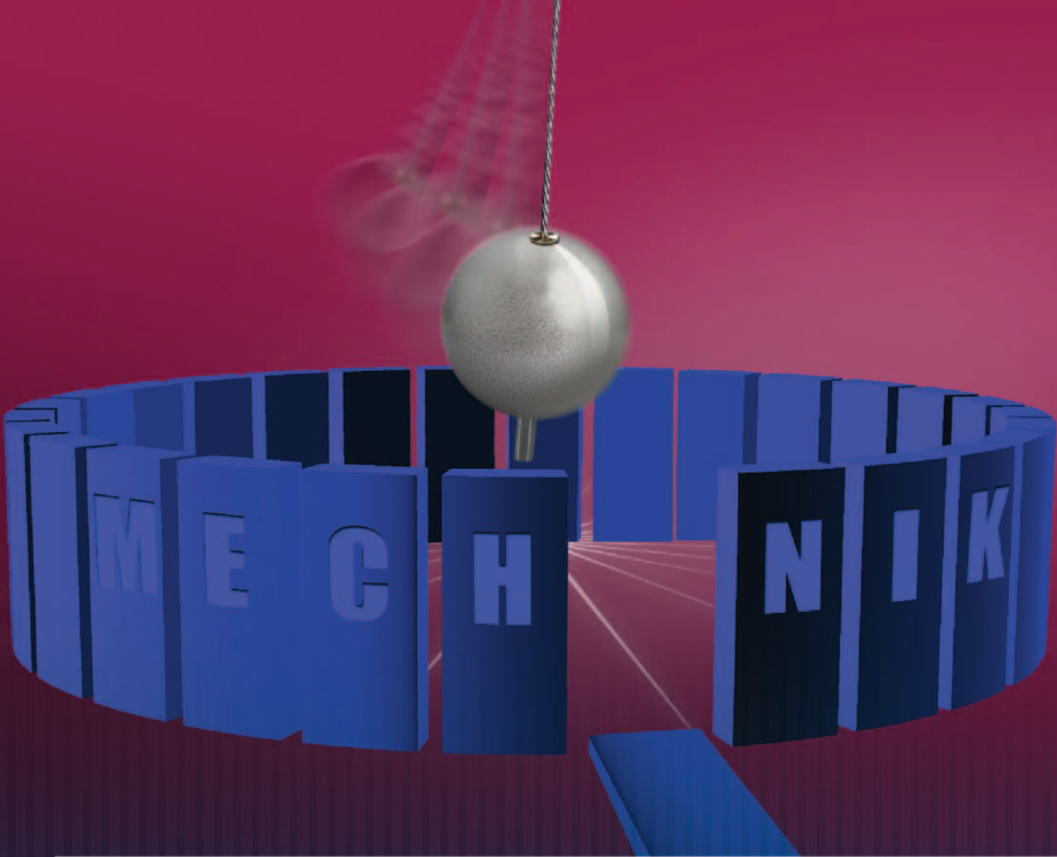

Klassische Mechanik

Ein Lehr- und Übungsbuch

John R. Taylor

EXTRAS ONLINE

ALWAYS LEARNING

PEARSON

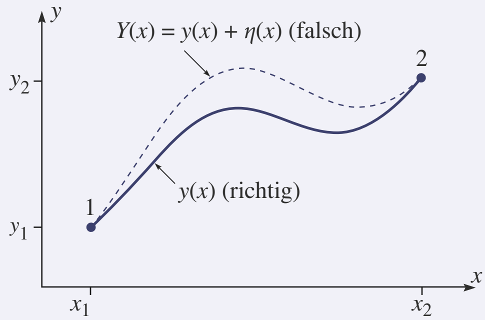

Abbildung 6.3: Der Weg $y = y(x)$ zwischen den Punkten 1 und 2 ist der „richtige" Weg, für den das Integral S aus Gleichung (6.4) minimal wird. Jeder andere Weg $Y(x)$ ist „falsch" in dem Sinne, dass er zu einem größeren Wert von S führt.

verlaufen muss, erfüllt $Y(x)$ die Gleichungen $Y(x_1) = y(x_1)$ und $Y(x_2) = y(x_2)$; also gilt

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0\,. \tag{6.7}$$

Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, die Abweichung $\eta(x)$ zu wählen; eine mögliche Wahl wäre beispielsweise $\eta = (x - x_1)(x_2 - x)$ oder $\eta(x) = \sin[\pi(x - x_1)/(x_2 - x_1)]$.

Das Integral S über den falschen Weg $Y(x)$ muss größer sein, als wenn man es über den richtigen Weg $y(x)$ berechnet, ganz gleich, wie sehr sich $Y(x)$ dem richtigen Weg annähert. Um diese Bedingung auszudrücken, führe ich einen Parameter α ein und definiere $Y(x)$ neu als

$$Y(x) = y(x) + \alpha\eta(x)\,. \tag{6.8}$$

Das Integral S über den Weg $Y(x)$ hängt nun von dem Parameter α ab; ich nenne es daher $S(\alpha)$. Den richtigen Weg $y(x)$ erhält man aus (6.8), indem man $\alpha = 0$ setzt. Daher folgt aus der Bedingung, dass S für den richtigen Weg $y(x)$ minimal wird, dass $S(\alpha)$ für $\alpha = 0$ minimal ist. Mit diesem Ergebnis haben wir unser Problem auf die traditionelle Aufgabe aus der elementaren Analysis zurückgeführt, bei der eine gewöhnliche Funktion [nämlich $S(\alpha)$] ein Minimum an einem genau angegebenen Punkt ($\alpha = 0$) hat. Um das sicherzustellen, müssen wir nur überprüfen, ob $\mathrm{d}S/\mathrm{d}\alpha$ für $\alpha = 0$ null wird.

Wenn wir unser Integral $S(\alpha)$ ausführlich aufschreiben, sieht es folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \int_{x_1}^{x_2} f(Y, Y', x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x)\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Beim Ableiten von (6.9) nach α ist zu beachten, dass α in der Funktion f auftaucht; wir müssen also $\partial f/\partial\alpha$ berechnen. Da α in zwei Argumenten von f erscheint, erhalten wir zwei Terme, nämlich (nach der Kettenregel)

$$\frac{\partial f(y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta', x)}{\partial\alpha} = \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y'}\,.$$

Für $\mathrm{d}S/\mathrm{d}\alpha$ ergibt sich damit (der Ausdruck soll ja null sein)

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2}\left(\eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x = 0\,. \tag{6.10}$$

Diese Bedingung muss für jedes $\eta(x)$ erfüllt sein, das (6.7) genügt, also für jede Wahl eines „falschen“ Wegs $Y(x) = y(x) + \alpha\eta(x)$.

Um die Bedingung (6.10) auszunützen, müssen wir den zweiten Term auf der rechten Seite mithilfe einer partiellen Integration[1] umformen (beachten Sie, dass η' nur eine andere Schreibweise ist für $\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}x$):

$$\int_{x_1}^{x_2}\eta'(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\,\mathrm{d}x = \left[\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x\,.$$

Wegen der Bedingung (6.7) ist der erste Term auf der rechten Seite (der „Beitrag der Endpunkte“) null. Damit ist[2]

$$\int_{x_1}^{x_2}\eta'(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x\,. \tag{6.11}$$

Setzen wir diese Gleichung in (6.10) ein, so erhalten wir

$$\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x = 0\,. \tag{6.12}$$

Diese Bedingung muss für jede Wahl der Funktion $\eta(x)$ erfüllt sein. Daher muss, wie ich gleich begründen werde, der zweite Faktor im Integranden null sein:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \qquad \text{(Euler-Lagrange-Gleichung)} \tag{6.13}$$

für alle x (in dem betrachteten Intervall $x_1 \le x \le x_2$). Das ist die sogenannte **Euler-Lagrange-Gleichung** (benannt nach dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler,

1 Wenn Sie daran gewöhnt sind, die partielle Integration in der Form $\int v\,\mathrm{d}u = [uv] - \int u\,\mathrm{d}v$ zu schreiben, dann sollten Sie sich klar machen, dass es noch eine weitere Schreibweise für denselben Sachverhalt gibt: $\int u'v\,\mathrm{d}x = [uv] - \int uv'\,\mathrm{d}x$. In Worten: In dem Integral $\int u'v\,\mathrm{d}x$ können Sie den Strich vom u zum v verschieben, wenn Sie gleichzeitig das Vorzeichen ändern und den Beitrag der Integrationsgrenzen $[uv]$ hinzuaddieren.

2 Dies ist die einfache Form, in der die partielle Integration in der Physik oft vorkommt: Wenn der Beitrag der Endpunkte $[uv]$ null ist (und das ist häufig der Fall), dann können Sie durch die partielle Integration die Ableitung von u nach v verschieben, wenn Sie dabei das Vorzeichen ändern, d. h. $\int u'v\,\mathrm{d}x = -\int uv'\,\mathrm{d}x$.

1707–1783, und dem aus Italien stammenden französischen Physiker und Mathematiker Joseph Louis Lagrange, 1736–1813). Mithilfe dieser Gleichung lässt sich der Weg finden, für den das Integral S stationär ist. Bevor ich das anhand von Beispielen illustriere, muss ich noch den Schritt von (6.12) nach (6.13) begründen, der ja alles andere als offensichtlich ist.

Gleichung (6.12) hat die Form $\int \eta(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Ich will nicht behaupten, dass allein aus dieser Bedingung schon $g(x) = 0$ für alle x folgt; allerdings gilt (6.12) für eine *beliebige* Wahl der Funktion $\eta(x)$, und wenn $\int \eta(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für eine beliebige Funktion $\eta(x)$ gilt, dann *können* wir wirklich folgern, dass $g(x) = 0$ für alle x gilt. Um das zu beweisen, müssen wir annehmen, dass alle betrachteten Funktionen stetig sind, aber davon gehen wir als Physiker ja sowieso immer aus.[3] Um die Behauptung zu beweisen, nehmen wir das Gegenteil an, dass also $g(x)$ in einem bestimmten Intervall zwischen x_1 und x_2 nicht null ist. Dann wählen wir eine Funktion $\eta(x)$ mit demselben Vorzeichen wie $g(x)$ (d. h. η ist positiv, wo g positiv ist, und η ist negativ, wo g negativ ist). Dann ist der Integrand stetig, erfüllt die Bedingung $\eta(x)g(x) \geq 0$ und ist wenigstens in einem Intervall von null verschieden. Unter diesen Bedingungen kann $\int \eta(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ nicht null sein. Und aus diesem Widerspruch folgt, dass $g(x)$ *wirklich* null für alle x ist.

Damit ist der Beweis der Euler-Lagrange-Gleichung vollständig. Um sie anzuwenden, gehen Sie folgendermaßen vor: (1) Formulieren Sie das Problem so, dass die Größe, deren stationären Weg Sie suchen, sich als Integral in der Standardform

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x), x]\,\mathrm{d}x \tag{6.14}$$

ausdrücken lässt. Dabei ist $f[y(x), y'(x), x]$ eine Ihrem Problem angepasste Funktion. (2) Schreiben Sie dann die Euler-Lagrange-Gleichung (6.13) mithilfe der Funktion $f[y(x), y'(x), x]$ auf. (3) Lösen Sie (falls möglich) die Differenzialgleichung (6.13) für die Funktion $y(x)$, die den benötigten stationären Weg angibt. Im nächsten Abschnitt werde ich dieses Vorgehen anhand einiger Beispiele illustrieren.

6.3 Anwendungen der Euler-Lagrange-Gleichung

Wir beginnen mit dem Problem, das schon am Anfang dieses Kapitels stand, nämlich mit der Suche nach dem kürzesten Weg zwischen zwei Punkten in einer Ebene.

Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten

Beispiel 6.1 Wie wir gesehen haben, ist die Weglänge zwischen zwei Punkten 1 und 2 gegeben durch das Integral (6.2) gemäß

$$L = \int_1^2 \mathrm{d}s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Dieses Integral hat die Standardform (6.14), wobei die Funktion f gegeben ist durch

$$f(y, y', x) = (1 + y'^2)^{1/2}\,. \tag{6.15}$$

3 Das Ergebnis ist natürlich falsch, wenn man auch nichtstetige Funktionen zulässt. Wenn beispielsweise $g(x)$ an nur einem einzigen Punkt von null verschieden wäre, dann wäre $\int \eta(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ immer noch null.

Um die Euler-Lagrange-Gleichung verwenden zu können, müssen wir die beiden in ihr auftretenden partiellen Ableitungen berechnen:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{(1+y'^2)^{1/2}}\,. \tag{6.16}$$

Wegen $\partial f/\partial y = 0$ folgt aus (6.13) einfach

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0\,.$$

Mit anderen Worten: $\partial f/\partial y'$ ist eine Konstante C. Nach (6.16) folgt daraus

$$y'^2 = C^2(1+y'^2)$$

oder, nach einer kleinen Umordung, $y'^2 = \text{const.}$ Daraus wiederum folgt, dass $y'(x)$ eine Konstante ist, die wir mit m bezeichnen können. Integrieren wir die Gleichung $y'(x) = m$, finden wir $y(x) = mx + b$, also eine Geradengleichung. Damit haben wir bewiesen, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten eine Gerade ist! ■

Eine Bemerkung zu den Variablen

Bislang haben wir Probleme mit zwei Variablen betrachtet, die wir mit x und y bezeichnet haben. Dabei war immer x die unabhängige und y die abhängige Variable, die über die Gleichung $y = y(x)$ miteinander zusammenhingen. Leider sind wir – sei es aus Bequemlichkeit, sei es durch Tradition – häufig gehalten, die Variablen anders zu benennen. Beispielsweise ist bei einem einfachen eindimensionalen mechanischen Problem die unabhängige Variable die Zeit t und die abhängige Variable der Ort $x = x(t)$. Sie müssen sich also daran gewöhnen, die Euler-Lagrange-Gleichung auch mit anderen Variablen zu verwenden als mit x und y, also beispielsweise mit t und x. Im nächsten Beispiel sind die beiden Variablen zwar wieder x und y, allerdings ist hier y die unabhängige Variable, und die Rollen von x und y in den Gleichungen (6.13) und (6.14) sind genau vertauscht.

Die Brachistochrone

Beispiel 6.2 Ein berühmtes Problem der Variationsrechnung ist das folgende: Gegeben sind zwei Punkte 1 und 2, von denen der Punkt 1 höher über dem Boden liegt. Welche Form muss eine reibungsfreie Achterbahn haben, wenn ein Wagen auf ihr in der kürzestmöglichen Zeit von Punkt 1 zu Punkt 2 rollen soll? Dieses Problem wird das **Brachistochronenproblem** genannt (nach den griechischen Wörtern *brachistos* „kürzest" und *chronos* „Zeit"). Die Geometrie des Problems ist in Abbildung 6.4 skizziert; ich habe dort Punkt 1 in den Ursprung gelegt und messe y vertikal nach unten.

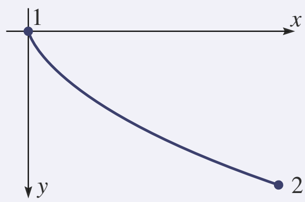

Abbildung 6.4: Beim Brachistochronenproblem ist die Form eines Achterbahngleises so zu bestimmen, dass ein Wagen, der in Punkt 1 startet, darauf in der kürzestmöglichen Zeit zu Punkt 2 gelangt.

Lösung ■ Die Zeit für die Bewegung von Punkt 1 zu 2 ist

$$\text{Zeit}(1 \to 2) = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}s}{v} \,. \tag{6.17}$$

Dabei ergibt sich die Geschwindigkeit v für eine beliebige Höhe y über die Energieerhaltung gemäß $v = \sqrt{2gy}$ (Aufgabe 8). Man findet also v als eine Funktion von y. Es ist demnach sinnvoll, y als die unabhängige Variable anzusehen und die unbekannte Verbindungsstrecke als $x = x(y)$ zu schreiben. Daher ist die Entfernung $\mathrm{d}s$ zwischen zwei benachbarten Punkten auf der Verbindungsstrecke in der Form

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{x'(y)^2 + 1}\,\mathrm{d}y \tag{6.18}$$

zu schreiben; der Strich gibt hier die Ableitung nach y an, also $x'(y) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}y$. Damit ergibt sich nach (6.17) die gesuchte Zeit als

$$\text{Zeit}(1 \to 2) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_2} \frac{\sqrt{x'(y)^2 + 1}}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y \,. \tag{6.19}$$

Gleichung (6.19) gibt das Integral an, dessen Minimum wir finden wollen. Es hat die Standardform (6.14), nur dass die Rollen von x und y vertauscht sind, mit dem Integranden

$$f(x, x', y) = \frac{\sqrt{x'^2 + 1}}{\sqrt{y}} \,. \tag{6.20}$$

Um den Weg zu finden, für den die Zeit minimal ist, müssen wir die Euler-Lagrange-Gleichung (wiederum mit vertauschtem x und y) auf diese Funktion anwenden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{\partial f}{\partial x'} \,. \tag{6.21}$$

Die Funktion in (6.20) ist unabhängig von x, ihre Ableitung nach x ist also null, und (6.21) sagt uns einfach, dass $\partial f/\partial x'$ eine Konstante ist. Wir berechnen diese Ableitung (dabei quadrieren wir der besseren Handhabung wegen) und folgern:

$$\frac{x'^2}{y(1 + x'^2)} = \text{const.} = \frac{1}{2a} \,. \tag{6.22}$$

Hier habe ich (um der späteren Bequemlichkeit willen) die Konstante als $1/2a$ geschrieben. Diese Gleichung lässt sich leicht nach x' auflösen und ergibt

$$x' = \sqrt{\frac{y}{2a - y}} \,,$$

woraus folgt

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{2a - y}}\,\mathrm{d}y \,. \tag{6.23}$$

Dieses Integral lässt sich durch die höchst eigenwillig anmutende Substitution

$$y = a(1 - \cos\theta) \tag{6.24}$$

lösen, und daraus ergibt sich (Sie sollten das nachrechnen!)

$$\begin{aligned} x &= a \int (1 - \cos\theta)\, \mathrm{d}\theta \\ &= a(\theta - \sin\theta) + \text{const.} \end{aligned} \tag{6.25}$$

Die zwei Gleichungen (6.25) und (6.24) sind parametrische Gleichungen für den gewünschten Weg, in denen x und y jeweils als Funktionen des Parameters θ angegeben sind. Wir haben den Anfangspunkt 1 so gewählt, dass $x = y = 0$ ist, und daher liest man aus (6.24) ab, dass der Anfangswert von θ null ist. Daraus wiederum folgert man, dass die Integrationskonstante in (6.25) null ist. Damit ist die parametrische Gleichung für den Weg letztlich

$$x = a(\theta - \sin\theta) \qquad \text{und} \qquad y = a(1 - \cos\theta)\,. \tag{6.26}$$

Man muss die Konstante a so wählen, dass die Kurve durch den vorgegebenen Punkt 2 mit (x_2, y_2) verläuft.

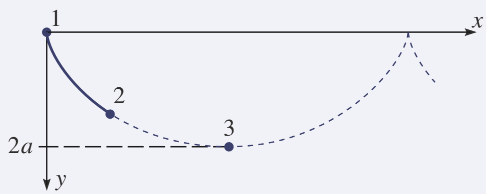

Abbildung 6.5: Die Bahn eines Achterbahnwagens, für die sich die kürzeste Zeit für den Weg zwischen den vorgegebenen Punkten 1 und 2 ergibt, ist Teil der Zykloide mit einem Scheitelpunkt in 1, die durch 2 verläuft. Die Zykloide wird von einem Punkt auf dem Rand eines Rades vom Radius a beschrieben, das mit seiner Unterseite auf der x-Achse abrollt. Der Punkt 3 ist der tiefste Punkt der Kurve.

Die Kurve (6.26) ist in Abbildung 6.5 dargestellt. Dort habe ich die Kurve über den Punkt 2 hinaus (punktiert) fortgesetzt, um zu zeigen, dass es sich bei der Lösungskurve für das Brachistochronenproblem um eine **Zykloide** handelt, eine Kurve, die von einem Punkt auf dem Rand eines sich drehenden Rades vom Radius a beschrieben wird, das auf der Unterseite der x-Achse abrollt (Aufgabe 14). Die Kurve hat noch eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft: Wenn wir den Wagen in Punkt 2 aus dem Stand starten und bis zum Tiefpunkt der Kurve rollen lassen (Punkt 3 in der Abbildung), dann ist die Zeit für die Bewegung von 2 nach 3 immer dieselbe, egal wo wir den Punkt 2 (irgendwo zwischen 1 und 3) ansetzen. Wenn also ein Wagen auf einer zykloidenförmigen Bahn hin- und herrollt, dann sind diese Schwingungen genau **isochron** (d. h., die Periodendauer hängt nicht von der Amplitude ab; die Bezeichung kommt von den griechischen Begriffen *iso* „gleich“ und *chronos* „Zeit“), im Gegensatz zu den Schwingungen eines Fadenpendels, die nur dann näherungsweise isochron sind, wenn die Amplitude gering ist (Aufgabe 25). Der Isochronismus der Zykloide wurde erstmals von Christiaan Huygens (1629–1695) beim Entwurf von mechanischen Uhren ausgenützt; die erste Uhr nach seinen Plänen mit einer Genauigkeit von etwa 10 Sekunden pro Tag wurde 1657 gebaut. ■

Maximum, Minimum und Stationarität

Sie werden vielleicht bemerkt haben, dass ich in keinem der Beispiele in diesem Abschnitt überprüft habe, ob die gefundene Kurve tatsächlich zum Minimalwert des untersuchten Integrals führt – dass also beispielsweise die gerade Linie zwischen zwei Punkten wirklich die Weglänge *minimal* macht (und nicht maximal oder einfach nur stationär). Die Euler-Lagrange-Gleichung garantiert nur, dass man durch sie einen Weg findet, für den das Ausgangsintegral stationär ist. Zu entscheiden, ob ein Minimum oder ein Maximum vorliegt (oder eine stationäre Kurve, für beides nicht zutrifft), ist im Allgemeinen sehr schwierig. Es gibt nur einige wenige Fälle, in denen man das leicht erkennen kann. Beispielsweise ist es offensichtlich, dass eine gerade Linie zwischen zwei Punkten den *minimalen* Abstand zwischen zwei Punkten angibt. Im Fall der Brachistochrone ist es aber keineswegs offensichtlich, dass der gefundene Weg die minimale Zeit garantiert, obwohl es tatsächlich so ist.

Um die Vielfalt der Möglichkeiten zu erkennen, versuchen Sie einmal, den kürzesten Weg – die so genannte **Geodäte** – zwischen zwei Punkten 1 und 2 auf der kugelförmigen Erdoberfläche zu finden. Wie Sie sicherlich wissen, ist das der **Großkreis** durch die beiden Punkte.[4] Mit der Variationsrechnung lässt sich relativ leicht beweisen, dass ein Großkreis tatsächlich den Abstand zwischen den Punkten stationär macht: In sphärischen Polarkoordinaten lässt sich jeder Punkt auf der Erdoberfläche durch die beiden Winkel θ und φ angeben. Wenn Sie den Weg als $\varphi = \varphi(\theta)$ schreiben und das Integral bestimmen, das den Abstand entlang des Weges zwischen den Punkten 1 und 2 berechnet, lässt sich zeigen, dass nach der Euler-Lagrange-Gleichung für $\varphi(\theta)$ der Weg ein Großkreis sein muss. (Details dazu werden in Aufgabe 16 angegeben.) Aber Sie müssen sorgfältig überlegen, um zu entscheiden, ob sich wirklich der *minimale* Abstand ergibt: Es gibt nämlich *zwei verschiedene* Großkreise, die die Punkte 1 und 2 auf der Kugel verbinden. Der Einfachheit halber betrachten wir zwei Städte am Äquator, nämlich Quito in Ecuador (an der Pazifikküste) und das brasilianische Macapá (an der Mündung des Amazonas in den Atlantik). Der „richtige" kürzeste Weg ist natürlich der Abschnitt des Großkreises entlang des Äquators, der rund 4000 Kilometer quer durch Südamerika verläuft. Aber es gibt eine zweite Lösung, die ebenfalls die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt: Man wendet sich von Quito aus entlang des Äquators nach Westen, überquert den Pazifik, den afrikanischen Kontinent und den Atlantik und kommt etwa 36 000 km später in Macapá an. Sie vermuten vielleicht, dass dieser Weg die maximale Länge hat, aber er ist weder minimal noch maximal lang: Man kann leicht nahegelegene Wege konstruieren, die kürzer sind, aber man findet auch leicht längere Wege. Mit anderen Worten: Der zweite Weg entlang des Großkreises ist weder ein Minimum noch ein Maximum. Damit ist dieser zweite Weg vergleichbar mit einem Punkt mit horizontaler Tangente in der gewöhnlichen Analysis. In diesem Fall ist es natürlich offensichtlich, dass der erste Weg tatsächlich die minimale Länge hat. Es sollte Ihnen aber bewusst sein, dass es im allgemeinen Fall recht knifflig sein kann zu entscheiden, von welcher Art der stationäre Weg ist, der sich aus der Euler-Lagrange-Gleichung ergibt.

Zum Glück ist diese Frage für unsere Zwecke irrelevant. Wir werden sehen, dass es für die Anwendungen in der Mechanik nur darauf ankommt, einen Weg zu finden, der ein bestimmtes Integral *stationär* macht. Es spielt schlicht keine Rolle, ob sich dabei ein Minimum, ein Maximum oder keines von beiden ergibt.

4 Ein Großkreis ist der größtmögliche Kreis auf einer Kugeloberfläche. Er ergibt sich, wenn man die Kugel in einer Ebene durch den Kugelmittelpunkt schneidet.

6.4 Mehr als zwei Variable

Bislang haben wir nur Probleme mit lediglich zwei Variablen betrachtet, nämlich mit einer unabhängigen Variable (normalerweise x) und einer abhängigen Variable (normalerweise y). Bei den meisten Anwendungen in der Mechanik gibt es jedoch mehrere abhängige Variable, allerdings glücklicherweise nur eine unabhängige Variable, normalerweise die Zeit t. Zu einem einfachen Beispiel für ein Problem mit zwei abhängigen Variablen gelangen wir, wenn wir noch einmal den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten betrachten. Als wir nach dem kürzesten Weg zwischen den Punkten 1 und 2 suchten, waren wir davon ausgegangen, dass sich der Weg in der Form $y = y(x)$ schreiben lässt. Das erscheint zwar ganz vernünftig, aber es gibt ja auch Wege, die sich nicht in dieser Form schreiben lassen, etwa die Spirale in Abbildung 6.6. Wenn wir ganz sichergehen wollen, dass wir den kürzesten unter allen möglichen Wegen finden, müssen wir ein Verfahren anwenden, das auch solche Wege einschließt. Dazu schreiben wir den Weg in parametrischer Form als

$$x = x(u) \quad \text{und} \quad y = y(u)\,. \tag{6.27}$$

Dabei ist u eine passend gewählte Variable, mit der sich die Kurve bequem parametrisieren lässt (beispielsweise die Kurvenlänge entlang des Wegs). Die parametrische Form (6.27) schließt alle bislang betrachteten Wege ein. [Für $y = y(x)$ verwenden Sie einfach x als Parameter u.] Diese Form schließt aber auch Kurven der Art von Abbildung 6.6 und tatsächlich alle in Frage kommenden Kurven ein.[5]

Die Länge eines kleinen Abschnitts des Weges (6.27) ist

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\,\mathrm{d}u\,, \tag{6.28}$$

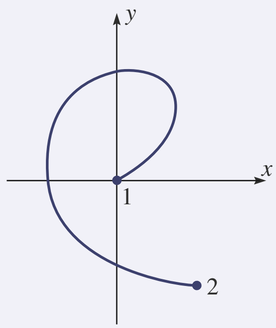

Abbildung 6.6: Dieser Weg zwischen den beiden Punkten 1 und 2 lässt sich nicht in der Form $y = y(x)$, aber auch nicht in der Form $x = x(y)$ schreiben. Man kann ihn aber sehr wohl in der parametrischen Form (6.27) darstellen.

5 Falls Sie sich für mathematische Feinheiten interessieren, sollte ich hinzufügen, dass ich im Folgenden annehmen werde, dass alle betrachteten Funktionen stetig sind und eine stetige zweite Ableitung haben. Diese Annahme könnte aber beispielsweise dadurch ein wenig abgeschwächt werden, dass einige Unstetigkeitsstellen in den Ableitungen zulässig sind.

wobei der Strich wie üblich die Ableitung nach dem Argument der Funktion bezeichnet, also $x'(u) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}u$ und $y'(u) = \mathrm{d}y/\mathrm{d}u$. Die Gesamtlänge des Wegs ist demnach

$$L = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\,\mathrm{d}u\,; \tag{6.29}$$

es ist nun unsere Aufgabe, die beiden Funktionen $x(u)$ und $y(u)$ zu finden, für die das Integral minimal wird.

Diese Aufgabe ist komplizierter als alle bisher behandelten Probleme, weil es nun *zwei* unbekannte Funktionen $x(u)$ und $y(u)$ gibt. Ein solches Problem lässt sich allgemein so formulieren: Gegeben ist ein Integral der Form

$$S = \int_{u_1}^{u_2} f[x(u), y(u), x'(u), y'(u), u]\,\mathrm{d}u \tag{6.30}$$

zwischen zwei festen Punkten $[x(u_1), y(u_1)]$ und $[x(u_2), y(u_2)]$. Zu bestimmen ist der Weg $[x(u), y(u)]$, für den das Integral S stationär wird. Die Lösung dieses Problems ähnelt stark der Lösung des Falls mit einer Variablen, sodass ich sie hier nur skizziere und es Ihnen überlasse, die Lücken zu ergänzen. Es läuft darauf hinaus, dass wir bei zwei abhängigen Variablen auch zwei Euler-Lagrange-Gleichungen erhalten. Der Beweis läuft genauso wie zuvor: Der richtige Weg soll gegeben sein durch

$$x = x(u) \quad \text{und} \quad y = y(u)\,. \tag{6.31}$$

Dann betrachten wir einen benachbarten „falschen“ Weg der Form

$$x = x(u) + \alpha\xi(u) \quad \text{und} \quad y = y(u) + \beta\eta(u) \tag{6.32}$$

(das ξ ist der griechische Buchstabe „xi“). Die Forderung, das Integral S für den richtigen Weg (6.31) solle stationär sein, ist äquivalent zu der Forderung, dass das Integral $S(\alpha, \beta)$, genommen über den falschen Weg (6.32), den Gleichungen

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \tag{6.33}$$

mit $\alpha = \beta = 0$ genügt. Diese beiden Bedingungen sind die natürlichen Verallgemeinerungen der Bedingung (6.10) für den Fall mit einer Variablen. In einem Gedankengang, der völlig analog ist zu der Argumentation, die uns von (6.10) nach (6.13) geführt hat, können Sie zeigen, dass diese beiden Bedingungen zu den folgenden zwei Euler-Lagrange-Gleichungen äquivalent sind (vgl. dazu Aufgabe 26):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\partial f}{\partial x'} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\partial f}{\partial y'}\,. \tag{6.34}$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen einen Weg, für den das Integral (6.30) stationär ist, und umgekehrt: Wenn das Integral für einen bestimmten Weg stationär ist, muss dieser Weg den beiden Gleichungen genügen.

Beispiel 6.3 Nun können wir das Problem des kürzesten Weges zwischen zwei Punkten vollständig (d. h. unter Einbeziehung *aller* möglichen Wege, einschließlich eines Weges wie in Abbildung 6.6), lösen. Aus (6.29) kennen wir den Integranden f für dieses Problem:

Noch einmal der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten

$$f(x, x', y, y', u) = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,. \tag{6.35}$$

Da dieser Ausdruck sowohl von x als auch von y unabhängig ist, sind die beiden Ableitungen $\partial f/\partial x$ und $\partial f/\partial y$ auf den jeweils linken Seiten von (6.34) null. Also folgt aus den beiden Euler-Lagrange-Gleichungen, dass die beiden Ableitungen $\partial f/\partial x'$ und $\partial f/\partial y'$ konstant sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = C_1 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = C_2\,. \tag{6.36}$$

Wir dividieren die zweite Gleichung durch die erste und erkennen, dass y'/x' gerade die Ableitung $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ ist. Dann können wir folgern:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{C_2}{C_1} = m\,. \tag{6.37}$$

Der gesuchte Weg ist also eine Gerade der Form $y = mx + b$. Interessanterweise ist dieser Beweis mithilfe einer parametrischen Gleichung nicht nur besser als der ursprüngliche Beweis (besser in dem Sinne, dass er *alle* möglichen Wege einbezieht), er ist auch noch etwas einfacher als der alte. ■

Die Euler-Lagrange-Gleichung lässt sich nach dieser einfachen Methode auf eine beliebige Anzahl von abhängigen Variablen verallgemeinern, darum müssen wir das nicht im Detail durchgehen. An dieser Stelle will ich nur skizzieren, auf welche Weise die Euler-Lagrange-Gleichungen in der Lagrange'schen Formulierung der Mechanik auftauchen.

Die unabhängige Variable im Lagrange-Formalismus ist die Zeit t. Die abhängigen Variablen sind die Koordinaten, die die Lage oder die „Konfiguration" eines Systems angeben; sie werden üblicherweise mit $q_1, q_2, \ldots, q_n$ bezeichnet. Die Anzahl n der Koordinaten hängt vom jeweiligen System ab. Für ein einzelnes Teilchen, das sich ohne Nebenbedingungen in drei Dimensionen bewegen kann, gilt $n = 3$, und die drei Koordinaten q_1, q_2, q_3 können die drei kartesischen Koordinaten x, y, z sein, aber auch beispielsweise die sphärischen Polarkoordinaten r, θ, φ. Für N frei bewegliche Teilchen in drei Dimensionen gilt $n = 3N$, und die Koordinaten können die $3N$ kartesischen Koordinaten $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N$ sein. Bei einem Doppelpendel (zwei Fadenpendel, von denen das zweite am Pendelkörper des ersten befestigt ist, vgl. Abbildung 6.7) gibt es zwei Koordinaten q_1, q_2, die man beispielsweise als die beiden in der Abbildung gezeigten Winkel θ_1 und θ_2 wählen kann. Weil die Koordinaten $q_1, \ldots, q_n$ in so vielerlei Gestalt auftauchen können, nennt man sie oft **verallgemeinerte Koordinaten**. Es ist häufig hilfreich sich vorzustellen, die n verallgemeinerten Koordinaten würden einen Punkt in einem n-dimensionalen **Konfigurationsraum** angeben, dessen Punkte jeweils einen eindeutigen Zustand („Konfiguration") des Systems beschreiben.

Das Ziel bei den meisten Problemen, die mithilfe des Lagrange-Formalismus behandelt werden, besteht darin herauszufinden, wie sich die Koordinaten mit der Zeit ändern, also die n Funktionen $q_1(t), \ldots, q_n(t)$ zu bestimmen. Man kann sich das so

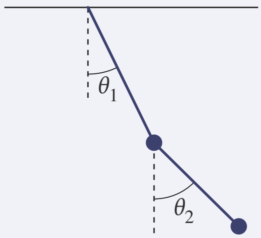

Abbildung 6.7: Eine gute Wahl für die verallgemeinerten Koordinaten bei diesem Doppelpendel sind die beiden Winkel θ_1 bzw. θ_2 zwischen dem jeweiligen Pendel und der Vertikalen.

vorstellen, dass diese n Funktionen einen Weg im n-dimensionalen Konfigurationsraum beschreiben. Dieser Weg ist natürlich durch das zweite Newton'sche Gesetz bestimmt, wir werden aber sehen, dass man ihn äquivalent auch als den Weg charakterisieren kann, für den ein bestimmtes Integral stationär ist. Er muss also die entsprechende Euler-Lagrange-Gleichung (die in diesem Zusammenhang nur als Lagrange-Gleichung bezeichnet wird) erfüllen; es wird sich zeigen, dass sich diese Lagrange-Gleichungen meist wesentlich leichter aufschreiben und anwenden lassen als das zweite Newton'sche Gesetz. Insbesondere haben die Lagrange-Gleichungen – anders als das zweite Newton'sche Gesetz – in allen Koordinatensystemen die gleiche einfache Gestalt.

Das Integral S, dessen stationärer Wert die zeitliche Entwicklung des mechanischen Systems bestimmt, heißt *Wirkungsintegral*. Sein Integrand ist die *Lagrange-Funktion* $\mathcal{L}$; diese hängt von den n Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_n$, von deren n zeitlichen Ableitungen $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ und von der Zeit t ab:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1, \cdots, q_n, \dot{q}_n, t)\,. \tag{6.38}$$

Beachten Sie, dass die unabhängige Variable die Zeit t ist; die Ableitungen der Koordinaten q_i sind zeitliche Ableitungen und werden wie üblich mit einem Punkt als $\dot{q}_i$ gekennzeichnet. Aus der Forderung, dass das Wirkungsintegral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1, \ldots, q_n, \dot{q}_n, t)\,\mathrm{d}t \tag{6.39}$$

stationär ist, folgt, dass es n Euler-Lagrange-Gleichungen gibt:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}\,, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}\,, \quad \ldots \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n}\,. \tag{6.40}$$

Diese n Gleichungen entsprechen exakt den beiden Euler-Lagrange-Gleichungen in (6.34); sie lassen sich auch genauso beweisen. Wenn diese n Gleichungen erfüllt sind, ist das Wirkungsintegral (6.39) stationär; und wenn umgekehrt das Wirkungsintegral stationär ist, sind auch diese n Gleichungen erfüllt. Im nächsten Kapitel werden Sie sehen, woher diese Gleichungen stammen und wie man sie anwendet.