

Inhaltsverzeichnis

1	Natürliche Zahlen und vollständige Induktion	1
1.1	Vollständige Induktion	1
1.2	Fakultät und Binomialkoeffizienten	2
1.3	Aufgaben	5
2	Reelle Zahlen	7
2.1	Die Körperstruktur von \mathbb{R}	7
2.2	Die Anordnung von \mathbb{R}	8
2.3	Die Vollständigkeit von \mathbb{R}	10
2.4	\mathbb{R} ist nicht abzählbar	16
2.5	Aufgaben	18
3	Komplexe Zahlen	20
3.1	Der Körper der komplexen Zahlen	20
3.2	Die komplexe Zahlenebene	22
3.3	Algebraische Gleichungen in \mathbb{C}	24
3.4	Unmöglichkeit einer Anordnung von \mathbb{C}	26
3.5	Aufgaben	26
4	Funktionen	28
4.1	Grundbegriffe	28
4.2	Polynome	32
4.3	Rationale Funktionen	35
4.4	Aufgaben	39
5	Folgen	41
5.1	Konvergenz von Folgen	41
5.2	Rechenregeln	43
5.3	Monotone Folgen	46
5.4	Eine Rekursionsfolge zur Berechnung von Quadratwurzeln ...	48

5.5	Der Satz von Bolzano-Weierstraß	50
5.6	Das Konvergenzkriterium von Bolzano-Cauchy. Nochmals die Vollständigkeit von \mathbb{R}	52
5.7	Uneigentliche Konvergenz	54
5.8	Aufgaben	55
6	Reihen	58
6.1	Konvergenz von Reihen	58
6.2	Konvergenzkriterien	60
6.3	Summierbare Familien	65
6.4	Potenzreihen	73
6.5	Aufgaben	76
7	Stetige Funktionen. Grenzwerte	80
7.1	Stetigkeit	80
7.2	Rechnen mit stetigen Funktionen	83
7.3	Erzeugung stetiger Funktionen durch normal konvergente Reihen	84
7.4	Stetige reelle Funktionen auf Intervallen. Der Zwischenwertsatz	87
7.5	Stetige Funktionen auf kompakten Mengen. Satz vom Maximum und Minimum	88
7.6	Anwendung: Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra	92
7.7	Stetige Fortsetzung. Grenzwerte von Funktionen	94
7.8	Einseitige Grenzwerte. Uneigentliche Grenzwerte	98
7.9	Aufgaben	101
8	Die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen	105
8.1	Definition der Exponentialfunktion	105
8.2	Die Exponentialfunktion für reelle Argumente	109
8.3	Der natürliche Logarithmus	112
8.4	Exponentialfunktionen zu allgemeinen Basen. Allgemeine Potenzen	114
8.5	Binomialreihen und Logarithmusreihe	116
8.6	Definition der trigonometrischen Funktionen	119
8.7	Nullstellen und Periodizität	121
8.8	Die Arcus-Funktionen	125
8.9	Polarkoordinaten	126
8.10	Geometrie der Exponentialabbildung. Hauptzweig des komplexen Logarithmus und des Arcustangens	127

8.11	Die Zahl π	132
8.12	Die hyperbolischen Funktionen	134
8.13	Aufgaben	135
9	Differentialrechnung	141
9.1	Die Ableitung einer Funktion	141
9.2	Ableitungsregeln	145
9.3	Mittelwertsatz und Schrankensatz	149
9.4	Beispiele und Anwendungen	152
9.5	Reihen differenzierbarer Funktionen	158
9.6	Ableitungen höherer Ordnung	161
9.7	Konvexität	164
9.8	Konvexe Funktionen und Ungleichungen	168
9.9	Fast überall differenzierbare Funktionen. Verallgemeinerter Schrankensatz	171
9.10	Begriff der Stammfunktion	175
9.11	Eine auf ganz \mathbb{R} stetige, aber nirgends differenzierbare Funktion	176
9.12	Aufgaben	178
10	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	184
10.1	Einführende Feststellungen	184
10.2	Der Eindeutigkeitssatz	185
10.3	Ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung	187
10.4	Berechnung einer partikulären Lösung bei speziellen Inhomogenitäten	192
10.5	Anwendung auf Schwingungsprobleme	194
10.6	Partikuläre Lösungen bei allgemeinen Inhomogenitäten. Erweiterung des Lösungsbegriffes	198
10.7	Aufgaben	202
11	Integralrechnung	205
11.1	Treppenfunktionen und ihre Integration	205
11.2	Regelfunktionen	207
11.3	Integration der Regelfunktionen über kompakte Intervalle ...	210
11.4	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Stammfunktionen zu Regelfunktionen	214
11.5	Erste Anwendungen	221
11.6	Integration elementarer Funktionen	223
11.7	Integration normal konvergenter Reihen	229

11.8	Riemannsche Summen	231
11.9	Integration über nicht kompakte Intervalle. Uneigentliche Integrale	234
11.10	Die Eulersche Summationsformel	239
11.11	Aufgaben	246
12	Geometrie differenzierbarer Kurven	251
12.1	Parametrisierte Kurven	251
12.2	Die Bogenlänge	256
12.3	Parameterwechsel	260
12.4	Krümmung ebener Kurven	262
12.5	Die Sektorfläche	266
12.6	Windungszahlen	269
12.7	Kurven in Polarkoordinaten	273
12.8	Geometrie der Planetenbewegung. Die drei Keplerschen Gesetze	276
12.9	Aufgaben	279
13	Elementar integrierbare Differentialgleichungen	283
13.1	Wachstumsmodelle. Lineare und Bernoullische Gleichungen ..	283
13.2	Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen	287
13.3	Nicht-lineare Schwingungen. Die Differentialgleichung $\ddot{x} = f(x)$	295
13.4	Aufgaben	301
14	Lokale Approximation von Funktionen. Taylorpolynome und Taylorreihen	304
14.1	Approximation durch Taylorpolynome	304
14.2	Taylorreihen. Rechnen mit Potenzreihen	308
14.3	Bernoulli-Zahlen und Cotangensreihe. Die Bernoulli-Polynome	312
14.4	Das Newton-Verfahren	315
14.5	Aufgaben	321
15	Globale Approximation von Funktionen. Gleichmäßige Konvergenz	324
15.1	Gleichmäßige Konvergenz	324
15.2	Vertauschungssätze	328
15.3	Kriterien für gleichmäßige Konvergenz	329
15.4	Anwendung: die Eulerschen Formeln für $\zeta(2n)$	333
15.5	Lokal gleichmäßige Konvergenz	335

15.6	Der Weierstraßsche Approximationssatz	337
15.7	Aufgaben	339
16	Die Gammafunktion	342
16.1	Die Gammafunktion nach Gauß	342
16.2	Charakterisierung der Γ -Funktion nach Bohr-Mollerup. Die Eulersche Integraldarstellung	346
16.3	Die Stirlingsche Formel	349
16.4	Aufgaben	352
17	Approximation periodischer Funktionen.	
	Fourierreihen	353
17.1	Der Weierstraßsche Approximationssatz für periodische Funktionen	353
17.2	Definition der Fourierreihen. Der Identitätssatz	355
17.3	Anwendung: die Partialbruchreihe des Cotangens	359
17.4	Punktweise Konvergenz nach Dirichlet	360
17.5	Die Besselsche Approximation periodischer Funktionen	365
17.6	Anwendung: Fourierreihen stückweise stetig differenzierbarer Funktionen	368
17.7	Konvergenz im quadratischen Mittel. Die Parsevalsche Gleichung	370
17.8	Anwendung: das isoperimetrische Problem	373
17.9	Wärmeleitung in einem Ring. Die Thetafunktion	374
17.10	Aufgaben	378
	Biographische Notiz zu Euler	381
	Literaturhinweise	382
	Bezeichnungen	384
	Namen- und Sachverzeichnis	386