Mit eLearning #besser lernen

Brückenkurs Mathematik

2., aktualisierte Auflage

Michael Ruhrländer

Pearson

Zugangscode

Falls Sie beim Kauf Ihres eBooks keinen Zugangscode erhalten haben, kontaktieren Sie uns bitte über die folgende Seite und halten Sie Ihre Rechnung/Bestellbestätigung bereit:
https://www.pearson.de/ebook-zugangscode

Definition eines lineares Gleichungssystems

Ein System von drei linearen Gleichungen in den drei Unbekannten x, y, z

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

nennt man ein **quadratisches lineares Gleichungssystem (LGS)**. Die $3 \cdot 3 = 9$ reellen Zahlen

$$a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{33}$$

heißen die **Koeffizienten des LGS**. Abkürzend schreibt man das LGS in der Form

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right].$$

Man nennt dieses Schema die **erweiterte Koeffizientenmatrix**, die aus **Zeilen** (waagerecht) und **Spalten** (senkrecht) besteht.

Als **Koeffizientenmatrix** bezeichnet man den Teil, der links vom Querstrich steht.

Ein LGS, bei dem

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0$$

gilt, heißt **homogen**, ansonsten **inhomogen**.

Die für Gleichungen gültigen Äquivalenzumformungen gelten natürlich auch für die Gleichungen in einem LGS. Insbesondere gibt es folgende Regeln.

Folgende Umformungen ändern die Lösungen eines LGS nicht

1. Die Reihenfolge der Gleichungen/Zeilen kann vertauscht werden.
2. Eine Gleichung/Zeile kann mit einer reellen Zahl $t \neq 0$ multipliziert werden.
3. Zu einer Gleichung/Zeile kann ein Vielfaches einer anderen Gleichung/Zeile addiert werden.

Gauß-Verfahren

Eine spezielle Form des Eliminationsverfahrens ist das sogenannte **Gauß-Verfahren**. Dieses basiert auf der Beobachtung, dass man Gleichungssysteme, die in **Stufenform** vorliegen, besonders leicht lösen kann. Schauen wir uns ein Beispiel an.

Learn a little
...do a little

Beispiel 3.15 **Gleichungssystem in Stufenform**

Gegeben sei folgendes lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x + y + z &= 0 \\ y + 2z &= 5 \\ z &= 3\ . \end{aligned}$$

Dieses liegt in Stufenform vor, da die letzte Gleichung nur noch eine Variable, die vorletzte zwei und die erste drei Variablen beinhalten.

Lösung Das Gleichungssystem lösen wir durch **rückwärtiges Einsetzen**, d. h. wir nehmen uns die letzte Gleichung und lesen dort den Wert für die Variable z ab:

$$z = 3\,.$$

Diesen Wert für z setzen wir in die zweitletzte Gleichung ein und ermitteln den Wert für y

$$y + 2 \cdot 3 = 5 \Rightarrow y = -1\,.$$

Schließlich nehmen wir die beiden gefundenen Werte für z und y und setzen sie in die erste Gleichung ein:

$$-x - 1 + 3 = 0 \Rightarrow -x = -2 \Rightarrow x = 2$$

und haben so durch rückwärtiges Einsetzen die eindeutige Lösung

$$(x, y, z) = (2, -1, 3)$$

des stufenförmigen Gleichungssystems gefunden. ■

Das Gauß-Verfahren liefert einen Algorithmus, wie man ein beliebiges lineares Gleichungssystem auf Stufenform bringen kann. Ist das passiert, kann man die Lösungen durch rückwärtiges Einsetzen ermitteln. Wir wollen das Verfahren zunächst an einem Beispiel erläutern.

Learn a little
...do a little

Beispiel 3.16 **Inhomogenes lineares Gleichungssystem**

Gesucht ist die Lösungsmenge des Linearen Gleichungssystems (LGS) mit den drei Gleichungen G_1, G_2 und G_3

$$\begin{aligned} G_1 &: -x + y + z = 0 \\ G_2 &: x - 3y - 2z = 5 \\ G_3 &: 5x + y + 4z = 3\ . \end{aligned}$$

Lösung Um das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform zu bringen, eliminieren wir zunächst die Variable x aus den Gleichungen G_2 und G_3. Dazu addieren wir zu G_2 die Gleichung G_1 und erhalten als modifizierte 2. Gleichung G_2^*, d. h.

$$G_2^* = G_2 + G_1\,.$$

Ausgeschrieben

$$\begin{aligned} G_1 :&\quad -x + \quad y + \quad z = \quad 0 \\ G_2^* :&\; x - x - 3y + y - 2z + z = 5 + 0 \\ G_3 :&\quad 5x + \quad y + \quad 4z = \quad 3\ . \end{aligned}$$

Ausrechnen führt zu

$$\begin{aligned} G_1 &: -x + y + z = 0 \\ G_2^* &: \quad -2y - z = 5 \\ G_3 &: \; 5x + y + 4z = 3\ , \end{aligned}$$

d. h. die Variable x ist in G_2^* nicht mehr vorhanden. Als nächstes eliminieren wir die Variable x aus G_3, indem wir das 5-Fache von G_1 zu G_3 addieren

$$G_3^* = G_3 + 5G_1,$$

d. h.

$$\begin{aligned} G_1 :&\quad -x + \quad y + \quad z = \quad 0 \\ G_2^* :&\quad -2y - \quad z = \quad 5 \\ G_3^* :&\; 5x - 5x + y + 5y + 4z + 5z = 3 + 5 \cdot 0\ , \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} G_1 &: -x + y + z = 0 \\ G_2^* &: \quad -2y - z = 5 \\ G_3^* &: \quad 6y + 9z = 3 \end{aligned}$$

resultiert. Mit diesen beiden Operationen haben wir die Variable x aus der zweiten und dritten Gleichung entfernt. Der nächste Schritt besteht darin, die Variable y aus G_3^* zu entfernen. Dazu addieren wir das 3-Fache von G_2^* zu G_3^*

$$G_3^{**} = G_3^* + 3G_2^*\,,$$

d. h.

$$\begin{aligned} G_1 :&\; -x + \quad y + \quad z = \quad 0 \\ G_2^* :&\quad -2y - \quad z = \quad 5 \\ G_3^{**} :&\quad 6y - 6y + 9z - 3z = 3 + 15\ . \end{aligned}$$

Vereinfachen führt zu

$$\begin{aligned} G_1 &: -x + y + z = 0 \\ G_2^* &: \quad -2y - z = 5 \\ G_3^{**} &: \quad 6z = 18\ . \end{aligned}$$

Damit ist der 3. Schritt des Gauß-Verfahrens abgeschlossen, wir haben nunmehr ein gestaffeltes System von Gleichungen vorliegen und können rückwärts, d. h. beginnend mit der Gleichung G_3^{**}, in der nur noch die Variable z enthalten ist, die Lösungen bestimmen. Aus G_3^{**} folgt

$$6z = 18 \Rightarrow z = 3\,.$$

Dieser Wert für z wird nun in G_2^* eingesetzt, um den Wert von y zu bestimmen:

$$-2y - 3 = 5 \Rightarrow -2y = 8 \Rightarrow y = -4\,.$$

Nun nimmt man die gefundenen Werte für z und y und setzt sie in G_1 ein:

$$-x - 4 + 3 = 0 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1\,.$$

Das 3-Tupel (x, y, z) kann man als ein Element des $\mathbb{R}^3$ auffassen, d. h. die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist

$$\mathbb{L} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z) = (-1, -4, 3)\right\}$$

und besteht nur aus einem Element. Die gefundene Lösung ist eindeutig. ■

Das Beispiel zeigt schon die wesentlichen Schritte des Gauß-Verfahrens, das in allgemeiner Form folgendermaßen lautet.

Merke

Algorithmus. Gauß-Verfahren als Spezialfall des Eliminationsverfahrens

1. Man wähle eine Gleichung mit einem Koeffizienten von x ungleich Null als erste Gleichung. d. h. die Reihenfolge der Gleichungen wird ev. verändert.
2. Dann **eliminiert** man die Variable x aus der zweiten und dritten Gleichung. Um x aus der zweiten Gleichung zu entfernen, wird das a_{21}-Fache der 1. Zeile vom a_{11}-Fachen der 2. Zeile subtrahiert. Steht zum Beispiel in der ersten Gleichung $2x$ und in der zweiten $3x$, so multipliziert man die zweite Gleichung auf beiden Seiten mit 2, dann steht als Zahl vor der Variablen x die 6. Nun multipliziert man die 1. Zeile (aber nur gedanklich!) mit 3, dann ist die (fiktive) Zahl vor der Variablen in der ersten Gleichung ebenfalls 6. Wenn man jetzt die (gedanklich) mit 6 multiplizierte erste Gleichung von der zweiten Gleichung subtrahiert, so heben sich in der zweiten Gleichung die Terme mit der Variablen x auf und die zweite Gleichung enthält diese Unbekannte nicht mehr.

   Ebenso **eliminiert** man die Variable x aus der 3. Zeile.
3. Schritt 2. wird auf das reduzierte System angewendet, indem die Unbekannte y aus der 3. Zeile **eliminiert** wird.
4. Die umgebildeten Gleichungen bilden dann ein Stufensystem, aus dem sich die Unbekannten rückwärts in der Reihenfolge z, y, x berechnen lassen.

Diese abstrakte allgemeine Vorgehensweise wollen wir an einigen weiteren Beispielen einüben. Wir werden sehen, dass das Gauß-Verfahren leicht anwendbar ist und schnell zum gewünschten Ziel führt.

Learn a little

…do a little

Beispiel 3.17 Inhomogenes lineares Gleichungssystem

Wir behandeln noch einmal das gleiche LGS wie im letzten Beispiel, wollen jetzt aber die Kurzschreibweise anwenden und einüben. In der Kurzform lautet das Gleichungssystem:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right].$$

Lösung Die Kurzform enthält die Variablen x, y, z nicht mehr und der senkrechte Strich, der die erweiterte Koeffizientenmatrix teilt, ersetzt das Gleichheitszeichen. Die erste Spalte der Koeffizientenmatrix ist die x-Spalte, d. h. die Zahlen in der ersten Spalte sind die Koeffizienten von x in den drei Gleichungen. Ähnliches gilt für die zweite und dritte Spalte. Die letzte Spalte nach dem Querstrich ist die Ergebnisspalte. Wenn man für diese Erläuterungen eine Hilfestellung braucht, so kann man die Matrix auch um eine Kopfzeile erweitern und mit dieser dann weiterrechnen:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{rrr|r} x & y & z & b_i \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \end{array}.$$

Die Manipulationen mit dem Gauß-Verfahren werden folgendermaßen aufgeschrieben:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{Z_2 + Z_1} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right].$$

Der Pfeil kennzeichnet die Umformung des linken Gleichungssystems in das rechte. Oberhalb des Pfeils kann man die Operationen, die man durchgeführt hat, notieren. Das ist insbesondere am Anfang zu empfehlen, damit man weiß, welche Umformungen vorgenommen wurden, um die rechte Seite zu erhalten. Das Symbol $Z_2 + Z_1$ bedeutet, dass man zur 2. Zeile (Z_2) die 1. Zeile (Z_1) addiert. Wenn man diese Operation ausgeführt hat, so erkennt man auf der rechten Seite, dass der Koeffizient a_{21} von x (2. Zeile, 1. Spalte) Null geworden ist, d. h. die Variable x ist aus der 2. Zeile eliminiert worden. Der nächste Schritt besteht darin, auch den Koeffizienten $a_{31} = 5$ (3. Zeile, 1. Spalte) zu Null zu machen, indem wir das 5-Fache der ersten Zeile zur dritten addieren.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{Z_3 + 5Z_1} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 9 & 3 \end{array}\right],$$

d. h. durch diese zwei Schritte haben wir erreicht, dass unterhalb der -1 in der ersten Spalte nur noch Nullen auftauchen. Nun wollen wir die Variable y aus der dritten Gleichung entfernen, d. h. wir wollen aus dem Koeffizienten $a_{32} = 6$ (3. Zeile, 2. Spalte) eine Null machen. Dazu addieren wir das 3-Fache der zweiten Zeile zur dritten.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 9 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{Z_3 + 3Z_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right].$$

Damit haben wir ein wichtiges Teilziel erreicht, wir haben die Koeffizientenmatrix auf **obere Dreiecksgestalt** gebracht, d. h. die Koeffizienten *unterhalb der* **Hauptdiagonalen** (gebildet von den Zahlen -1, -2, 6 von links oben nach rechts unten) sind alle gleich Null. Hat man dieses Ziel erreicht, geht man zur Bestimmung von x, y, z genauso wie im letzten Beispiel vor:

Die dritte Zeile Z_3 ist die Kurzform von

$$6z = 18\,,$$

woraus

$$z = 3$$

folgt. Dieser Wert für z wird nun in Z_2 eingesetzt, um den Wert von y zu bestimmen:

$$-2y - 3 = 5 \Rightarrow -2y = 8 \Rightarrow y = -4\,.$$

Nun nimmt man die gefundenen Werte für z und y und setzt sie in Z_1 ein:

$$-x - 4 + 3 = 0 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1\,.$$

■

Im letzten Beispiel bestand die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems aus einem Element, d. h. es gab genau eine Lösung. Das muss aber nicht immer der Fall sein, wie das folgende Beispiel, das wir in der Kurzform ausrechnen, zeigt.

Learn a little

…do a little

Beispiel 3.18 Inhomogenes lineares Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen

Gesucht ist die Lösungsmenge des LGS

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & 14 \end{array}\right].$$

Lösung Zunächst formen wir die erweiterte Koeffizientenmatrix mit dem Gauß-Verfahren so um, dass unterhalb der 1 in der ersten Spalte nur Nullen stehen. Dazu addieren wir das 2-Fache der 1. Zeile zur 2. Zeile und subtrahieren die 1. Zeile von der 3. Zeile

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow[Z_3 - Z_1]{Z_2 + 2Z_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & 10 \\ 0 & -5 & 7 & 10 \end{array}\right],$$

d. h. wir haben zwei Rechenschritte gleichzeitig durchgeführt. Als nächstes eliminieren wir die Variable y aus der dritten Gleichung, indem wir von der dritten Zeile die zweite Zeile subtrahieren

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & 10 \\ 0 & -5 & 7 & 10 \end{array}\right] \overset{Z_3 - Z_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Wir stellen fest, dass die dritte Zeile/Gleichung aus lauter Nullen besteht. Wenn wir das rückwärtige Einsetzen auf die letzte Zeile anwenden, so erhalten wir die Gleichung

$$0 \cdot z = 0\,.$$

Diese Gleichung ist immer erfüllt, egal welchen Wert für z wir einsetzen. Wir bezeichnen den beliebig wählbaren Wert von z mit t, d. h. wir setzen $z = t$, wobei t irgendeine reelle Zahl sein kann. Mit $z = t$ setzen wir das rückwärtige Einsetzen fort und betrachten die vorletzte Gleichung

$$-5y + 7t = 10 \Rightarrow y = -2 + \frac{7}{5}\,t\,.$$

Auch die Variable y ist unbestimmt, da t jeden beliebigen Wert annehmen kann. Nun setzten wir die für z und y gefundenen Werte in die erste Gleichung ein und erhalten

$$x - 3\left(-2 + \frac{7}{5}\,t\right) + 2t = 4\,.$$

Ausmultiplizieren und Zusammenfassen ergibt

$$\Rightarrow x + 6 - \frac{21t}{5} + \frac{10t}{5} = 4 \Rightarrow x = -2 + \frac{11t}{5}\,.$$

Wir erhalten erneut das Ergebnis, dass auch die Variable x beliebige viele Werte annehmen kann. Wir haben also für das lineare Gleichungssystem eine Lösungsmenge mit unendlich viele Lösungen gefunden, da t als beliebige reelle Zahl unendliche viele unterschiedliche Werte annehmen kann. Die Lösungsmenge schreibt man in diesem Fall in folgender Form auf:

$$\mathbb{L} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z) = \left(-2 + \frac{11}{5}\,t, -2 + \frac{7}{5}\,t, t\right); t \in \mathbb{R}\right\}.$$

■

Es gibt noch einen weiteren Fall, nämlich dass ein inhomogenes lineares Gleichungssystem überhaupt keine Lösung besitzt. Sehen wir uns dazu das nächste Beispiel an.

Learn a little …do a little

Beispiel 3.19 **Unlösbares inhomogenes lineares Gleichungssystem**

Gesucht ist die Lösungsmenge des LGS

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -16 & 18 & 27 \end{array}\right].$$

Lösung Wir formen die erweiterte Koeffizientenmatrix mit dem Gauß-Verfahren so um, dass unterhalb der 1 in der ersten Spalte nur Nullen stehen. Dazu addieren wir das 2-Fache der 1. Zeile zur 2. Zeile und addieren die 2. Zeile zur 3. Zeile

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -16 & 18 & 27 \end{array}\right] \overset{\substack{Z_2+2Z_1 \\ Z_3+Z_2}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & 10 \\ 0 & -15 & 21 & 29 \end{array}\right],$$

d. h. wir haben wieder zwei Rechenschritte gleichzeitig durchgeführt. Als nächstes eliminieren wir die Variable y aus der dritten Gleichung, indem wir von der 3. Zeile das 3-Fache der 2. Zeile subtrahieren

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & 10 \\ 0 & -15 & 21 & 29 \end{array}\right] \overset{Z_3-3Z_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Wenden wir jetzt wieder das rückwärtige Einsetzen auf die letzte Gleichung an, so erhalten wir

$$0 \cdot z = -1\,.$$

Diese Gleichung ist für keinen Wert von z erfüllbar. Daher ist das Gleichungssystem unlösbar, die Lösungsmenge ist die leere Menge:

$$\mathbb{L} = \emptyset\,.$$

Wir betrachten jetzt homogene lineare Gleichungssysteme, d. h. Gleichungssysteme, bei denen die rechte Seite immer Null ist.

Learn a little

...do a little

Beispiel 3.20 Homogenes lineares Gleichungssystem mit eindeutiger Lösung

Wir verwenden nochmals das Gleichungssystem aus Beispiel 3.17 und setzten die rechte Seite gleich Null

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right].$$

Da die Umformungen im Gauß-Algorithmus bei homogenen LGSen die Ergebnisspalte unverändert (Null) lassen, können wir die Ergebnis des obigen Beispiels nutzen und erhalten als Stufenform

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right].$$

Durch rückwärtiges Einsetzen erhalten wir aus der letzten Zeile die Gleichung

$$6z = 0 \Rightarrow z = 0\,.$$

Setzen wir das in die zweitletzte Gleichung ein, so ergibt sich

$$-2y - 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow y = 0\,.$$

Und ebenso für die erste Gleichung

$$-x + 0 + 0 = 0 \Rightarrow x = 0\,,$$

d. h. wir erhalten eine eindeutige Lösung, nämlich

$$(x, y, z) = (0, 0, 0)\,,$$

die sogenannte **Nulllösung**. Die Nulllösung ist für alle homogenen lineare Gleichungssysteme eine gültige Lösung, d. h.

Homogene LGSe haben immer mindestens eine Lösung.

Diesen Sachverhalt sieht man vielleicht leichter ein, wenn man das homogene LGS in Gleichungsform betrachtet:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 3y & - & 2z & = & 0 \\ 5x & + & y & + & 4z & = & 0\,. \end{array}$$

Wählt man

$$x = y = z = 0\,,$$

so ergibt sich ohne großes Nachrechnen, dass diese Wahl das Gleichungssystem löst. ■

Als letztes Beispiel in diesem Abschnitt betrachten wir ein homogenes LGS, das unendlich viele Lösungen hat.

Learn a little
…do a little

Beispiel 3.21 **Homogenes lineare Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen**

Wie nehmen das LGS aus Beispiel 3.18 und setzen die rechte Seite gleich Null

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -8 & 9 & 0 \end{array}\right].$$

Wie schon im vorherigen Beispiel erwähnt, ändern die im Gauß-Verfahren eingesetzten Umformungen die rechte Seite nicht, so dass wir ohne weiteres Nachrechnen die Stufenform aus dem obigen Beispiel übernehmen können

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -8 & 9 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Aus der letzten Zeile folgt die Gleichung

$$0 \cdot z = 0\,,$$

die für beliebiges z erfüllt ist. Wir setzen wieder $z = t$, wobei t eine beliebige reelle Zahl sein kann und setzen diesen Wert in die vorletzte Gleichung ein

$$-5y + 7t = 0 \Rightarrow y = \frac{7}{5}t\,.$$

Nun werden die beiden gefundenen Werte für z und y in die erste Gleichung eingesetzt

$$x - 3(\frac{7}{5}\,t) + 2t = 0 \Rightarrow x - \frac{21}{5}\,t + \frac{10}{5}\,t \Rightarrow x = \frac{11}{5}\,t\,.$$

Wir erhalten das Ergebnis, dass die Variablen x, y, z beliebig viele Werte annehmen können. Wir haben also für das homogene lineare Gleichungssystem eine Lösungsmenge mit unendlich vielen Lösungen gefunden, da t als beliebige reelle Zahl unendlich viele unterschiedliche Werte annehmen kann. Die Lösungsmenge schreibt man in folgender Form auf:

$$\mathbb{L} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z) = \left(\frac{11}{5}\,t, \frac{7}{5}\,t, t\right); t \in \mathbb{R}\right\}.$$

■

Wir fassen die Ergebnisse der letzten Beispiele nochmals zusammen.

Merke

Lösungsverhalten linearer Gleichungssysteme

- Ein inhomogenes LGS besitzt entweder genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen oder überhaupt keine Lösung.
- Ein homogenes LGS besitzt entweder genau eine Lösung, nämlich die Nulllösung

  $$x = y = z = 0,$$

  oder unendlich viele Lösungen.

Aufgaben zu Kapitel 3

1. Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen folgender Gleichungen:

a. $\frac{1}{1+x} = 1$

b. $\frac{1}{1+x} = 0$

c. $\frac{a^2-1}{x-a} + \frac{a^2+1}{x+a} = a^2 + \frac{a^4}{x^2-a^2}, a \geq 2$

d. $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} = 2$

e. $\frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)} = 1$

f. $\frac{x-8}{x-9} = \frac{x-5}{x-7}$

g. $\frac{1}{2x-x^2} + \frac{x-4}{x^2+2x} + \frac{2}{x^2-4} = 0\,.$

2. Schreiben Sie als Summe zweier Quadrate:

a. $9x^2 + 6x + 2$ **b.** $x^2 + px + q$ mit $4q \geq p^2\,.$

3. Ermitteln Sie die Lösungen folgender Gleichungen:

a. $2x^2 - 7x + 5 = 0$ **b.** $2x^2 - 7x - 5 = 0$ **c.** $x^6 + 5x^3 - 36 = 0$

d. $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ **e.** $x^4 - 3x^2 - 2x = 0\,.$

4. Zerlegen Sie mit Polynomdivision:

a. $\frac{a^2-b^2}{a+b}$ **b.** $\frac{a^3+b^3}{a+b}$

c. $\frac{a^3-b^3}{a-b}$ **d.** $\frac{a^4-b^4}{a-b}\,.$

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

a. $\sqrt{x+4} = x+2$ **b.** $\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1} = \sqrt{5x-4}$

c. $\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2-1}$ **d.** $3^{3x-5} = 9^{x+3}$

e. $\sqrt[3]{a^{5-2n}}\,\sqrt[4]{a^{2n-4}} = \sqrt[6]{a^x}, \quad a > 0\,.$

6. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung $2^x + 2^a = 2^{x+a}$ lösbar?

7. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:

a. $\ln 5^x = \ln 2^x + 2$ **b.** $\frac{1}{2}\ln x^2 + \frac{1}{3}\ln x^3 = 2e$

c. $2\log_2(x-1) = \log_2(x+1) + 3\,.$