10. Klasse

Realschule MSA Bayern

Mathematatik I

- Die ideale Prüfungsvorbereitung -

MSA 2022

BLICK ins BUCH inkl. Prüfung 2021

DIGITALES COACHING

RS 10

Realschule 10. Klasse | Mittlerer Schulabschluss | Bayern

lernverlag
www.lern-verlag.de

Original-Prüfungen
Mathematik WPFG I
Realschule Bayern
2022

erstellt

für Schülerinnen und Schüler
der Realschule Bayern
mit der Wahlpflichtfächergruppe I

INKL.
Original-Prüfung
2021
mit Lösungen

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Vorwort

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler,
liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,

in diesem speziellen Prüfungsvorbereitungsbuch **Original-Prüfungen Mathematik I Realschule Bayern 2022** sind die letzten acht zentral gestellten Original-Prüfungen der Jahre 2014 bis 2021 enthalten. Dazu gibt es schülergerechte, lehrplankonforme und ausführliche Lösungen, die für den Schüler leicht verständlich und nachvollziehbar erstellt worden sind.

Hinweise

Die Abschlussprüfung 2022 findet nach Vorgaben des *Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus* am Montag **27.06.2022** statt und dauert **150 Minuten**.
(Stand 01.09.2021 - Angaben ohne Gewähr)
Als **Hilfsmittel** ist ein elektronischer Taschenrechner und eine Formelsammlung zugelassen.

Neues - Lernplattform kommt

Wir haben eine neue **Lernplattform** eingerichtet, die wir die nächsten Wochen vervollständigen. Hier findet man im gesicherten Mitgliederbereich hilfreiche Erklär- und Lösungsvideos zu vielen Mathe-Themen und zu den Lösungen der Original-Prüfungen. Jetzt bei **https://lern.de** einen Platz sichern. **Zeit- und ortsunabhängig** online für einzelne Arbeiten in der Schule oder den MSA (Mittlere Reife) 2022 lernen.

Tipps

Fangen Sie rechtzeitig an sich auf die Abschlussprüfung vorzubereiten und arbeiten Sie kontinuierlich alte Prüfungen durch. Wiederholen Sie die einzelnen Prüfungen mehrmals, um die notwendige Sicherheit zu erlangen. Zur Lernzielkontrolle können Sie den Prüfungsplaner im Innenteil dieses Prüfungsvorbereitungsbuch verwenden.
Üben Sie also, so oft Sie können.

Notenschlüssel

Der Notenschlüssel wird vom *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* festgelegt. In der folgenden Tabelle finden Sie die Notenschlüssel der letzten acht Prüfungsjahrgänge.

Jahrgang 2014 – 2021

Note 1:	53 – 45	Punkte
Note 2:	44 – 36	Punkte
Note 3:	35 – 27	Punkte
Note 4:	26 – 18	Punkte
Note 5:	17 – 9	Punkte
Note 6:	8 – 0	Punkte

Impressum
lern.de Bildungsgesellschaft mbH
Geschäftsführer: Sascha Jankovic
Fürstenrieder Str. 52
80686 München
Amtsgericht München: HRB 205623
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de – https://www.lern-verlag.de
lernverlag, lern.de und cleverlag sind eingetragene Marken von Sascha Jankovic, Inhaber und Verleger.

Druck: Deutschland
Lösungen:
Sascha Jankovic, Simon Rümmler und das Team aus Pädagogen und Naturwissenschaftlern der lern.de Bildungsgesellschaft mbH

Wir danken dem *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* für die freundliche Genehmigung, die Original-Prüfungen abdrucken zu dürfen. Die Lösungsvorschläge liegen nicht in der Verantwortung des Ministeriums.

7. ergänzte Auflage ©2021 **1. Druck**
ISBN-Nummer: 978-3-7430-0081-0
Artikelnummer:
EAN 9783743000810

Aktuelles Rund um die Prüfung 2022 und diesem Buch

Als kleiner Verlag schreiben wir für alle Schüler:innen nachvollziehbare, verständliche und ausführliche Lösungen zu den Original-Prüfungen und versuchen unsere Titel auch während des Schuljahres immer aktuell zu halten. Da wir seit über 20 Jahren individuelle Lernförderung durchführen, stehen bei uns alle Schüler:innen an erster Stelle, wenn es um Fragen rund um das Buch, Verständnisprobleme bei dem ein oder anderen Thema oder Wünsche geht.
Egal ob es um übersehene Rechtschreibfehler, Rechenfehler oder auch Wünsche von Lehrer:innen oder Schüler:innen geht, wir setzen uns sofort hin und versuchen Gewünschtes umzusetzen. Es kostet niemanden etwas, und alle profitieren davon, auch wenn wir Mehrarbeit durch diesen kostenlosen Service haben.

Wir erreichen Sie uns am besten?

Schreiben Sie uns eine E-Mail an **kontakt@lern-verlag.de**

Schreiben Sie uns eine Nachricht, schicken Sie ein Foto von der betroffenen Seite. Wir prüfen, ändern und veröffentlichen bei Bedarf im kostenlosen Downloadbereich des lernverlags die durchgeführten Änderungen.

WhatsApp-Business
+49 89 54 64 52 00

Sie können uns gerne unter der selben Nummer anrufen.

Digitales zu diesem Buch

Unter **https://lern.de** bauen wir gerade eine Lernplattform auf.
Du suchst ein Video über quadratische Funktionen oder Trigonometrie und bekommst aktuell auf anderen Plattformen 50 Videos angezeigt mit unterschiedlichen Erklärungen? Das soll sich ändern. Ein Begriff und maximal 3 Videos, die eventuell zusammenhängen.
Wir arbeiten unter Hochdruck daran, kurze animierte Erklärvideos, passend zum Unterrichtssoff und „ON-TOP“ Lösungsvideos zu den Original-Prüfungen zu erstellen.
Schau öfters einmal vorbei oder melde dich am besten zu unserem **Newsletter** an, der **maximal zweimal pro Monat** verschickt wird.

Änderungen in dieser Neuauflage 2021/2022 - ISBN: 978-3-7430-0081-0

- Älteste Original-Prüfung 2013 herausgenommen und das Vorwort überarbeitet
- Kopfzeile im Buch übersichtlicher gestaltet und themenbezogene Übersicht erstellt
- Aktuelles, Inhaltsübersicht und Übersicht der einzelnen Themengebiete eingebaut
- Lösungsmenge $\mathbb{L}$ bei entsprechenden Lösungen mit angegeben
- Sämtliche Rechenschritte in Lösungen nochmals ausführlicher dargestellt
- **Original-Prüfung 2021 inkl. ausführlichen Lösungen eingebaut**

Inhaltsverzeichnis

Themenbezogene Übersicht - Finde Dich leicht zurecht

Damit man sich auch während des Schuljahres optimal auf die einzelnen Arbeiten vorbereiten kann, haben wir eine **Übersicht zu den einzelnen Themengebieten** erstellt.
So kann man sich beispielsweise gezielt auf die Arbeit mit dem Thema *Abbildungen im Koordinatensystem* vorbereiten und dazu alle entsprechenden Original-Prüfungen durcharbeiten.
In den grau hinterlegten Jahrgängen wurde das entsprechende Thema nicht abgeprüft. Kein Anspruch auf Vollständigkeit und Richtigkeit.

Potenzen und Potenzfunktionen

rationale/reelle Exponenten, Potenzgleichungen, Potenzgesetze, Umformung von Potenztermen

Jahrgänge:	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**	**2020**	**2021**
Seiten:	22, 30						121	

Exponential- und Logarithmusfunktionen

Eigenschaften, Funktionsgraphen, Gleichungen, Wachstums- und Abklingprozesse, Umkehrfunktionen

Seiten:		42, 47		77, 83	90, 97	106, 111		136, 144

Trigonometrie

sin, cos, tan, Wertebereiche, graphische Definitionen, Dreieck, Skalarprodukt

Seiten:	21, 31	39, 48	59, 66	74, 84	91, 93	103, 112	123, 128	139, 145

Abbildungen im Koordinatensystem

Matrix, Vektor, Parallelverschiebung, Drehung, Achsenspiegelung, zentrische Streckung, orthogonale Affinität, Verknüpfungen, Bildpunkte/-graphen

Seiten:	30	47	57, 65	75	97, 98	104, 111	129	137, 144

Hinweis zur Prüfung 2022 in Mathe I

Sonderregelung für den MSA 2022 an der Realschule:
Nicht prüfungsrelevant (Stand: 09.08.2021):

- **Aus LB M 10.1:**
  Potenzfunktionen und Abbilden von Funktionsgraphen für Funktionen mit $y = x^n$ bzw. $y = x^{\frac{1}{n}}$
- **Aus LB M 10.3:**
  Polarkoordinaten, Bogenmaß, Funktionen mit $y = \cos x$, $y = \sin x$ und $y = \tan x$ und ihre Graphen
  Stattdessen: Bearbeiten von Aufgaben aus der ebenen und räumlichen Geometrie mit funktionalen Abhängigkeiten und Extremwertuntersuchungen

Bitte fragen Sie bzgl. Änderungen bei Ihrer Lehrkraft nach!

Stoffübersicht der Abschlussprüfungen

Realschule Bayern Mathematik I

1 Funktionen

Allgemeine Lösungsansätze:

Nullstellen berechnen: Funktionsterm gleich Null setzen und Gleichung nach x umformen, z. B.
$2x + 1 = 0 \iff x = -0{,}5 \implies$ Nst. $N\,(-0{,}5\,|\,0)$

Schnittpunkte berechnen: Gleichsetzen der beiden Funktionsterme und lösen der Gleichung nach x. Anschließend den berechneten x-Wert in einen der beiden Funktionsterme einsetzen: z. B.
$2x + 1 = 0{,}5x - 2 \iff x = -2 \implies y = 2 \cdot (-2) + 1 = -3$
$\implies$ Schnittpunkt $SP\,(-2\,|\,-3)$

1.1 Lineare Funktionen

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade. Zu jedem x-Wert existiert genau ein einziger y-Wert und umgekehrt.
In der folgenden Übersicht werden alle notwendigen Formeln dargestellt.

Die allgemeine Form: $ax + by = c$ $\quad a, c \in \mathbb{R}; \quad b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Die Normalform: $y = mx + t$
$m, t \in \mathbb{R}$

Der **y-Achsenabschnitt t** ist der Schnittpunkt mit der y-Achse; $x = 0$.

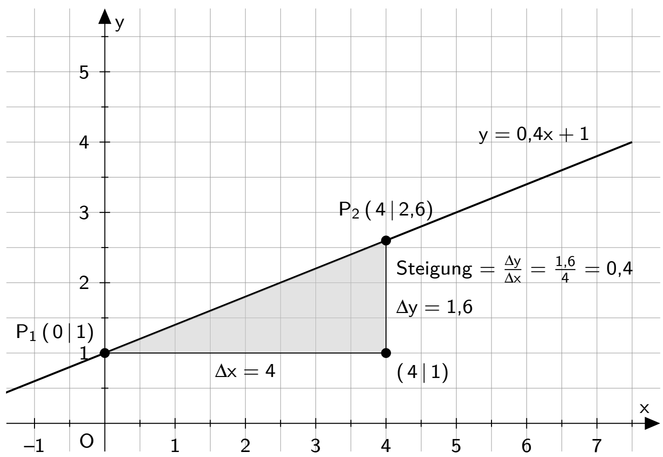
Parallele Geraden
$g_1 \parallel g_2 \iff m_1 = m_2$

Der **Steigungsfaktor m**
$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\alpha$
wobei $P_1\,(x_1\,|\,y_1)$ und $P_2\,(x_2\,|\,y_2)$ zwei beliebige (aber verschiedene) Punkte auf der Geraden sind.

Senkrechte (orthogonale) Geraden
$g_1 \perp g_2 \iff m_1 \cdot m_2 = -1$
Die Geraden g_1 und g_2 stehen im rechten Winkel zueinander.

Abszisse:
Die x-Koordinate eines Punktes;
Auch: x-Achse

Ordinate:
Die y-Koordinate eines Punktes;
Auch: y-Achse



1.2 Quadratische Funktionen

Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel. Dabei existiert eine Symmetrieachse, die durch den Scheitelpunkt der Parabel geht.

Die allgemeine Form: $y = ax^2 + bx + c \qquad b, c \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

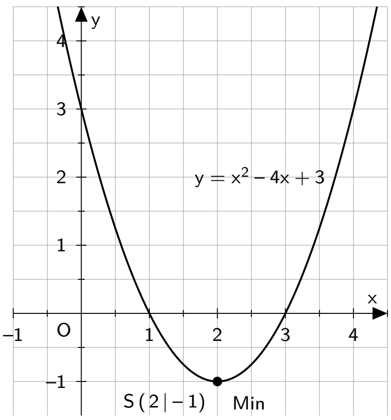
Die Normalparabel $(a = 1)$: $y = x^2 + bx + c$ bzw. $y = x^2 + px + q$.

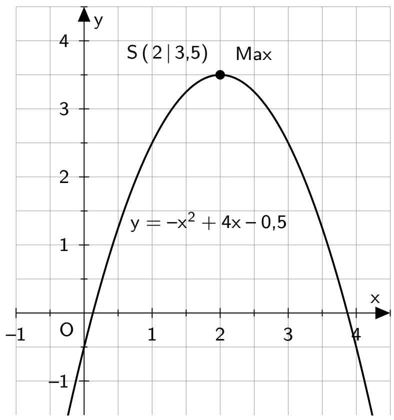
Scheitelpunkt: $S\left(x_S \,|\, y_S\right)$ $\quad S\left(-\frac{b}{2a} \,\middle|\, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ bzw. $S\left(-\frac{p}{2} \,\middle|\, q - \frac{p^2}{4}\right)$

Scheitelpunktform: $y = a(x - x_S)^2 + y_S \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Die Parameter a, b und c haben folgende Bedeutung:

Parameter	Bedingung	Bedeutung
a	$a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	Falls $a > 0$: nach oben geöffnete Parabel, mit Minimum Falls $a < 0$: nach unten geöffnete Parabel, mit Maximum Falls $\lvert a\rvert > 1$: gestreckte Parabel (schmaler als Normalparabel) Falls $\lvert a\rvert < 1$: gestauchte Parabel (breiter als Normalparabel)
b	$b \in \mathbb{R}$	Steigung, mit der die Parabel die y-Achse schneidet
c	$c \in \mathbb{R}$	Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse „y-Achsenabschnitt“





Lösen von quadratischen Gleichungen - Nullstellen berechnen

Lösungsformel: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ bzw. $x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$

Diskriminante D: $D = b^2 - 4ac$ bzw. $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

Es gilt:
$D > 0$: Zwei Lösungen
$D = 0$: Eine Lösung
$D < 0$: Keine Lösung

Beim Lösen einer quadratischen Gleichung haben sich folgende Schritte bewährt:

1. Schritt: a, b und c neben der gegeben Funktion untereinander schreiben.
2. Schritt: Berechnen der Diskriminante.
3. Schritt: Einfügen aller Zahlen in die Lösungsformel.

Quadratische Funktionen bestimmen

Oft muss eine quadratische Funktion mithilfe gegebener Punkte bestimmt werden. Hierbei müssen die Parameter a, b und c berechnet werden.
Für drei unbekannte Parameter benötigt man

- *drei verschiedene Punkte, die alle auf der Parabel liegen* **oder**
- *den Scheitelpunkt und einen anderen Punkt auf der Parabel*

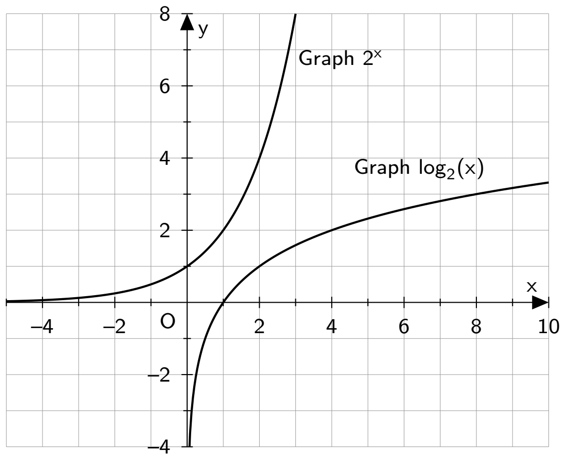
Sind zusätzliche Informationen gegeben, benötigt man entsprechend weniger Punkte auf der Parabel. Zusätzliche Informationen können z. B. sein:

- Normalparabel ($a = 1$)
- der y-Achsenabschnitt (z. B. $c = 2$)

Mit den gegeben Informationen gilt es ein Gleichungssystem aufzustellen und zu lösen.

1.3 Logarithmus- und Exponentialfunkion

Die am häufigsten vorkommenden Funktionen sind die Logarithmus- und die Exponentialfunktion. Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktion und umgekehrt.



Die allgemeine Funktionsgleichung der **Exponentialfunktion** lautet für $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ und $b, c \in \mathbb{R}$:

$$y = k \cdot a^{x-b} + c \quad \text{mit}$$
$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$
$$\text{falls } k > 0: \ \mathbb{W} = \{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ und } y > c\}$$
$$\text{falls } k < 0: \ \mathbb{W} = \{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ und } y < c\}$$

Die Parameter k, a, b und c haben folgende Bedeutung:

Parameter	Bedingung	Bedeutung
k	$k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	Streckfaktor; $P(0 \mid k + c)$ liegt auf Graph Falls k negativ: Spiegelung an x-Achse
a	$a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$	Falls $a > 1$: monoton Steigend Falls $a < 1$: monoton fallend
b	$b \in \mathbb{R}$	Verschiebung in x-Richtung Für $b > 0$: Verschiebung nach rechts Für $b < 0$: Verschiebung nach links
c	$c \in \mathbb{R}$	Verschiebung in y-Richtung

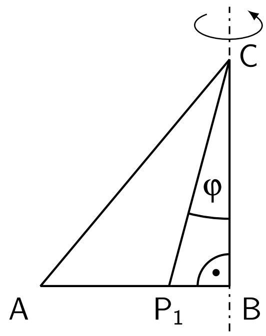
Die Asymptote ist stets eine Parallele zur x-Achse mit der Gleichung $y = c$.

Die allgemeine Funktionsgleichung der **Logarithmusfunktion** lautet für $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ und $b, c \in \mathbb{R}$:

$$y = k \cdot \log_a(x - b) + c$$
$$\mathbb{D} = \{x \mid x > b\}$$
$$\mathbb{W} = \mathbb{R}$$

A 1.0 Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ABC mit der Hypotenuse [AC]. Punkte P_n liegen auf der Kathete [AB] und legen zusammen mit den Punkten B und C Dreiecke P_nBC fest. Die Winkel P_nCB haben das Maß φ mit $\varphi \in \left]0°;\, 39{,}81°\right]$.
Es gilt: $\overline{AB} = 2{,}5\,\text{cm}$; $\overline{BC} = 3\,\text{cm}$; $\sphericalangle CBA = 90°$.

Die nebenstehende Skizze zeigt das Dreieck ABC und das Dreieck P_1BC für $\varphi = 15°$.



A 1.1 Begründen Sie durch Rechnung das Maß der oberen Intervallgrenze für φ. 1 P

A 1.2 Die Dreiecke P_nBC rotieren um die Gerade BC als Rotationsachse. 2 P
Zeigen Sie, dass für das Volumen V der dabei entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von φ gilt: $V(\varphi) = 9 \cdot \pi \cdot \tan^2 \varphi\,\text{cm}^3$.

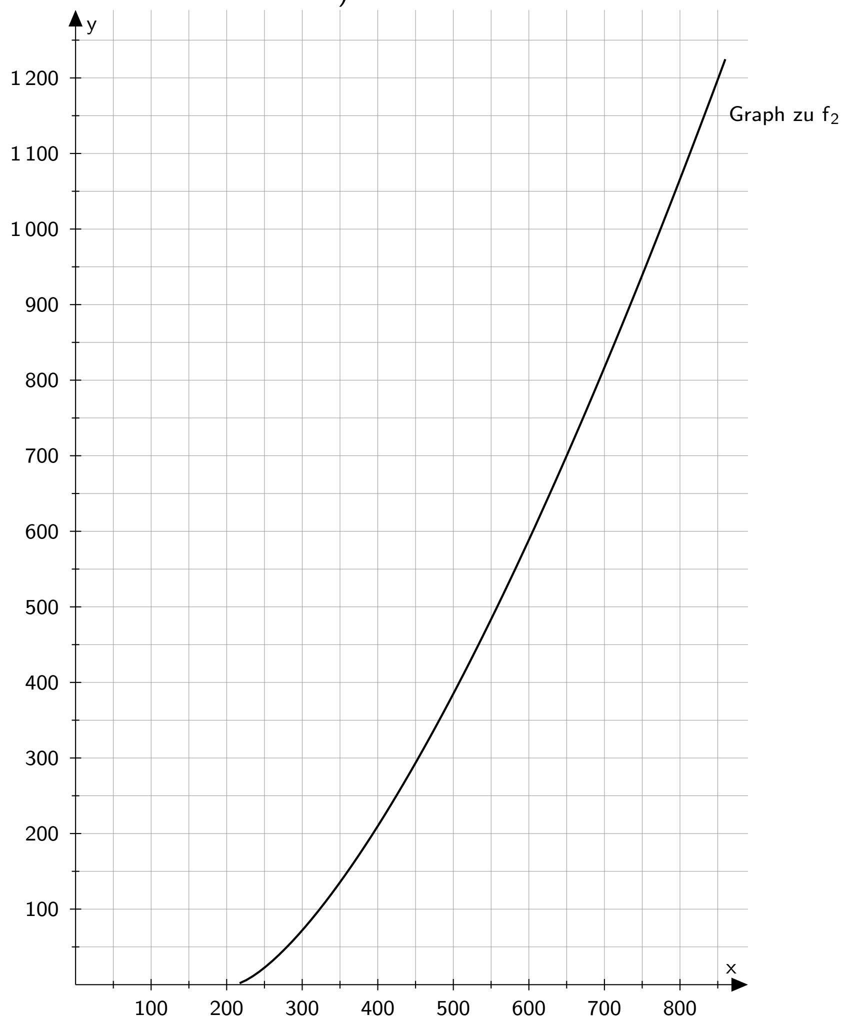
A 1.3 Das Volumen eines Rotationskörpers aus A 1.2 beträgt $6\,\text{cm}^3$. 2 P
Berechnen Sie das zugehörige Maß φ.

A 2.0 Ein Leichtathletikverband hat für die Wettbewerbe beim Zehnkampf Funktionsgleichungen festgelegt, mit denen sich die jeweilige Anzahl der Punkte, die die Sportler in den einzelnen Disziplinen erreichen können, berechnen lässt. Beim Weitsprung der Frauen wird die Anzahl der Punkte in Abhängigkeit von der Sprungweite x cm durch die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = 0{,}188807 \cdot (x - 210)^{1{,}41}$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$) ermittelt. Der auf Ganze gerundete Wert für y ergibt die Anzahl der erreichten Punkte.

A 2.1 Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion f_1 an. 3 P

Zeichnen Sie sodann den Graphen zu f_1 in das Koordinatensystem ein. Der bereits eingezeichnete Graph gehört zu der Funktion f_2, mit deren Hilfe die Punkte beim Weitsprung der Männer ermittelt werden.

(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da die Zeichnung für den Buchdruck skaliert wurde.)



A 1.1 Die obere Intervallgrenze für φ ergibt sich, wenn der Punkt P_0 im Punkt A liegt. Dann ist gerade der Winkel ∢ACB die obere Intervallgrenze von φ. Mithilfe des Tangens im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt dann:

$$\tan\varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$
$$\Longleftrightarrow \quad \tan\varphi = \frac{2{,}5}{3} \qquad |\tan^{-1}(\,)$$
$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{\varphi = 39{,}81^\circ}}$$

A 1.2 Bei den Rotationskörpern handelt es sich um Zylinder. Es gilt also für deren Volumen in Abhängigkeit von φ:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \overline{P_nB}^2 \cdot \pi \cdot \overline{BC}$$

Um die Länge der Strecke $\overline{P_nB}$ zu berechnen, verwendet man den Tangens im rechtwinkligen Dreieck P_nBC. Für $\varphi \in \,]0^\circ; 39{,}81^\circ]$ gilt dann:

$$\tan\varphi = \frac{\overline{P_nB}(\varphi)}{3\,\text{cm}} \qquad |\cdot 3\,\text{cm}$$
$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\overline{P_nB}(\varphi) = 3 \cdot \tan\varphi\,\text{cm}}$$

Somit gilt für das Volumen V:

$$V(\varphi) = \frac{1}{3} \cdot (3 \cdot \tan\varphi)^2 \cdot \pi \cdot 3\,\text{cm}^3$$
$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{V(\varphi) = 9 \cdot \pi \cdot \tan^2\varphi\,\text{cm}^3}}$$

A 1.3 Einsetzen von $6\,\text{cm}^3$ in das Volumen aus Aufgabe A 1.2 ergibt:

$$6 = 9 \cdot \pi \cdot \tan^2\varphi \qquad |:(9\cdot\pi)$$
$$\Longleftrightarrow \quad \frac{6}{9\cdot\pi} = \tan^2\varphi \qquad |\sqrt{\;}$$
$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{2}{3\cdot\pi}} = \tan\varphi \qquad |\tan^{-1}(\,)$$
$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{\varphi = 24{,}73^\circ}} \qquad \mathbb{L} = \{24{,}73^\circ\}$$

A 2.1 Die Funktion $y = 0{,}188807 \cdot (x-210)^{1{,}41}$ ist eine Potenzfunktion mit rationalem Exponenten. Der Teil $(x-210)^{1{,}41}$ lässt sich mithilfe der Wurzelfunktion umschreiben:

$$(x-210)^{1{,}41}$$
$$\Longleftrightarrow \quad (x-210)^{\frac{141}{100}}$$

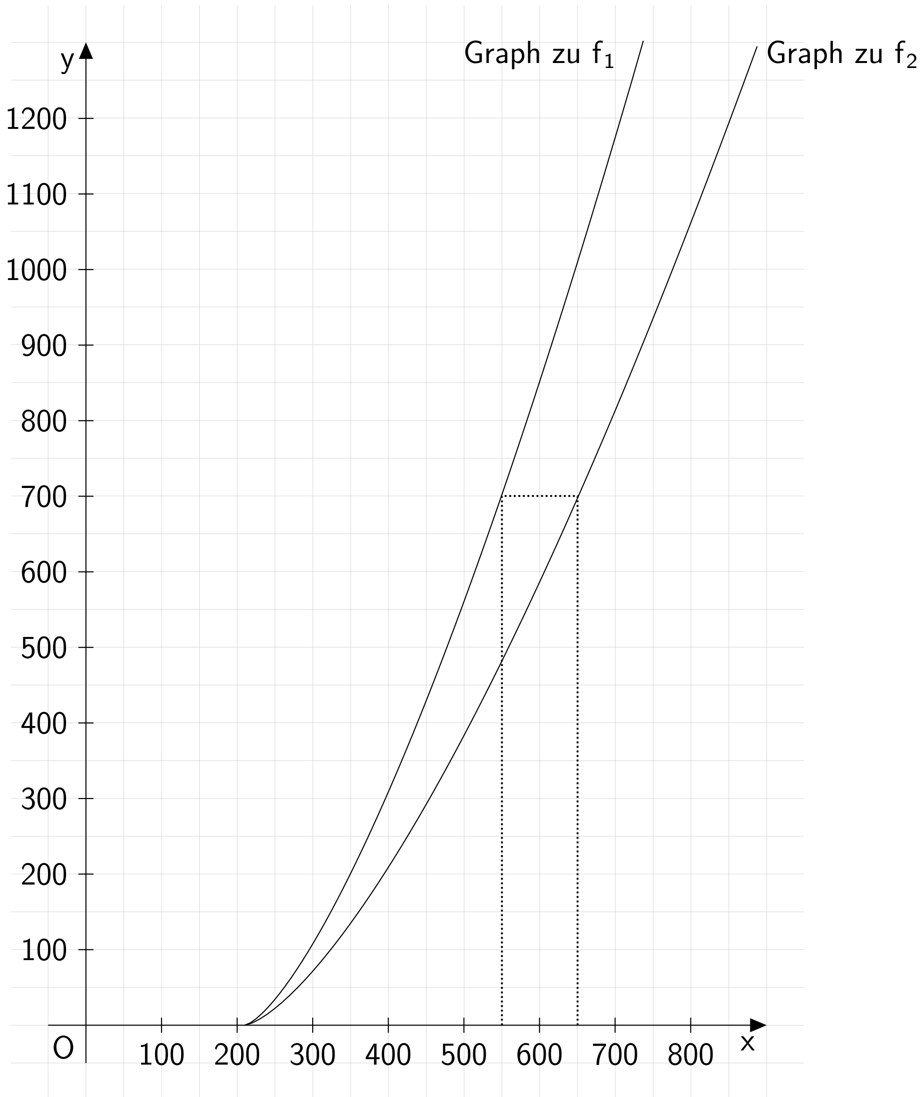
$$\Longleftrightarrow \qquad \sqrt[100]{(x-210)^{141}}$$

Es ergibt sich also für das Argument der Wurzel die einschränkende Bedingung:

$$\begin{aligned} & (x-210)^{141} \geq 0 && \mid \sqrt[141]{} \\ \Longleftrightarrow \quad & x-210 \geq 0 && \mid +210 \\ \Longleftrightarrow \quad & \underline{\underline{x \geq 210}} \end{aligned}$$

Somit ist der Definitionsbereich gegeben durch: $\mathbb{D} = \{x \mid x \geq 210\}$.

Einzeichnen des Graphen zu f_1:
(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da die Zeichnung für den Buchdruck skaliert wurde.)



A 2.2 Zum Ablesen siehe graue Linie in Zeichnung oben. Im Rahmen der Zeichen- und Ablesegenauigkeit: Der Mann springt $\underline{\underline{100\,\text{cm}}}$ weiter.

B 1.0 Der Punkt $A(-1 \mid -2)$ legt zusammen mit den Pfeilen $\overrightarrow{AB_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos\varphi + 3 \\ 5 \cdot \sin^2\varphi + 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos\varphi - 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ für $\varphi \in [0°; 180°]$ Parallelogramme $AB_nC_nD_n$ fest.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 1.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{AB_1}$ und $\overrightarrow{AD_1}$ für $\varphi = 60°$ sowie $\overrightarrow{AB_2}$ und $\overrightarrow{AD_2}$ für $\varphi = 130°$. Zeichnen Sie sodann die Parallelogramme $AB_1C_1D_1$ und $AB_2C_2D_2$ in ein Koordinatensystem ein. 4 P

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-8 \leqq x \leqq 6$; $-3 \leqq y \leqq 9$.

B 1.2 Berechnen Sie das Maß des Winkels B_1AD_1. 2 P

B 1.3 Unter den Parallelogrammen $AB_nC_nD_n$ gibt es das Rechteck $AB_3C_3D_3$. Ermitteln Sie rechnerisch das zugehörige Winkelmaß φ. 4 P

B 1.4 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Trägergraph p der Punkte C_n die Gleichung $y = -0{,}2(x+1)^2 + 8$ $(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ hat. 4 P
Zeichnen Sie sodann den Trägergraphen p in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.
$\left[\text{Teilergebnis: } C_n\left(5 \cdot \cos\varphi - 1 \,\middle|\, 5 \cdot \sin^2\varphi + 3\right)\right]$

B 1.5 Beim Parallelogramm $AB_4C_4D_4$ liegt der Punkt D_4 auf dem Trägergraphen p der Punkte C_n. 3 P
Bestimmen Sie durch Rechnung das zugehörige Winkelmaß φ.

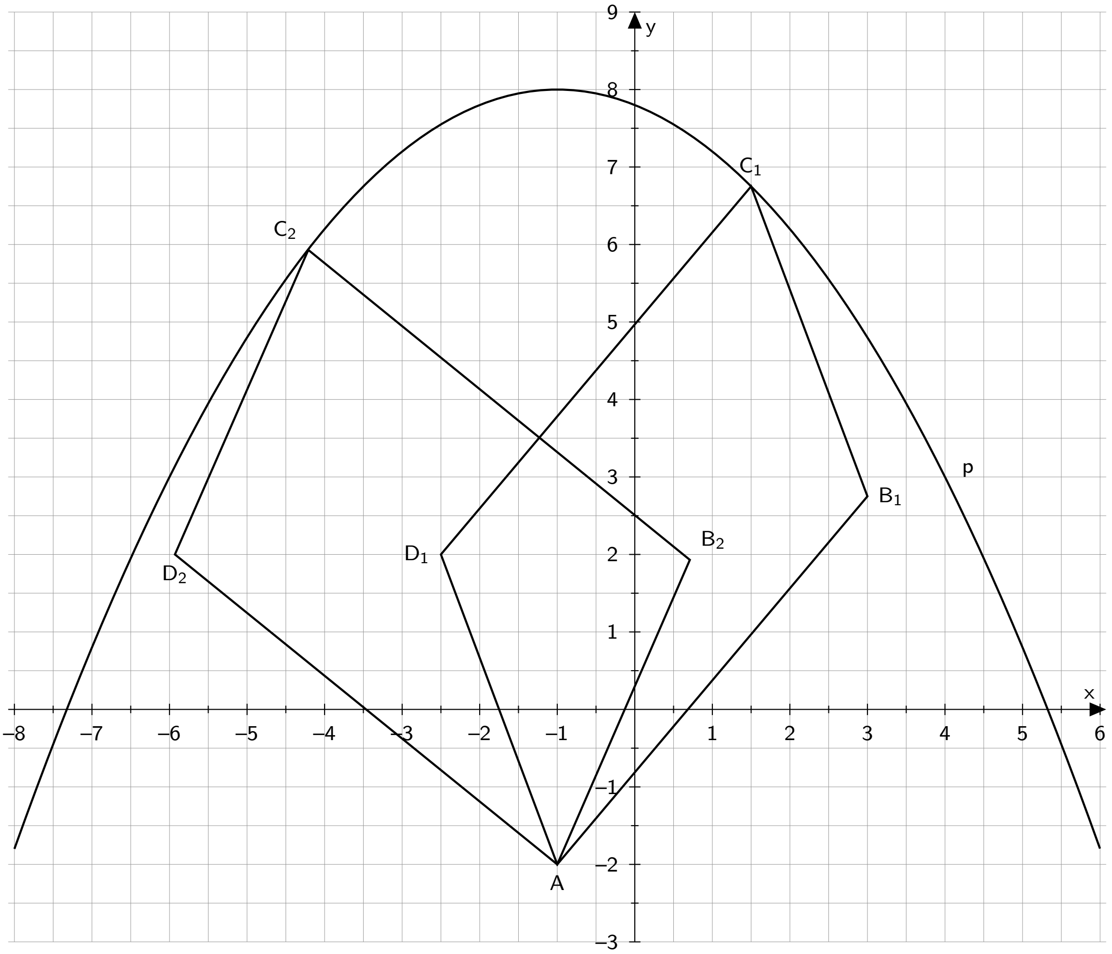
B 1.1 Für $\varphi = 60^\circ$ gilt:

$$\overrightarrow{AB_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4{,}75 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD_1} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Für $\varphi = 130^\circ$ gilt:

$$\overrightarrow{AB_2} = \begin{pmatrix} 1{,}71 \\ 3{,}93 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD_2} = \begin{pmatrix} -4{,}93 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Einzeichnen der Parallelogramme $AB_1C_1D_1$ und $AB_2C_2D_2$:
(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da die Zeichnung für den Buchdruck skaliert wurde.)



B 1.2 Mithilfe des Skalarprodukts gilt für den Winkel $\sphericalangle B_1AD_1$:

$$\cos\sphericalangle B_1AD_1 = \frac{\overrightarrow{AB_1} \odot \overrightarrow{AD_1}}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD_1}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 4{,}75 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{4^2 + 4{,}75^2} \cdot \sqrt{(-1{,}5)^2 + 4^2}}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \cos\sphericalangle B_1AD_1 = \frac{4 \cdot (-1{,}5) + 4{,}75 \cdot 4}{26{,}53} = 0{,}49 \qquad \left|\cos^{-1}(\,)\right.$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \underline{\underline{\sphericalangle B_1AD_1 = 60{,}66^\circ}}$$

B 1.3 Da $AB_3C_3D_3$ ein Rechteck ist, stehen $\overrightarrow{AB_3}$ und $\overrightarrow{AD_3}$ senkrecht aufeinander. Mit dem Skalarprodukt lässt sich also folgende Gleichung aufstellen und unter Zuhilfenahme der Eigenschaft $\sin^2\varphi + \cos^2 = 1 \iff \sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ lösen:

$$
\begin{aligned}
& & \overrightarrow{AB_3} \odot \overrightarrow{AD_3} &= 0 \\
&\iff & \begin{pmatrix} 2\cdot\cos\varphi + 3 \\ 5\cdot\sin^2\varphi + 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3\cdot\cos\varphi - 3 \\ 4 \end{pmatrix} &= 0 \\
&\iff & (2\cdot\cos\varphi + 3)(3\cdot\cos\varphi - 3) + (5\cdot\sin^2\varphi + 1)\cdot 4 &= 0 \\
&\iff & 6\cos^2\varphi - 6\cos\varphi + 9\cos\varphi - 9 + 20\sin^2\varphi + 4 &= 0 \\
&\iff & 6\cos^2\varphi + 3\cos\varphi - 5 + 20(1-\cos^2\varphi) &= 0 \\
&\iff & 6\cos^2\varphi + 3\cos\varphi - 5 + 20 - 20\cos^2\varphi &= 0 \\
&\iff & -14\cos^2\varphi + 3\cos\varphi + 15 &= 0
\end{aligned}
$$

Diese quadratische Gleichung kann mit der Lösungsformel gelöst werden:

$$
\begin{aligned}
& & \cos\varphi_{1,2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - (4\cdot(-14)\cdot 15)}}{2\cdot(-14)} \\
&\iff & \cos\varphi_{1,2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{849}}{-28} \\
&\iff & \cos\varphi_1 &= -0{,}93348588 \quad \text{und} \quad \cos\varphi_2 = 1{,}15 \\
&\Rightarrow & \underline{\underline{\varphi_1 = 158{,}98^\circ}} & \qquad \mathbb{L} = \{158{,}98^\circ\}
\end{aligned}
$$

Das zugehörige Winkelmaß ist also 158,98°.

B 1.4 Um den Trägergraphen der Punkte C_n zu berechnen, werden zunächst die Koordinaten der Punkte C_n benötigt. Diese werden wie folgt ermittelt. Man beachte, dass $\overrightarrow{B_nC_n} = \overrightarrow{AD_n}$ gilt.

$$
\begin{aligned}
& & \overrightarrow{OC_n} &= \overrightarrow{OA} \oplus \overrightarrow{AB_n} \oplus \overrightarrow{B_nC_n} \\
&\iff & \overrightarrow{OC_n}(\varphi) &= \overrightarrow{OA} \oplus \overrightarrow{AB_n} \oplus \overrightarrow{AD_n} \\
&\iff & \overrightarrow{OC_n}(\varphi) &= \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2\cdot\cos\varphi + 3 \\ 5\cdot\sin^2\varphi + 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3\cdot\cos\varphi - 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&\iff & \overrightarrow{OC_n}(\varphi) &= \begin{pmatrix} 5\cdot\cos\varphi - 1 \\ 5\cdot\sin^2\varphi + 3 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow & & \underline{C_n\left(5\cdot\cos\varphi - 1 \,\middle|\, 5\cdot\sin^2\varphi + 3\right)}
\end{aligned}
$$

Um den Trägergraphen zu bestimmen, betrachtet man das folgende Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
& & x &= 5\cdot\cos\varphi - 1 \\
&\wedge & y &= 5\cdot\sin^2\varphi + 3
\end{aligned}
$$

Dieses Gleichungssystem ist (wieder mit der Eigenschaft $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$) äquivalent zu:

$$
\begin{aligned}
& & \cos\varphi &= \frac{x+1}{5} \\
&\wedge & y &= 5\cdot(1-\cos^2\varphi) + 3
\end{aligned}
$$

B 1.0 Punkte $B_n\,(x\,|-0{,}3x-1)$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y=-0,3x-1$ mit $\mathbb{G}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Sie sind zusammen mit dem Punkt $A\,(0\,|\,0)$ sowie Punkten C_n und D_n für $x>0{,}84$ Eckpunkte von Drachenvierecken $AB_nC_nD_n$ mit den Diagonalenschnittpunkten M_n.
Die Diagonalen $[AC_n]$ der Drachenvierecke $AB_nC_nD_n$ liegen auf der Symmetrieachse h mit der Gleichung $y=\frac{2}{3}x$ $(\mathbb{G}=\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Es gilt: $\overrightarrow{AC_n}=4\cdot\overrightarrow{AM_n}$.
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 1.1 Zeichnen Sie die Geraden g und h sowie die Drachenvierecke $AB_1C_1D_1$ für $x=3$ und $AB_2C_2D_2$ für $x=5$ in ein Koordinatensystem. 4 P
Für die Zeichnung : Längeneinheit 1 cm; $-2\leqq x\leqq 10$; $-3\leqq y\leqq 8$

B 1.2 Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte D_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n. 3 P
[Ergebnis: $D_n\,(0{,}11x-0{,}92\,|\,1{,}04x+0{,}38)$]

B 1.3 Der Punkt D_3 liegt auf der y-Achse. 2 P
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes B_3 .

B 1.4 Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte M_n und C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n. 2 P
[Ergebnis: $C_n\,(2{,}24x-1{,}84\,|\,1{,}48x-1{,}24)$]

B 1.5 Das Drachenviereck $AB_4C_4D_4$ ist bei B_4 rechtwinklig. 4 P
Berechnen Sie den zugehörigen Wert für x.

B 1.6 Die Seite $[C_5D_5]$ des Drachenvierecks $AB_5C_5D_5$ verläuft parallel zur x-Achse. 2 P
Begründen Sie, dass gilt: $\sphericalangle D_5C_5B_5=67{,}38°$.

B 2.0 Das gleichschenklige Dreieck ABC ist die Grundfläche der Pyramide ABCS.
Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Basis [BC]. Die Pyramidenspitze S liegt senkrecht über dem Punkt M.
Es gilt: $\overline{AM} = 9\,\text{cm}$; $\overline{BC} = 12\,\text{cm}$; $\overline{MS} = 10\,\text{cm}$.
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 2.1 Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide ABCS, wobei die Strecke [AM] auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt M liegen soll. 4 P
Für die Zeichnung gilt: $q = 0{,}5$; $\omega = 45°$.
Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke [AS] sowie das Maß des Winkels MAS.
$\left[\text{Ergebnisse: } \overline{AS} = 13{,}45\,\text{cm}; \sphericalangle MAS = 48{,}01°\right]$

B 2.2 Auf der Strecke [AS] liegen Punkte P_n . Die Winkel P_nMA haben das Maß φ mit $\varphi \in \,]0°;\, 90°]$. 1 P
Die Dreiecke AMP_n sind die Grundflächen von Pyramiden AMP_nC, deren Spitze der Punkt C ist.
Zeichnen Sie die Pyramide AMP_1C für $\varphi = 65°$ in die Zeichnung zu B 2.1 ein.

B 2.3 Berechnen Sie die Länge der Strecken $[AP_n]$ in Abhängigkeit von φ und zeigen Sie sodann, dass für das Volumen V der Pyramiden AMP_nC in Abhängigkeit von φ gilt: 3 P

$$V(\varphi) = \frac{60{,}20 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 48{,}01°)}\,\text{cm}^3.$$

$$\left[\text{Ergebnis: } \overline{AP_n}(\varphi) = \frac{9 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 48{,}01°)}\,\text{cm}\right]$$

B 2.4 Die Grundfläche der Pyramide AMP_2C ist das rechtwinklige Dreieck AMP_2 mit der Hypotenuse [AM]. 3 P
Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Volumens der Pyramide AMP_2C am Volumen der Pyramide ABCS.

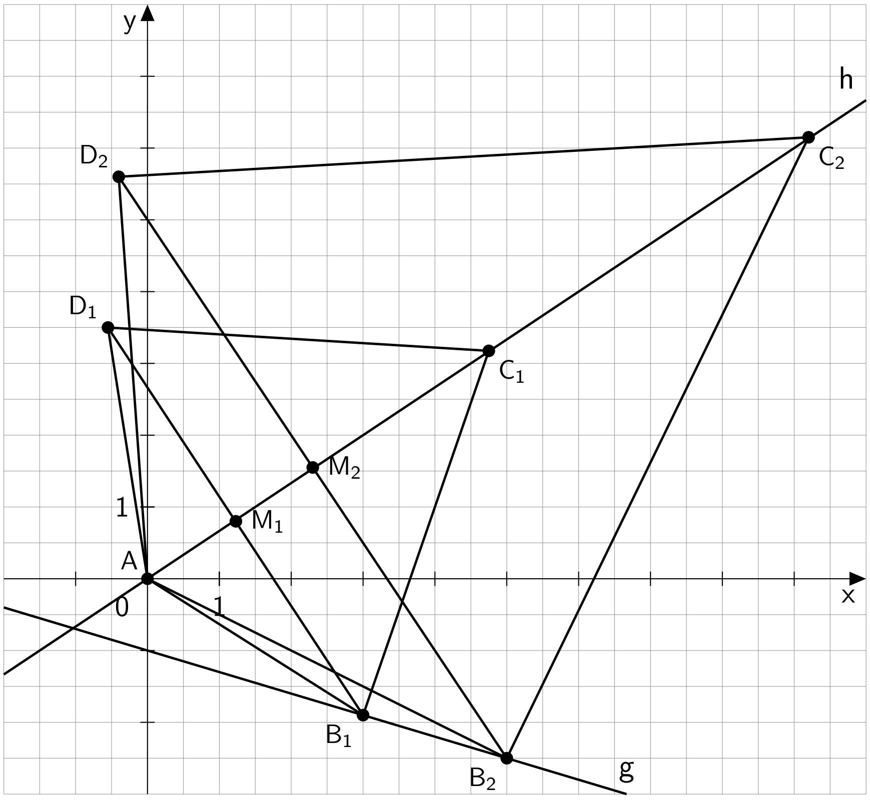
B 2.5 Das gleichschenklige Dreieck ACP_3 mit der Basis $[CP_3]$ ist eine Seitenfläche der Pyramide AMP_3C. 4 P
Berechnen Sie den zugehörigen Wert für φ.

B 2.6 Begründen Sie, dass für das Volumen V der Pyramiden AMP_nC gilt: $V \leqq 90\,\text{cm}^3$. 2 P

B 1.1 Um die Drachenvierecke zu zeichnen werden zunächst die y-Koordinaten der Punkte B_n bestimmt, indem der jeweilige Wert für x eingesetzt wird:

$$B_1: \qquad y = -0{,}3 \cdot 3 - 1 = -1{,}9$$
$$B_2: \qquad y = -0{,}3 \cdot 5 - 1 = -2{,}5$$

Die Koordinaten der Punkte lauten somit $B_1\,(3\,|-1{,}9)$ und $B_2\,(5\,|-2{,}5)$. Nun können die grafischen Darstellungen der Geraden g und h, sowie der Punkte A, B_1 und B_2 erfolgen. Da die Drachenvierecke symmetrisch zur Gerade h sind, ergeben sich durch Achsenspiegelung von B_n an der Gerade h die Punkte D_1 und D_2. Die Schnittpunkte der Strecken $[B_nD_n]$ mit der Gerade h entsprechen den Diagonalenschnittpunkten M_n. Da laut Angabe $\overrightarrow{AC_n} = 4\overrightarrow{AM_n}$ ist, können schließlich die Punkte C_n und damit die kompletten Drachenvierecke gezeichnet werden:
(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da die Zeichnung für den Buchdruck skaliert wurde.)



B 1.2 Die Punkte D_n gehen durch Achsenspiegelung der Punkte B_n an der Spiegelachse h hervor. Also $B_n \xrightarrow{h} D_n$. Die Gerade h hat die Gleichung $y = \frac{2}{3}x$, also eine Ursprungsgerade mit Anstieg $m = \frac{2}{3}$. Für die Durchführung der Achsenspiegelung wird der Winkel benötigt, den die Gerade h und die x-Achse einschließen:

$$\tan\varphi = m = \frac{2}{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underline{\underline{\varphi = 33{,}69^\circ}}$$

Für $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ und $x > 0{,}84$ wird die Abbildung nun durch die folgende Matrixgleichung beschrieben, wobei für x und y die Koordinaten der Punkte B_n eingesetzt werden. Als x' und y' ergeben sich dann die Koordinaten der Punkte D_n:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 67{,}38° & \sin 67{,}38° \\ \sin 67{,}38° & -\cos 67{,}38° \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -0{,}3x-1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}38 & 0{,}92 \\ 0{,}92 & -0{,}38 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -0{,}3x-1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}38x + 0{,}92 \cdot (-0{,}3x-1) \\ 0{,}92x - 0{,}38 \cdot (-0{,}3x-1) \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}38x - 0{,}27x - 0{,}92 \\ 0{,}92x + 0{,}12x + 0{,}38 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}11x - 0{,}92 \\ 1{,}04x + 0{,}38 \end{pmatrix}}$$

Somit haben die Punkt D_n die Koordinaten $\underline{\underline{D_n\,(0{,}11x - 0{,}92 \,|\, 1{,}04x + 0{,}38)}}$.

B 1.3 Da der Punkt D_3 auf der y-Achse liegt, ist seine x-Koordinate $x_{D_3} = 0$. Laut Teilaufgabe 1.2 kann damit der Wert der Abszisse bestimmt werden:

$$\begin{aligned} & x_{D_3} = 0 & \\ \Longleftrightarrow\quad & 0{,}11x - 0{,}92 = 0 & \quad | + 0{,}92 \\ \Longleftrightarrow\quad & 0{,}11x = 0{,}92 & \quad | : 0{,}11 \\ \Longleftrightarrow\quad & \underline{x = 8{,}36} & \end{aligned}$$

Dieser Wert $x = 8{,}36$ kann nun in die Koordinaten von Punkt B_n eingesetzt werden um die Koordinaten von B_3 zu bestimmen:

$$\underline{\underline{B_3\,(x \,|\, -0{,}3x - 1)}} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{B_3\,(8{,}36 \,|\, -3{,}51)}}$$

B 1.4 Da die Punkte M_n genau zwischen den Punkten B_n und D_n liegen, gilt:

$$M_n \left(\frac{x_{B_n} + x_{D_n}}{2} \,\middle|\, \frac{y_{B_n} + y_{D_n}}{2} \right) \quad \Longleftrightarrow \quad M_n \left(\frac{x + 0{,}11x - 0{,}92}{2} \,\middle|\, \frac{-0{,}3x - 1 + 1{,}04x + 0{,}38}{2} \right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{M_n\,(0{,}56x - 0{,}46 \,|\, 0{,}37x - 0{,}31)}$$

Da laut Aufgabe außerdem $\overrightarrow{AC_n} = 4 \cdot \overrightarrow{AM_n}$ gilt, ergeben sich die Koordinaten der Punkte C_n wie folgt:

$$C_n\,(4 \cdot (0{,}56x - 0{,}46) \,|\, 4 \cdot (0{,}37x - 0{,}31)) \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{C_n\,(2{,}24x - 1{,}84 \,|\, 1{,}48x - 1{,}24)}}$$

B 1.5 Wenn das Drachenviereck bei B_4 rechtwinklig ist, gilt $\overrightarrow{AB_4} \odot \overrightarrow{B_4C_4} = 0$. Damit folgt für den Wert der Abszisse:

$$\overrightarrow{AB_4} \odot \overrightarrow{B_4C_4} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ -0{,}3x - 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2{,}24x - 1{,}84 - x \\ 1{,}48x - 1{,}24 - (-0{,}3x - 1) \end{pmatrix} = 0$$

B 2.0 Die Punkte $A(-2|2)$ und $C(3|3)$ sind für $x < 8$ gemeinsame Eckpunkte von Vierecken AB_nCD_n. Die Eckpunkte $B_n(x|0{,}5x)$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 0{,}5x$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Der Punkt M ist der MIttelpunkt der Diagonalen [AC].

Für die Diagonalen $[B_nD_n]$ gilt: $M \in [B_nD_n]$ und $\overrightarrow{B_nD_n} = 3{,}5 \cdot \overrightarrow{B_nM}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 2.1 Zeichnen Sie die Gerade g und das Viereck AB_1CD_1 für $x = 0{,}5$ sowie die Diagonalen [AC] und $[B_1D_1]$ in ein Koordinatensystem. 2 P

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leqq x \leqq 5$; $-2 \leqq y \leqq 10$

B 2.2 Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte D_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n. 3 P

[Ergebnis: $D_n(-2{,}5x + 1{,}75\,|-1{,}25x + 8{,}75)$]

B 2.3 Bestimmen Sie die Gleichung des Trägergraphen der Punkte D_n. 2 P

B 2.4 Unter den Vierecken AB_nCD_n gibt es das Drachenviereck AB_2CD_2. 5 P
Zeigen Sie rechnerisch, dass für die x-Koordinate des Punktes B_2 gilt: $x = 0{,}91$.
Berechnen Sie sodann den Flächeninhalt des Drachenvierecks AB_2CD_2.

B 2.5 Der Punkt C' entsteht durch Achsenspiegelung des Punktes C an der Geraden g. 3 P
Für das Viereck AB_3CD_3 gilt: $B_3 \in [AC']$.
Berechnen Sie die Koordinaten von C' und zeichnen Sie sodann das Viereck AB_3CD_3 in das Koordinatensystem zu B 2.1 ein.

B 2.6 Begründen Sie, dass für die Flächeninhalte der Dreiecke AMD_n und MB_nC gilt: 2 P
$A_{AMD_n} : A_{MB_nC} = 2{,}5 : 1$.

B 2.4 Im Drachenviereck AB_2CD_2 steht $[B_nM]$ senkrecht auf $[AC]$, sodass gilt $\overrightarrow{B_nM} \odot \overrightarrow{AC} = 0$. Dabei ist $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Somit folgt für die x-Koordinate:

$$\begin{aligned}
& & \overrightarrow{B_nM} \odot \overrightarrow{AC} &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0{,}5-x \\ 2{,}5-0{,}5x \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & (0{,}5-x)\cdot 5 + (2{,}5-0{,}5x)\cdot 1 &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & 2{,}5 - 5x + 2{,}5 - 0{,}5x &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & 5 - 5{,}5x &= 0 & \quad | -5 \\
&\Longleftrightarrow & -5{,}5x &= -5 & \quad | : (-5{,}5) \\
&\Longleftrightarrow & x &\approx 0{,}91
\end{aligned}$$

Für die x-Koordinate des Punktes B_2 ist also $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{0{,}91\}}}$.

Um den Flächeninhalt des Drachenvierecks zu berechnen, werden zunächst die Längen der folgenden Strecken bestimmt, indem $x = 0{,}91$ eingesetzt wird:

$$\begin{aligned}
\overline{AC} &= \sqrt{5^2 + 1^2}\,\text{LE} \approx 5{,}10\,\text{LE} \\
\overline{B_2M} &= \sqrt{(0{,}5-0{,}91)^2 + (2{,}5-0{,}5\cdot 0{,}91)^2}\,\text{LE} \approx 2{,}09\,\text{LE}
\end{aligned}$$

Somit gilt für den Flächeninhalt des Drachenvierecks:

$$A_{AB_2CD_2} = 0{,}5\cdot \overline{AC}\cdot 3{,}5\cdot \overline{B_2M} = 0{,}5\cdot 5{,}10\cdot 3{,}5\cdot 2{,}09\,\text{FE} \approx \underline{\underline{18{,}65\,\text{FE}}}$$

B 2.5 Der Punkt C' entsteht durch Achsenspiegelung an der Gerade mit der Gleichung $y = 0{,}5x$. Für den Anstieg der Geraden gilt also $\tan\varphi = 0{,}5$ und somit $\varphi \approx 26{,}57°$. Damit gilt für die Koordinaten des Punktes C':

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\cdot 26{,}57°) & \sin(2\cdot 26{,}57°) \\ \sin(2\cdot 26{,}57°) & -\cos(2\cdot 26{,}57°) \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}20 \\ 0{,}60 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Punktes lauten somit $\underline{\underline{C'\,(4{,}20\,|\,0{,}60)}}$.

Graphische Darstellung des Vierecks AB_3CD_3 in Teilaufgabe 2.1.

B 2.6 Für die Flächeninhalte gilt:

$$\begin{aligned}
A_{MB_nC} &= 0{,}5\cdot \overline{MC}\cdot \overline{MB_n}\cdot \sin\sphericalangle B_nMC \\
A_{AMD_n} &= 0{,}5\cdot \overline{AM}\cdot \overline{MD_n}\cdot \sin\sphericalangle D_nMA = 0{,}5\cdot \overline{MC}\cdot (3{,}5-1)\cdot \overline{MB_n}\cdot \sin\sphericalangle MB_nC \\
&= 0{,}5\cdot \overline{MC}\cdot 2{,}5\cdot \overline{MB_n}\cdot \sin\sphericalangle MB_nC = 2{,}5\cdot 0{,}5\cdot \overline{MC}\cdot \overline{MB_n}\cdot \sin\sphericalangle MB_nC \\
&= 2{,}5\cdot A_{MB_nC}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{A_{AMD_n} : A_{MB_nC} = 2{,}5 : 1}}$

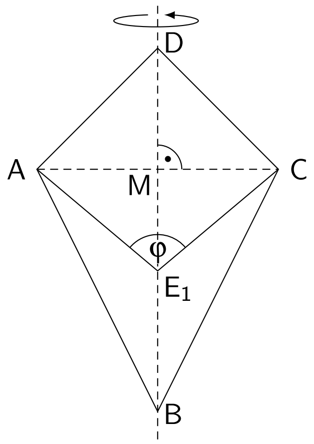
A 1.0 Gegeben ist das Drachenviereck ABCD mit der Symmetrieachse BD und dem Diagonalenschnittpunkt M.

Es gilt: $\overline{AM} = \overline{DM} = 2\,\text{cm}$ und $\overline{BD} = 6\,\text{cm}$.

Punkte E_n auf der Strecke [BM] legen zusammen mit den Punkten A, C und D die Drachenvierecke AE_nCD fest. Die Winkel CE_nA haben das Maß φ mit $\varphi \in [53{,}13°;\ 180°[$.

Die Zeichnung zeigt das Drachenviereck ABCD und das Drachenviereck AE_1CD für $\varphi = 100°$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



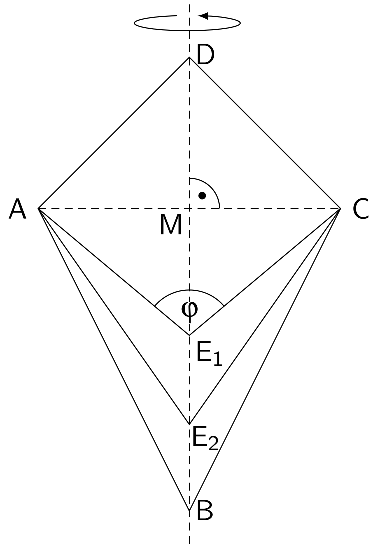
A 1.1 Zeichnen Sie das Drachenviereck AE_2CD für $\varphi = 70°$ in die Zeichnung zu A 1.0 ein. Bestätigen Sie sodann die untere Intervallgrenze für φ durch Rechnung. 2 P

A 1.2 Die Drachenvierecke AE_nCD rotieren um die Gerade BD. 2 P

Zeigen Sie, dass für das Volumen V der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von φ gilt: $V(\varphi) = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \left(1 + \frac{1}{\tan(0{,}5 \cdot \varphi)}\right)\,\text{cm}^3$.

A 1.3 Das Drachenviereck AE_3CD ist ein Quadrat. 1 P
Bestimmen Sie das Volumen des zugehörigen Rotationskörpers.

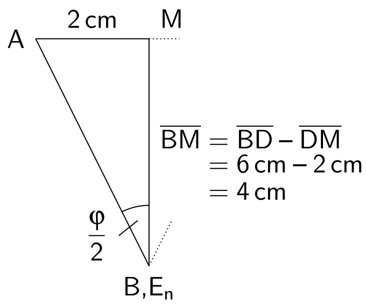
A 1.1 Einzeichnen des Drachenvierecks AE_2CD für $\varphi = 70°$:
(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da die Zeichnung für den Buchdruck skaliert wurde.)



Je näher der Punkt E_n an B liegt, desto kleiner ist der Winkel φ. Die untere Grenze ergibt sich also für den Fall, dass E_n mit B zusammenfällt. In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned} & & \tan\frac{\varphi}{2} &= \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} & & \\ \Longleftrightarrow & & \tan\frac{\varphi}{2} &= \frac{2\,\text{cm}}{4\,\text{cm}} & & \\ \Longleftrightarrow & & \tan\frac{\varphi}{2} &= \frac{1}{2} & & \mid \tan^{-1}(\,) \\ \Rightarrow & & \frac{\varphi}{2} &\approx 26{,}565° & & \mid \cdot 2 \\ \Longleftrightarrow & & \varphi &\approx 53{,}13° & & \end{aligned}$$

Skizze



Damit ergibt sich die untere Grenze $\underline{\underline{\varphi \geq 53{,}13°}}$.

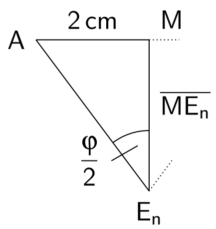
A 1.2 Der gesamte Körper setzt sich aus zwei Teilkörpern zusammen, wobei einer durch Rotation des Dreiecks AMD und der andere durch Rotation des Dreiecks ABM entsteht. Entsprechend entstehen zwei Kegel, für deren Volumen gilt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \overline{AM}^2 \cdot \pi \cdot \overline{DM} + \frac{1}{3} \cdot \overline{AM}^2 \cdot \pi \cdot \overline{ME_n} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{AM}^2 \cdot (\overline{DM} + \overline{ME_n})$$

Alle Längen bis auf $\overline{ME_n}$ sind bereits bekannt. Für diese Länge gilt im Dreieck AE_nM:

$$\begin{aligned} & & \tan\frac{\varphi}{2} &= \frac{\overline{AM}}{\overline{ME_n}} & & \\ \Longleftrightarrow & & \tan\frac{\varphi}{2} &= \frac{2\,\text{cm}}{\overline{ME_n}} & & \mid \cdot \overline{ME_n} \\ \Longleftrightarrow & & \tan\frac{\varphi}{2} \cdot \overline{ME_n} &= 2\,\text{cm} & & \mid : \tan\frac{\varphi}{2} \\ \Longleftrightarrow & & \overline{ME_n} &= \frac{2}{\tan\frac{\varphi}{2}}\,\text{cm} & & \end{aligned}$$

Skizze



A 1.0 Informationen über die Leistungsfähigkeit eines Sportlers kann man mithilfe von sogenannten Laktat-Tests ermitteln, da die Laktat-Konzentration im Blut mit steigender Laufgeschwindigkeit zunimmt.

Bei einem solchen Test wird die Laktat-Konzentration $y\,\frac{\text{mmol}}{\text{l}}$ (Millimol pro Liter Blut) in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit $x\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erfasst.

Für Paul lässt sich dieser Zusammenhang bei einem Test näherungsweise durch die Funktion f mit der Gleichung $y = 0{,}01 \cdot 1{,}5^x + 0{,}85$ $(\mathbb{G} = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+)$ beschreiben. Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

A 1.1 Bei Paul wurde für die Geschwindigkeiten von $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $12\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ jeweils eine Messung der Laktat-Konzentration durchgeführt. 3 P

Berechnen Sie mithilfe der Funktion f die zugehörigen Funktionswerte für diese beiden Geschwindigkeiten und ermitteln Sie sodann, um wie viel Prozent sich die Laktat-Konzentration zwischen diesen beiden Messungen erhöht hat.

A 1.2 Berechnen Sie die nach y aufgelöste Gleichung der Umkehrfunktion zu f. 2 P

A 2.3 Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Koordinaten der Punkte D_n in Abhängigkeit von x gilt: $D_n\,(0{,}18x + 1{,}41 \,|\, 0{,}53 - 1{,}41)$. 3 P

A 2.4 Berechnen Sie die Gleichung des Trägergraphen t der Punkte D_n und zeichnen Sie diesen in das Koordinatensystem zu A 2.1 ein. 3 P

Teil B

B 1.0 Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung: $y = 3 \cdot \log_3(x+7) - 4$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 1.1 Geben Sie die Gleichung der Asymptote h des Graphen zu f_1 an. 2 P
Zeichnen Sie sodann den Graphen zu f_1 für $x \in [-4; 9]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-4 \leqq x \leqq 9$; $-6 \leqq y \leqq 4$

B 1.2 Der Graph der Funktion f_1 wird durch Achsenspiegelung an der x-Achse und anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion f_2 abgebildet. 3 P
Bestätigen Sie durch Rechnung, dass für die Gleichung der Funktion f_2 gilt:
$y = -3 \cdot \log_3(x+6) + 2$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).
Zeichnen Sie sodann den Graphen zu f_2 für $x \in [-4; 9]$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

B 1.3 Punkte $A_n\,(x \,|\, -3 \cdot \log_3(x+6) + 2)$ auf dem Graphen zu f_2 und Punkte $D_n\,(x \,|\, 3 \cdot \log_3(x+7) - 4)$ auf dem Graphen zu f_1 haben dieselbe Abszisse x. Sie sind für $x > -3{,}46$ zusammen mit Punkten B_n und C_n Eckpunkte von Parallelogrammen $A_nB_nC_nD_n$. Die Punkte B_n liegen dabei ebenfalls auf dem Graphen zu f_2, ihre x-Koordinate ist stets um 4 größer als die Abszisse x der Punkte A_n. 2 P
Zeichnen Sie das Parallelogramm $A_1B_1C_1D_1$ für $x = -1{,}5$ und das Parallelogramm $A_2B_2C_2D_2$ für $x = 4$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

B 1.4 Zeigen Sie rechnerisch, dass für den Flächeninhalt A der Parallelogramme $A_nB_nC_nD_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: 3 P
$A(x) = [12 \cdot \log_3(x^2 + 13x + 42) - 24]$ FE.

B 1.5 Im Parallelogramm $A_3B_3C_3D_3$ liegt der Punkt D_3 auf der x-Achse. 3 P
Bestimmen Sie rechnerisch den Flächeninhalt des Parallelogramms $A_3B_3C_3D_3$.

B 1.6 Das Parallelogramm $A_4B_4C_4D_4$ hat einen Flächeninhalt von 16 FE. 4 P
Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes B_4.

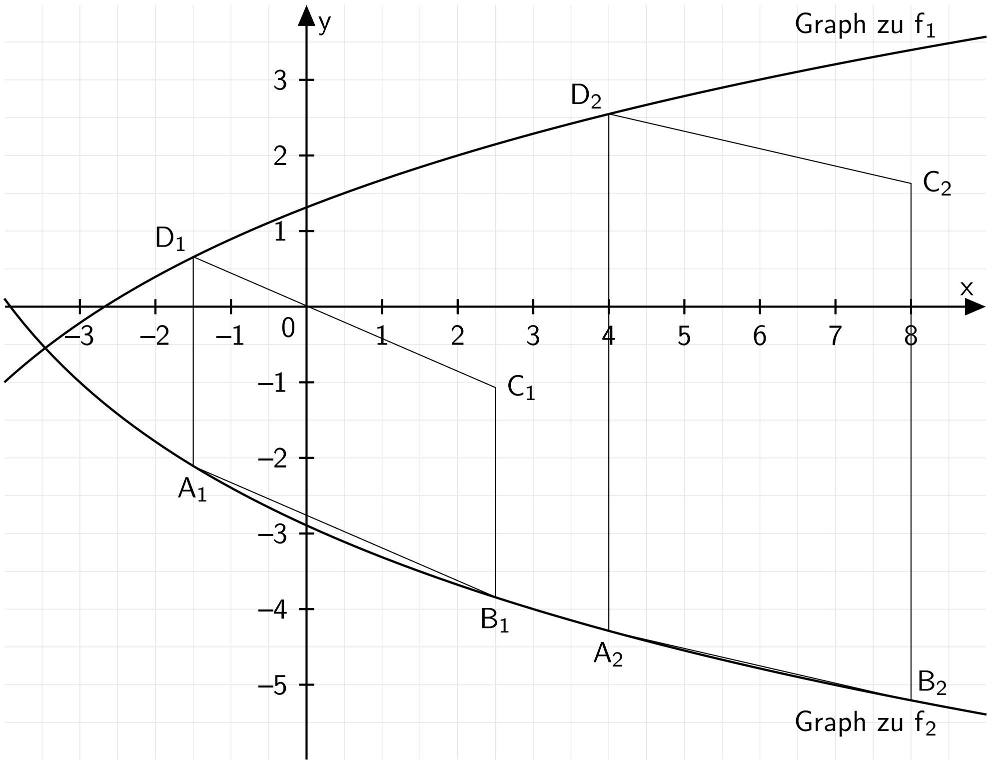
B 1.1 Eine Asymptote liegt vor, wo das Argument der Logarithmusfunktion gleich null wird:

$$x + 7 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -7$$

Die Gleichung des Asymptote lautet $\underline{\underline{h: x = -7}}$.

Graphische Darstellung des Graphen zu f_1 für $x \in [-4; 9]$:

(**Hinweis**: Das Koordinatensystem ist nicht maßstabsgetreu, da es für den Buchdruck skaliert wurde.)



B 1.2 Zunächst wird eine Spiegelung an der x-Achse, also an der Gerade $y = 0 = 0 \cdot x$ durchgeführt. Aus deren Steigung $m = 0 = \tan\alpha$ kann $\alpha = 0°$ ermittelt werden. Damit gilt für die Achsenspiegelung:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot 0°) & \sin(2 \cdot 0°) \\ \sin(2 \cdot 0°) & -\cos(2 \cdot 0°) \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ 3 \cdot \log_3(x+7) - 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x \\ -3 \cdot \log_3(x+7) + 4 \end{pmatrix}$$

Weiterhin wird eine Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ durchgeführt:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -3 \cdot \log_3(x+7) + 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ -3 \cdot \log_3(x+7) + 2 \end{pmatrix}$$

Demnach ist $x'' = x + 1$, also $x = x'' - 1$, was in y'' eingesetzt wird:

$$y'' = -3 \cdot \log_3(x+7) + 2 = -3 \cdot \log_3((x''-1)+7) + 2 = -3 \cdot \log_3(x''+6) + 2$$

Die Funktionsgleichung lautet $\underline{\underline{f_2: y = -3 \cdot \log_3(x+6) + 2}}$.

Graphische Darstellung siehe Teilaufgabe 1.1.

B 2.5 Setzt man die Gleichungen der Volumina beider Pyramiden gleich, so folgt:

$$
\begin{aligned}
& & V_{ABDS} &= V_{BDSP_3} \\
&\Longleftrightarrow & \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{MS}\right)\cdot\overline{AM} &= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{MS}\right)\cdot\overline{F_3P_3} \qquad \Big| : \left(\frac{1}{6}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{MS}\right) \\
&\Longleftrightarrow & \overline{AM} &= \overline{F_3P_3} \\
&\Longleftrightarrow & \overline{F_3P_3} &= 4{,}5\,\text{cm}
\end{aligned}
$$

Mithilfe der Berechnungsvorschrift für $\overline{F_nP_n}$ aus Teilaufgabe 2.4 kann nun der zugehörige Wert von φ ermittelt werden:

$$
\begin{aligned}
& & \overline{F_3P_3} &= 4{,}5\,\text{cm} & & \\
&\Longleftrightarrow & \frac{5{,}27\cdot\sin\varphi}{\sin(\varphi+35{,}84^\circ)} &= 4{,}5 & &\big| : 4{,}5 \\
&\Longleftrightarrow & \frac{1{,}1711\cdot\sin\varphi}{\sin(\varphi+35{,}84^\circ)} &= 1 & &\big| \cdot \sin(\varphi+35{,}84^\circ) \\
&\Longleftrightarrow & 1{,}1711\cdot\sin\varphi &= \sin(\varphi+35{,}84^\circ) & & \\
&\Longleftrightarrow & 1{,}1711\cdot\sin\varphi &= \sin\varphi\cos(35{,}84^\circ)+\cos\varphi\sin(35{,}84^\circ) & & \\
&\Longleftrightarrow & 1{,}1711\cdot\sin\varphi &= 0{,}8107\sin\varphi+0{,}5855\cos\varphi & &\big| -0{,}8107\sin\varphi \\
&\Longleftrightarrow & 0{,}3604\cdot\sin\varphi &= 0{,}5855\cos\varphi & &\big| : \cos\varphi \\
&\Longleftrightarrow & 0{,}3604\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} &= 0{,}5855 & &\big| : 0{,}3604 \\
&\Longleftrightarrow & \tan\varphi &= 1{,}6246 & & \\
&\Rightarrow & \underline{\underline{\varphi}} &\underline{\underline{\approx 58{,}38^\circ}} & &
\end{aligned}
$$

PERFEKT VORBEREITET AUF DEN MSA 10. Klasse Bayern 2022

ENTWICKELT VON PÄDAGOGEN

- Original-Prüfungsaufgaben mit Lösungen 2014 - 2021
- Anschauliche, ausführliche und nachvollziehbare Lösungswege
- Ideal zur Vorbereitung auf einzelne Arbeiten während des Schuljahres
- Übersicht zu den einzelnen Prüfungsthemen mit Seitenangabe
- Digitalisierte Original-Prüfungen, Schritt für Schritt vorgerechnet

Mathe I - Trainer für Realschule MSA 2022

DIGITALES COACHING

- Neue **Lernplattform** mit geschützem Mitgliederbereich
- Themenbezogene, kurze, verständliche Lernvideos
- Individuelles Online-Coaching
- Prüfungsvorbereitung Online
- Immer auf dem aktuellsten Stand

Alle weiteren Informationen auf www.lern.de

SCAN ME

Bestell-Nr. :
EAN 9783743000810

Realschule 10. Klasse | Mittlerer Schulabschluss | Bayern

ISBN 978-3-7430-0081-0

€ 11,90

9 783743 000810 >

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
lernverlag
Fürstenrieder Straße 52
80686 München
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de