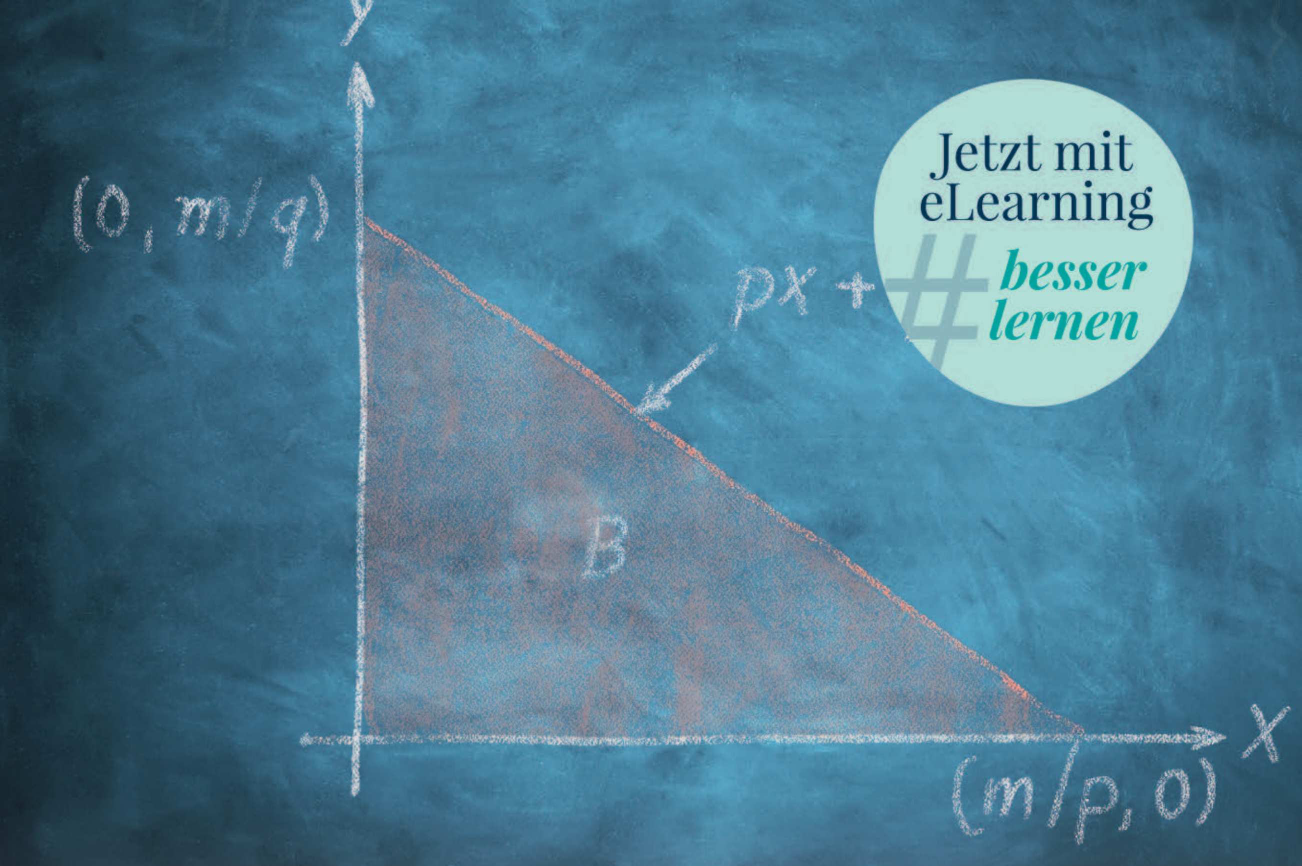

Jetzt mit eLearning
#besser lernen

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Basiswissen mit Praxisbezug

5., aktualisierte Auflage

Knut Sydsæter
Peter Hammond
Arne Strøm
Andrés Carvajal

Pearson

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Basiswissen mit Praxisbezug

5., aktualisierte Auflage

Übersetzt und fachlektoriert durch
Prof. Dr. Fred Böker

Knut Sydsæter
Peter Hammond
Arne Strøm
Andrés Carvajal

Pearson

7.7 Elastizitäten

Ökonomen untersuchen häufig, wie die Nachfrage nach einem gewissen Gut, wie z.B. Kaffee, auf Preisänderungen reagiert. Wir könnten fragen, um wie viele Einheiten, wie z.B. Kilogramm, die nachgefragte Menge zurückgeht pro Euro Preisanstieg. Auf diese Weise erhalten wir eine konkrete Zahl, gemessen in Einheiten des Gutes pro Geldeinheit. Es gibt jedoch mehrere unzureichende Aspekte, wenn man die Sensitivität der Nachfrage auf Preisänderungen in dieser Weise misst. Zum Beispiel kann der Anstieg des Preises um 1 Euro bei einem Kilogramm Kaffee als beträchtlich angesehen werden, während der Anstieg des Preises eines Autos um 1 Euro unbedeutend ist.

Dieses Problem ergibt sich, weil die Sensitivität der Nachfrage auf Preisänderungen in den gleichen willkürlichen Einheiten gemessen wird wie diejenigen, die benutzt werden, um die nachgefragte Menge und den Preis zu messen. Diese Schwierigkeiten verschwinden, wenn wir stattdessen relative Änderungen betrachten. Wir fragen, um welchen Prozentsatz sich die nachgefragte Menge ändert, wenn der Preis um 1% steigt. Die Zahl, die wir auf diese Weise erhalten, wird unabhängig von den Einheiten sein, in denen die Mengen und die Preise gemessen werden. Diese Zahl heißt die **Preiselastizität der Nachfrage**, gemessen bei einem gegebenen Preis.

Im Jahre 1960 wurde in einem bestimmten Land die Preiselastizität von Butter auf -1 geschätzt. Dies bedeutet, dass ein Anstieg des Preises um 1% zu einer Verringerung der Nachfrage um 1% führen würde, wenn alle anderen Faktoren, die die Nachfrage beeinflussen, konstant bleiben würden. Die Preiselastizität von Kartoffeln wurde auf -0.2 geschätzt. Wie ist dies zu interpretieren? Was ist Ihrer Meinung nach der Grund dafür, dass der Absolutbetrag dieser Elastizität um so viel kleiner ist als der für Butter?

Nehmen Sie jetzt an, dass die Nachfrage nach einem Gut durch die Funktion $x = D(P)$ des Preises P beschrieben werden kann. Wenn sich der Preis von P auf $P + \Delta P$ ändert, verändert sich auch die nachgefragte Menge x. Die absolute Änderung in x ist $\Delta x = D(P + \Delta P) - D(P)$, und die *relative* oder *proportionale* Änderung ist

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{D(P + \Delta P) - D(P)}{D(P)}$$

Das Verhältnis zwischen der relativen Änderung in der nachgefragten Menge und der relativen Preisänderung ist

$$\frac{\Delta x}{x} \Big/ \frac{\Delta P}{P} = \frac{P}{x}\frac{\Delta x}{\Delta P} = \frac{P}{D(P)}\frac{D(P + \Delta P) - D(P)}{\Delta P} \qquad (*)$$

Wenn $\Delta P = P/100$, so dass P um 1 % steigt, dann wird $(*)$ zu $(\Delta x/x) \cdot 100$, welches die prozentuale Änderung in der nachgefragten Menge ist. Wir nennen das Verhältnis in $(*)$ *die durchschnittliche Elastizität von x im Intervall* $[P, P + \Delta P]$. Beachten Sie, dass die in $(*)$ definierte Zahl sowohl von der Preisänderung ΔP als auch vom Preis P abhängt, aber dimensionslos ist. Daher macht es keinen Unterschied, ob die Mengen in Tonnen, Kilogramm oder Pfund oder ob die Preise in Dollar, Pfund oder Euro gemessen werden.

Wir würden die Elastizität von D in P gern so definieren, dass sie nicht von der Größe des Zuwachses in P abhängt. Dies ist möglich, wenn D eine differenzierbare Funktion von P ist. Denn dann ist es nahe liegend, die Elastizität von D bezüglich P

als Grenzwert des Verhältnisses in $(*)$ zu definieren, wenn ΔP gegen 0 strebt. Da der Newton-Quotient $[D(P+\Delta P) - D(P)]/\Delta P$ gegen $D'(P)$ strebt, wenn ΔP gegen 0 strebt, erhalten wir:

Preiselasizität der Nachfrage

Die Elastizität der Nachfragefunktion $D(P)$ (bezüglich des Preises P) ist

$$\frac{P}{D(P)} \frac{\mathrm{d}D(P)}{\mathrm{d}P} \tag{7.7.1}$$

Gewöhnlich erhalten wir eine gute Approximation der Elastizität, indem wir $\Delta P/P = 1/100 = 1\,\%$ setzen und $P\,\Delta x/(x\,\Delta P)$ berechnen.

Die allgemeine Definition der Elastizität

Die obige Definition der Elastizität betraf eine Funktion, die die nachgefragte Menge als Funktion des Preises bestimmte. Ökonomen betrachten jedoch auch die Einkommenselastizität der Nachfrage, wenn die Nachfrage als Funktion des Einkommens betrachtet wird. Sie betrachten auch Elastizitäten des Angebots, Elastizitäten der Substitution und viele andere Arten von Elastizitäten. Es ist daher hilfreich zu sehen, wie die Elastizität für eine allgemeine differenzierbare Funktion definiert werden kann.

Elastizität

Wenn f an der Stelle x differenzierbar und $f(x) \neq 0$ ist, dann ist die Elastizität[6] von f bezüglich x gleich

$$\mathrm{El}_x f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x) \tag{7.7.2}$$

Beispiel 7.7.1

Bestimmen Sie die Elastizität von $f(x) = Ax^b$, wobei A und b Konstanten sind mit $A \neq 0$.

Lösung: In diesem Fall ist $f'(x) = Abx^{b-1}$. Daher ist $\mathrm{El}_x Ax^b = (x/Ax^b)Abx^{b-1} = b$, so dass gilt:

$$f(x) = Ax^b \Longrightarrow \mathrm{El}_x f(x) = b \tag{7.7.3}$$

Die Elastizität der Potenzfunktion Ax^b bezüglich x ist einfach der Exponent b. Somit hat diese Funktion eine konstante Elastizität. Tatsächlich ist dies der einzige Funktionstyp, der eine konstante Elastizität hat. Dies wird in Aufgabe 9.9.6 gezeigt.

[6] Man bezeichnet diese Elastizität auch als Punktelastizität.

Beispiel 7.7.2

Nehmen Sie an, dass die nachgefragte Menge für ein bestimmtes Gut gegeben ist durch $D(P) = 8000P^{-1.5}$. Berechnen Sie die Elastizität von $D(P)$ und bestimmen Sie die exakte prozentuale Änderung der nachgefragten Menge, wenn der Preis um 1 % von $P = 4$ aus ansteigt.

Lösung: Mit (7.7.3) folgt $\mathrm{El}_P\, D(P) = -1.5$, so dass ein Anstieg des Preises um 1 % eine Abnahme der Nachfrage um ungefähr 1.5 % verursacht. In diesem Fall können wir auch die Abnahme in der Nachfrage exakt berechnen. Wenn der Preis 4 ist, ist die nachgefragte Menge $D(4) = 8000 \cdot 4^{-1.5} = 1000$. Wenn der Preis $P = 4$ um 1 % steigt, ist der neue Preis $4 + 4/100 = 4.04$, so dass die *Änderung* der Nachfrage gegeben ist durch

$$\Delta D = D(4.04) - D(4) = 8000 \cdot 4.04^{-1.5} - 1000 = -14.81$$

Die prozentuale Änderung in der Nachfrage von $D(4)$ ist $-(14.81/1000) \cdot 100 = -1.481\,\%$.

Beispiel 7.7.3

Es bezeichne $D(P)$ die Nachfragefunktion für ein Produkt. Durch den Verkauf von $D(P)$ Einheiten zum Preis P, hat der Hersteller den Erlös $R(P) = P \cdot D(P)$. Die Elastizität von $R(P)$ bezüglich P ist

$$\mathrm{El}_P R(P) = \frac{P}{P \cdot D(P)} \frac{d}{dP}[P \cdot D(P)] = \frac{1}{D(P)}[D(P) + P \cdot D'(P)] = 1 + \mathrm{El}_P D(P)$$

Beachten Sie: Wenn $\mathrm{El}_P D(P) = -1$, dann ist $\mathrm{El}_P R(P) = 0$. Das heißt, wenn die Preiselastizität der Nachfrage in einem Punkt gleich -1 ist, dann hat eine kleine Preisänderung (fast) keinen Einfluss auf den Erlös. Allgemeiner gilt: Der durch eine Preisänderung erzeugte Grenzerlös dR/dP ist positiv, wenn die Preiselastizität der Nachfrage größer als -1 und negativ, wenn die Elastizität kleiner als -1 ist.

Ökonomen verwenden oft die folgende Terminologie:

1. Wenn $|\mathrm{El}_x f(x)| > 1$, dann ist f elastisch an der Stelle x.
2. Wenn $|\mathrm{El}_x f(x)| = 1$, dann ist f 1-elastisch (ausgeglichen elastisch) an der Stelle x.
3. Wenn $|\mathrm{El}_x f(x)| < 1$, dann ist f unelastisch an der Stelle x.
4. Wenn $|\mathrm{El}_x f(x)| = 0$, dann ist f vollkommen unelastisch an der Stelle x.
5. Wenn $|\mathrm{El}_x f(x)| = \infty$, dann ist f vollkommen elastisch an der Stelle x.

Wenn $y = f(x)$ eine inverse Funktion $x = g(y)$ hat, dann impliziert Theorem 7.3.1

$$\mathrm{El}_y g(y) = \frac{y}{g(y)} g'(y) = \frac{f(x)}{x} \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\mathrm{El}_x f(x)} \tag{7.7.4}$$

Eine Formulierung, die gut zu (7.3.2) passt, ist so:

$$\mathrm{El}_y x = \frac{1}{\mathrm{El}_x y} \tag{7.7.5}$$

Es gibt einige Regeln für Elastizitäten von Summen, Produkten, Quotienten und verketteten Funktionen, die gelegentlich nützlich sind. Sie sollten daher vielleicht die Regeln in Aufgabe 7.7.9 herleiten.

Elastizitäten als logarithmische Ableitungen

Nehmen Sie an, dass die zwei Variablen x und y durch die folgende Gleichung $y = Ax^b$ in Beziehung stehen, wobei x, y und A positiv sind, wie in Beispiel 7.7.1. Wenn wir den natürlichen Logarithmus auf beiden Seiten der Gleichung bilden und die Regeln für Logarithmen aus Kap. 4.10 beachten, sehen wir, dass

$$\ln y = \ln A + b \ln x \tag{7.7.6}$$

Wir sehen hier, dass $\ln y$ eine lineare Funktion von $\ln x$ ist und sagen deshalb, dass (7.7.6) eine **loglineare** Beziehung zwischen x und y ist.

Für die Funktion $y = Ax^b$ wissen wir aus Beispiel 7.7.1, dass $\mathrm{El}_x y = b$. Deshalb sehen wir aus (7.7.6), dass $\mathrm{El}_x y$ gleich der (doppelten) logarithmischen Ableitung $d \ln y / d \ln x$ ist, die gleich der konstanten Steigung dieser loglinearen Beziehung ist. Dieses Beispiel illustriert die allgemeine Regel, dass für Funktionen $y = f(x)$ von positiven Variablen x, die positive Werte $f(x)$ haben, Elastizitäten gleich solchen logarithmischen Ableitungen sind. In der Tat gilt dann: Wenn y eine differenzierbare Funktion von x ist, dann zeigt ein Beweis, der mehrfach die Kettenregel verwendet, dass

$$\mathrm{El}_x y = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d \ln y}{d \ln x} \tag{7.7.7}$$

Die Transformation von der ursprünglichen Gleichung $y = Ax^b$ zu Gleichung (7.7.6) sieht man oft in ökonomischen Modellen, manchmal mit Logarithmen zu anderen Basen als e.

Aufgaben für Kapitel 7.7

1. Bestimmen Sie die Elastizitäten der durch die folgenden Formeln gegebenen Funktionen:

(a) $3x^{-3}$ (b) $-100x^{100}$ (c) $\sqrt{x}$ (d) $A/x\sqrt{x}$, wobei A eine Konstante ist

2. Eine Untersuchung der Verkehrswirtschaft verwendet die Beziehung $T = 0.4K^{1.06}$, wobei K die Ausgaben für den Straßenbau und T ein Maß für das Verkehrsaufkommen sind. Bestimmen Sie die Elastizität von T bezüglich K. Zu ungefähr welcher prozentualen Änderung des Verkehrsaufkommens führt nach diesem Modell eine Erhöhung der Ausgaben um 1 %?

3. Eine Untersuchung der norwegischen Staatseisenbahnen ergab, dass für Fahrten bis zu 60 km die Preiselastizität des Verkehraufkommens ungefähr gleich -0.4 war.

(a) Welches sind nach dieser Studie die Konsequenzen einer Erhöhung der Fahrpreise um 10 %?

(b) Die entsprechende Elastizität für Reisen über 300 km wurde zu ungefähr -0.9 berechnet. Können Sie einen Grund dafür erkennen, warum diese Elastizität im Absolutbetrag größer ist als die vorige?

➡ Fortsetzung

4. Verwenden Sie Definition (7.7.2), um $\mathrm{El}_x y$ für die folgenden Funktionen zu bestimmen, wobei a und p Konstanten sind.

(a) $y = e^{ax}$ (b) $y = \ln x$ (c) $y = x^p e^{ax}$ (d) $y = x^p \ln x$

5. Zeigen Sie, dass $\mathrm{El}_x(f(x))^p = p\mathrm{El}_x f(x)$, wobei p eine Konstante ist.

6. Für den Zeitraum 1927 bis 1941 wurde die Nachfrage D nach Äpfeln in den USA als Funktion des Einkommens r geschätzt als $D = Ar^{1.23}$, wobei A eine Konstante ist. Bestimmen und interpretieren Sie Einkommenselastizität der Nachfrage oder die *Engel-Elastizität*, die definiert ist als Elastizität von D bezüglich r.

7. Eine Studie der Verkehrssysteme in 37 amerikanischen Städten schätzte die durchschnittliche Fahrtzeit zur Arbeit, m (in Minuten), als eine Funktion der Einwohnerzahl N. Sie fanden heraus, dass $m = e^{-0.02}N^{0.19}$. Schreiben Sie die Beziehung in loglinearer Form. Wie groß ist der Wert von m, wenn $N = 480\,000$ ist?

8. Zeigen Sie, dass bei der Bestimmung von Elastizitäten gilt:

(a) Multiplikative Konstanten verschwinden: $\mathrm{El}_x Af(x) = \mathrm{El}_x f(x)$

(b) Additive Konstanten verschwinden *nicht*: $\mathrm{El}_x[A + f(x)] = \dfrac{f(x)\mathrm{El}_x f(x)}{A + f(x)}$

Anspruchsvollere Aufgaben

9. Zeigen Sie: Wenn f und g differenzierbare Funktionen von x mit positiven Funktionswerten sind und A eine Konstante ist, dann gelten die folgenden Regeln, wenn die entsprechenden Elastizitäten definiert sind. Dabei schreiben wir z. B. $\mathrm{El}_x f$ anstelle $\mathrm{El}_x f(x)$.

(a) $\mathrm{El}_x A = 0$

(b) $\mathrm{El}_x(fg) = \mathrm{El}_x f + \mathrm{El}_x g$

(c) $\mathrm{El}_x\left(\dfrac{f}{g}\right) = \mathrm{El}_x f - \mathrm{El}_x g$

(d) $\mathrm{El}_x(f + g) = \dfrac{f\,\mathrm{El}_x f + g\,\mathrm{El}_x g}{f + g}$

(e) $\mathrm{El}_x(f - g) = \dfrac{f\,\mathrm{El}_x f - g\,\mathrm{El}_x g}{f - g}$

(f) $\mathrm{El}_x f\big(g(x)\big) = \mathrm{El}_u f(u)\mathrm{El}_x u \;\; (u = g(x))$

10. Verwenden Sie die Regeln aus Aufgabe 9, um das Folgende zu berechnen:

(a) $\mathrm{El}_x(-10x^{-5})$ (b) $\mathrm{El}_x(x + x^2)$ (c) $\mathrm{El}_x(x^3 + 1)^{10}$

(d) $\mathrm{El}_x(\mathrm{El}_x 5x^2)$ (e) $\mathrm{El}_x(1 + x^2)$ (f) $\mathrm{El}_x\left(\dfrac{x-1}{x^5+1}\right)$

▶ Lösungen zu den Aufgaben finden Sie im Anhang des Buches.

7.8 Stetigkeit

Grob gesagt ist eine Funktion $y = f(x)$ stetig, wenn kleine Änderungen in der unabhängigen Variablen x kleine Änderungen im Funktionswert hervorrufen. Geometrisch gesehen *ist eine Funktion stetig auf einem Intervall, wenn ihr Graph zusammenhängend ist – d. h. keine Sprünge aufweist*. Ein Beispiel ist in Abb. 7.8.1 angedeutet.

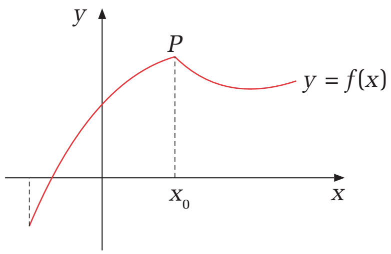

Abbildung 7.8.1: Eine stetige Funktion

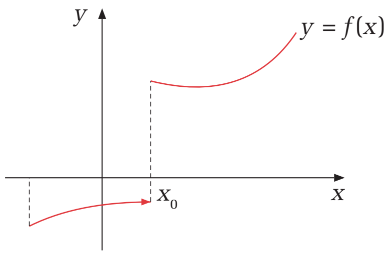

Abbildung 7.8.2: Eine unstetige Funktion

Es wird oft gesagt, dass eine Funktion stetig ist, wenn ihr Graph gezeichnet werden kann, ohne den Bleistift vom Papier abzuheben. Andererseits: Wenn der Graph einen oder mehrere Sprünge macht, sagen wir, dass f *unstetig* ist. Daher ist die Funktion, deren Graph in Abb. 7.8.2 gezeigt wird, unstetig an der Stelle $x = x_0$, jedoch stetig in allen anderen Stellen ihres Definitionsbereichs. Der Graph zeigt, dass $f(x) < 0$ für alle $x < x_0$, jedoch $f(x) > 0$ für alle $x \geq x_0$, so dass es einen Sprung an der Stelle $x = x_0$ gibt.

Warum ist es uns wichtig, zwischen stetigen und unstetigen Funktionen zu unterscheiden? Ein bedeutender Grund ist, dass wir gewöhnlich mit numerischen Approximationen arbeiten müssen. Wenn z. B. eine Funktion f durch eine Formel gegeben ist und wir $f(\sqrt{2})$ berechnen wollen, betrachten wir es gewöhnlich als selbstverständlich, dass wir $f(1.4142)$ berechnen können und eine gute Approximation an $f(\sqrt{2})$ erhalten. In Wirklichkeit wird dabei implizit angenommen, dass f stetig ist. Da 1.4142 nahe an $\sqrt{2}$ ist, muss dann der Wert $f(1.4142)$ nahe an $f(\sqrt{2})$ sein.

In Anwendungen der Mathematik in den Natur- und Wirtschaftswissenschaften stellt eine Funktion oft die Änderung eines Phänomens mit der Zeit dar. Die Stetigkeit der Funktion wird dann die Stetigkeit des Phänomens widerspiegeln, im Sinne allmählicher und nicht plötzlicher Änderungen. Zum Beispiel ist die Körpertemperatur einer Person eine Funktion der Zeit, die sich von einen Wert auf einen anderen ändert, indem sie zuvor alle dazwischen liegenden Werte passiert hat.

Auf der anderen Seite ist der Marktpreis von Öl eigentlich eine unstetige Funktion der Zeit, wenn wir es genau genug betrachten. Ein Grund ist der, dass der Preis (gemessen in Dollar oder einer anderen Währung) immer eine rationale Zahl sein muss. Ein zweiter und interessanterer Grund für gelegentliche große Preissprünge ist die plötzliche Ankunft einer Nachricht oder einer Unruhe, die entweder die Nachfrage- oder die Angebotsfunktion signifikant beeinflusst – z. B. ein plötzlicher Wechsel in der Regierung eines bedeutenden Öl exportierenden Landes.

Bevor wir das gerade erörterte Konzept der Stetigkeit in mathematischen Argumenten verwenden, muss es offensichtlich präziser gefasst werden. In der Tat brauchen wir eine Definition der Stetigkeit, die nicht allein auf intuitiven geometrischen Ideen basiert.

Stetigkeit in Form von Grenzwerten

Wie oben erörtert, ist eine Funktion $y = f(x)$ stetig an der Stelle $x = x_0$, wenn kleine Änderungen in x kleine Änderungen in $f(x)$ hervorrufen. Anders ausgedrückt: Wenn x nahe an x_0 ist, dann muss $f(x)$ nahe an $f(x_0)$ sein. Dies legt die folgende Definition nahe:

Stetigkeit

Die Funktion f ist **stetig** an der Stelle $x = x_0$ genau dann, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{7.8.1}$$

Daher sehen wir: Damit f an der Stelle $x = x_0$ stetig ist, müssen die folgenden drei Bedingungen alle erfüllt sein:

(i) Die Funktion f muss an der Stelle $x = x_0$ definiert sein.

(ii) Der Grenzwert von $f(x)$, wenn x gegen x_0 strebt, muss existieren.

(iii) Dieser Grenzwert muss gleich $f(x_0)$ sein.

Wenn nicht alle drei Bedingungen erfüllt sind, sagen wir, dass f **unstetig** ist an der Stelle x_0.

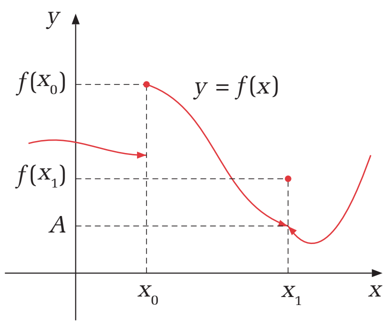

Abbildung 7.8.3: Eine unstetige Funktion

Abbildung 7.8.3 unterscheidet zwischen zwei wichtige Arten von Unstetigkeiten, die auftreten können. An der Stelle $x = x_0$ ist die Funktion unstetig, weil $f(x)$ offensichtlich keinen Grenzwert hat, wenn x gegen x_0 strebt. Daher ist Bedingung (ii) nicht erfüllt. Dies ist eine „irreparable" Unstetigkeit. Andererseits existiert der Grenzwert von $f(x)$, wenn x gegen x_1 strebt, und ist gleich A. Da aber $A \neq f(x_1)$ ist, ist Bedingung (iii) nicht erfüllt, so dass f an der Stelle x_1 unstetig ist. Dies ist eine „reparable" Unstetigkeit, die verschwindet, wenn $f(x_1)$ als A umdefiniert würde.

Eigenschaften von stetigen Funktionen

Mathematiker haben viele wichtige Resultate entdeckt, die nur für stetige Funktionen gelten. Es ist deshalb wichtig, entscheiden zu können, ob eine gegebene Funktion stetig ist oder nicht. Die in Kap. 6.5 für Grenzwerte gegebenen Regeln machen es leicht, Stetigkeit für viele Funktionstypen zu begründen. Beachten Sie: Wegen $\lim_{x \to x_0} c = c$ und $\lim_{x \to x_0} x = x_0$ in jedem Punkt x_0 gilt: Die zwei Funktionen

$$f(x) = c \quad \text{und} \quad f(x) = x \ \text{ sind überall stetig.} \tag{7.8.2}$$

Dies ist, wie es sein sollte, da die Graphen dieser Funktionen Geraden sind. Wenn wir nun Definition (7.8.1) und die Regeln für Grenzwerte in (6.5.2)–(6.5.5) verwenden, erhalten wir sofort die folgenden Resultate.

Eigenschaften von stetigen Funktionen

Wenn f und g stetig in x_0 sind, so gilt:

(a) $f + g$ und $f - g$ sind stetig in x_0.

(b) fg und f/g, falls $g(x_0) \neq 0$, sind stetig in x_0.

(c) $[f(x)]^r$ ist stetig in x_0, falls $[f(x_0)]^r$ definiert ist, wobei r eine reelle Zahl ist. (7.8.3)

(d) Wenn f eine Inverse hat auf dem Intervall I, so ist die Inverse f^{-1} stetig auf $f(I)$.

Zum Beispiel kann man den ersten Teil von (b) so beweisen: Wenn f und g beide stetig in x_0 sind, dann gilt $f(x) \to f(x_0)$ und $g(x) \to g(x_0)$, wenn $x \to x_0$. Aber dann gilt nach den Regeln für Grenzwerte $f(x)g(x) \to f(x_0)g(x_0)$, wenn $x \to x_0$, und dies bedeutet genau, dass fg stetig in $x = x_0$ ist. Das Resultat in (d) ist etwas trickreicher zu beweisen. Man kann es jedoch leicht glauben, da die Graphen von f und der Inversen f^{-1} symmetrisch zur Geraden $y = x$ sind.

Durch Verbindung dieser Eigenschaften und (7.8.2) folgt z. B., dass $h(x) = x + 8$ und $k(x) = 3x^3 + x + 8$ stetig sind. Im Allgemeinen folgt, dass ein Polynom, da es eine Summe von stetigen Funktionen ist, überall stetig ist. Ferner ist eine rationale Funktion

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{wobei } P(x) \text{ und } Q(x) \text{ Polynome sind,}$$

stetig in allen x, für die $Q(x) \neq 0$ ist.

Betrachten Sie eine verkettete Funktion $f(g(x))$, wobei angenommen werde, dass f und g stetig sind. Wenn x nahe an x_0 ist, dann ist wegen der Stetigkeit von g in x_0 auch $g(x)$ nahe an $g(x_0)$. Wiederum wird $f(g(x))$ nahe an $f(g(x_0))$ sein, weil f stetig in $g(x_0)$ ist. Damit ist $f(g(x))$ stetig in x_0. In Kürze: *Verkettungen von stetigen Funktionen sind stetig*: Wenn g stetig in $x = x_0$ ist und f stetig in $g(x_0)$ ist, dann ist $f(g(x))$ stetig in $x = x_0$. Im Allgemeinen gilt:

Erhalt der Stetigkeit

Jede Funktion, die aus stetigen Funktionen durch Kombination einer oder mehrerer der folgenden Operationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division (außer durch Null) und Verkettung, erzeugt werden kann, ist stetig in allen Punkten, in denen sie definiert ist. (7.8.4)

Indem wir die gerade erörterten Regeln anwenden, wird gewöhnlich ein einziger Blick auf die Formel, die die Funktion definiert, genügen, um die Punkte zu bestimmen, in denen sie stetig ist.

Beispiel 7.8.1

Bestimmen Sie, für welche Werte x die Funktionen f und g stetig sind:

(a) $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2 - 1}{(x-1)(x+2)}$ (b) $g(x) = (x^2+2)\left(x^3 + \dfrac{1}{x}\right)^4 + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

Lösung:

(a) Dies ist eine rationale Funktion, die in allen x stetig ist, in denen der Nenner $(x-1)(x+2)$ nicht verschwindet. Daher ist f stetig in allen x, die verschieden von 1 und -2 sind.

(b) Diese Funktion ist definiert, wenn $x \neq 0$ und $x+1 > 0$ ist. Wegen der Eigenschaften (a), (b) und (c) in (7.8.3) ist g stetig im Definitionsbereich $(-1, 0) \cup (0, \infty)$.

Wenn man weiß, wo eine Funktion stetig ist, wird die Berechnung vieler Grenzwerte vereinfacht. Wenn f in $x = x_0$ stetig ist, dann kann der Grenzwert von $f(x)$ für x gegen x_0 bestimmt werden, indem man einfach $f(x_0)$ berechnet. Da z. B. die Funktion $f(x) = x^2 + 5x$, die wir in Beispiel 6.5.3 untersucht haben, eine stetige Funktion von x ist, ist

$$\lim_{x \to -2} (x^2 + 5x) = (-2)^2 + 5(-2) = 4 - 10 = -6$$

Natürlich ist die einfache Berechnung von $f(-2)$ viel leichter, als die Regeln für Grenzwerte anzuwenden.

Abschnittsweise definierte Funktionen, wie in den Beispielen 5.4.3 und 5.4.4, sind Funktionen, die durch verschiedene Formeln in disjunkten Intervallen definiert sind. Solche Funktionen sind häufig in den Verbindungsstellen unstetig. Ein anderes Beispiel: Der Betrag an Porto, das Sie für einen Brief bezahlen, ist eine unstetige Funktion des Gewichts. (Solange wir vorgedruckte Briefmarken benutzen, wird es außerordentlich ungewöhnlich sein, eine „Portofunktion" zu haben, die auch nur annähernd stetig ist.) Andererseits, wenn eine Steuerfunktion gegeben ist, die so ähnlich aussieht wie die in Beispiel 5.4.4, so ist die Steuer, die Sie bezahlen (im Wesentlichen) eine stetige Funktion ihres Nettoeinkommens (obwohl viele Leute glauben, dass sie es nicht ist).

Beispiel 7.8.2

Ein ökonomisch bedeutungsvolles Beispiel einer unstetigen Funktion ist die Besteuerung von Hauskäufen im Vereinigten Königreich vor der Reform am 3. Dezember 2014. Jeder Käufer eines Hauses hatte eine Steuer zu bezahlen, die „Stempelsteuer" – oder offiziell „Stamp Duty Land Tax" genannt wurde, gewöhnlich abgekürzt als SDLT. Vor dem 3. Dezember 2014 wurde SDLT erhoben mit einem anwachsenden Durchschnittssteuersatz laut „Flächengründung". Vom 24. März 2012 bis 3. Dezember 2014, waren diese Steuersätze wie in Tabelle 7.8.1 gezeigt.

Kaufpreis des Objekts	Rate der SDLT
Bis 125 000 £	Null
Über 125 000 £ bis 250 000 £	2 %
Über 250 000 £ bis 925 000 £	5 %
Über 925 000 £ bis 1.5 Millionen £	10 %
Über 1.5 Millionen £	12 %

Tabelle 7.8.1: Steuersatz auf englische Häuser vor dem 3. Dezember 2014 (http://webarchive.nationalarchives.gov.uk/20141124143249/http:/www. hmrc.gov.uk/sdlt/rates-tables.htm#3)

Eine wichtige Implikation dieses Besteuerungssystems war, dass die Höhe der zu zahlenden Steuer immer dann einen unstetigen Sprung macht, wenn der Steuersatz anstieg. Insbesondere war die Steuer auf ein Haus, dass für 125 000 £ gekauft wurde, gleich Null. Wenn das Haus aber stattdessen für 125 001 £ gekauft wurde, stieg die zu zahlende Steuer an auf 2 % des Kaufpreises, was gleich 2 500.02 £ ist. Ähnlich: Die Steuer auf ein Haus, das für 250 000 £ gekauft wurde, war 2 % des Kaufpreises, was gleich 5 000 £ ist. Wenn aber das Haus stattdessen für 250 001 £ gekauft worden wäre, würde die zu zahlende Steuer ansteigen auf 5 % des Kaufpreises, was 12 500.05 £ ist.

Abbildung 7.8.4: SDLT *Ertragsfunktion*

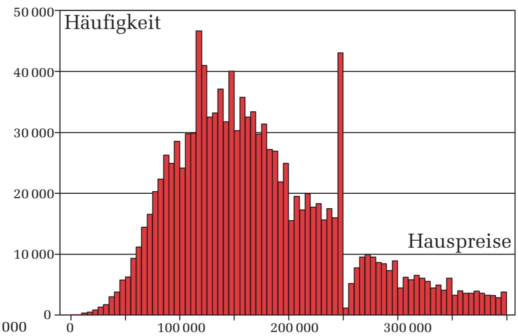

Abbildung 7.8.5: Häufigkeitsverteilung der Hauspreise