

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	1
2 Einblick in die Werkstoffprüfung	1
2.1 Zugversuch	1
2.2 Druckversuch	5
2.3 Dauerschwingversuch	5
3 Spannung	6
3.1 Innere Kraftwirkungen	6
3.2 Spannungsvektor	7
3.3 Einachsiger Spannungszustand	8
3.4 Spannungskomponenten und Momentengleichgewicht	10
3.5 Spannungskomponenten und Spannungsvektor	12
3.6 Spannungsvektor und Spannungstensor bei Drehung des Bezugssystems	13
3.7 Hauptspannungen und Hauptspannungsrichtungen	14
3.8 Berechnung der Spannungskomponenten für beliebige Schnittflächen bei gegebenen Hauptspannungen	20
3.9 Darstellung des Spannungszustandes mit Hilfe der Mohrschen Kreise	23
3.10 Oktaederspannungen	24
3.11 Extremale Spannungen	26
3.12 Beispiel zum dreiachsigen Spannungszustand	28
3.13 Zweiachsige Spannungszustände	31
3.14 Anwendungen der Mohrschen Kreise bei zweiachsigen Spannungszuständen	33
3.15 Beispiele	39
3.15.1 Ermittlung der Hauptspannungen	39
3.15.2 Ermittlung der Schnittspannungen	39
3.16 Gleichgewichtsbedingungen	39
3.17 Homogener Spannungszustand	42
4 Formänderung	42
4.1 Verschiebungsvektor	42
4.2 Verzerrungstensor	43
4.3 Linearer Verzerrungstensor	47
4.4 Zusammenhang zwischen linearer Verzerrung und Drehung	47
4.5 Lineare Volumdehnung	50
4.6 Kompatibilität	51

4.7	Bezugnahme auf den undeformierten Körper bei geometrischer Linearisierung	52
5	Prinzip der virtuellen Arbeit	53
5.1	Prinzip der virtuellen Arbeit deformierbarer Kontinua mit linearer Verzerrung	53
5.2	Einführung quasi-starrer Oberflächenelemente	56
5.3	Arbeitsprinzip der virtuellen kinematischen Gruppe	58
5.4	Arbeitsprinzip der virtuellen statischen Gruppe	59
6	Linear-isotrope Elastizität	61
6.1	Linear-isotropes Elastizitätsgesetz für den einachsigen Spannungszustand	61
6.2	Linear-isotropes Elastizitätsgesetz für den dreiachsigen Spannungszustand	63
7	Linear-isotrope Thermoelastizität	65
7.1	Thermische Formänderung	65
7.2	Thermoelastische Formänderung	65
8	Verzerrungsarbeit	66
8.1	Verzerrungsarbeit bei Isotropie für einachsigen Zug	66
8.2	Verzerrungsarbeit bei Isotropie für den dreiachsigen Spannungszustand	68
9	Folgerungen aus dem Arbeitsprinzip	71
9.1	Sätze von CASTIGLIANO	71
9.2	Anwendung auf statisch unbestimmte Systeme	73
10	Steifigkeit, Nachgiebigkeit, virtuelle Arbeit und Superposition in der linearen Elastostatik	75
10.1	Steifigkeit, Nachgiebigkeit und virtuelle Arbeit	75
10.2	Superposition	77
11	Festigkeitshypothesen	78
11.1	Normalspannungshypothese	78
11.2	Schubhypothese	79
11.3	Oktaederschubhypothese oder Hypothese der Gestaltänderungsenergie	80
11.4	Effektivspannung und -dehnung	81
11.5	Zug oder Druck und Schub	84
11.6	Weitere Hypothesen	85
12	Zug und Druck	86
12.1	Prismatische Stäbe bei reiner Zugbeanspruchung	86
12.2	Stäbe mit veränderlichem Querschnitt	87
12.3	Stabverlängerung	88
12.4	Druckbeanspruchung	90
12.4.1	Kontaktspannungen in Druckflächen	90
12.4.2	Druckbeanspruchte schlanke Bauteile	91

12.5	Beispiele	92
12.5.1	Keilförmiger Stab	92
12.5.2	Konischer Stab	92
12.5.3	Wärmespannungen im beiderseits eingespannten Stab	93
12.5.4	Drei parallel eingespannte Stäbe	93
12.5.5	Stab im Fliehkraftfeld	95
13	Fachwerke	96
13.1	Bezeichnungen	96
13.2	Gleichgewicht	98
13.3	Formänderung	100
13.4	Stoffgesetz	101
13.5	Aufteilung der Kräfte	101
13.6	Prinzip der virtuellen Arbeit	102
13.7	Verzerrungsarbeit	104
13.8	Steifigkeit und Nachgiebigkeit	105
13.9	Anwendung der Sätze von CASTIGLIANO	106
13.10	Kinematisches Verfahren	107
13.11	Statisches Verfahren	109
13.12	Verfahren für statisch bestimmte Fachwerke	111
13.13	Beispiele	112
13.13.1	Beiderseits eingespannte Stabkette bei beliebiger Temperaturerhöhung und mit äußerer Kraft an beliebiger Stelle in Stabrichtung	112
13.13.2	Zweistabknoten	115
13.13.3	Räumlicher Dreistabknoten	116
13.13.4	Statisch unbestimmter Stabknoten	116
13.13.5	Einfach statisch unbestimmtes ebenes Fachwerk	117
13.13.6	Zweifach statisch unbestimmtes ebenes Fachwerk	123
13.13.7	Zweifach statisch unbestimmtes Raumfachwerk	126
14	Dünne Kreisringe	137
14.1	Gleichgewicht	137
14.2	Formänderung	138
14.3	Ring als Glied einer Schrumpfungverbindung	139
14.4	Rotierender Ring	140
14.5	Beispiele	140
14.5.1	Aufgeschrumpfter Ring	140
14.5.2	Schrumpfungverbindung aus zwei Ringen	141
15	Drehsymmetrische Membranschalen	143
15.1	Geometrie	143
15.2	Gleichgewicht	144
15.3	Drehsymmetrischer Spannungszustand	148
15.4	Drehsymmetrische Membranschale als kraftübertragendes Bauglied	150
15.5	Beispiele	153
15.5.1	Halbkugelschale unter Eigengewicht	153
15.5.2	Kegelschale unter Außendruck	154
16	Schub	155
16.1	Elastizitätsgesetz und Verzerrungsarbeit bei Schub	155

16.2	Schraub- und Nietverbindungen	155
16.2.1	Bolzenschub- und Lochleibungsbeanspruchung	155
16.2.2	Bolzenreihe bei Längsschub	156
16.2.3	Versteifungsblech	162
16.2.4	Unsymmetrisch belastetes ebenes Schraub- oder Nietfeld	162
16.3	Kontinuierliche Verbindungen	164
16.3.1	Parallele Schweißnähte oder Klebschichten bei Längsschub	165
16.3.2	Schweiß- oder Klebverbindung gleicher Festigkeit	167
16.3.3	Schweiß- oder Klebverbindung zweier Bleche oder Stäbe mit konstantem Querschnitt	168
16.3.4	Versteifung	170
16.3.5	Ebene Schweiß- oder Klebverbindung bei Belastung durch Kräfte in ihrer Ebene	171
16.4	Beispiele	173
16.4.1	Durch Bolzen befestigte Platte	173
16.4.2	Schweißverbindung zweier Stäbe durch zwei parallele Längsnähte	174
16.4.3	Angeschweißte Versteifung	174
16.4.4	Durch zwei parallele Schweißnähte angeschweißte und in ihrer Mittelebene belastete Platte	174
17	Biegung	175
17.1	Allgemeiner einachsiger Spannungszustand	175
17.2	Flächenträgheitsmomente bei Parallelverschiebung der Bezugsachsen	178
17.3	Flächenträgheitsmomente bei Drehung der Bezugsachsen	180
17.4	Beispiele	182
17.4.1	Kreis	182
17.4.2	Kreisring	183
17.4.3	Ellipse	183
17.4.4	Rechteck	184
17.4.5	Doppelsymmetrischer Kastenquerschnitt	184
17.4.6	I-Querschnitt	185
17.4.7	Symmetrischer Winkel	185
17.4.8	Dreieck	186
17.4.9	Unregelmäßige Querschnittsform	186
17.4.10	Dünnwandige Querschnitte	188
17.5	Biegung mit Normalkraft	192
17.5.1	Spannung bei zweiachsiger Biegung mit Normalkraft	192
17.5.2	Spannung bei einachsiger Biegung mit Normalkraft	193
17.5.3	Zulässige Beanspruchung, Tragfähigkeit und Dimensionierung	194
17.5.4	Nulllinie und Kern	195
17.5.5	Druck mit Biegung bei versagendem Zuggebiet	196
17.6	Beispiele	198
17.6.1	Dimensionierung eines Biegeträgers	198
17.6.2	Rechteckquerschnitt bei zweiachsiger Biegung mit Normalkraft	198
17.6.3	Kern des elliptischen Querschnittes	198
17.6.4	Kern des symmetrischen Winkels	200
17.6.5	Kern des Dreiecks	200

17.6.6	Einseitig eingespannter Träger	201
17.6.7	Unsymmetrischer Querschnitt bei exzentrischer Druckbelastung	201
17.7	Formänderung bei einachsiger Biegung	202
17.7.1	Verzerrungen und Verschiebungen bei reiner Biegung	202
17.7.2	Differentialgleichungen der einachsigen Biegung mit Querkraft	205
17.7.3	Arbeitsgleichung	209
17.7.4	Integraldarstellungen der Durchbiegung und des Biege winkels, sowie Kompatibilitätsbedingungen	211
17.7.5	Verfahren von MOHR	213
17.7.6	Virtuelle und wirkliche Verzerrungsarbeit	215
17.8	Beispiele	217
17.8.1	Einseitig eingespannter Stab mit Einzellast	217
17.8.2	Einseitig eingespannter Stab mit konstanter Streckenlast	218
17.8.3	Einseitig eingespannter Stab mit linear anwachsender Streckenlast	219
17.8.4	Beiderseits frei aufliegender Stab mit konstanter Streckenlast	220
17.8.5	Beiderseits eingespannter Stab mit konstanter Streckenlast	220
17.8.6	Beiderseits frei aufliegender Stab mit einer linear ansteigenden und einer konstanten Streckenlast	221
17.8.7	Beiderseits frei aufliegender Stab mit Einzellast	223
17.8.8	Beiderseits frei aufliegender Stab mit von den Auflagern zur Mitte linear ansteigender Streckenlast	224
17.8.9	Statisch bestimmt gestützter Träger mit Kragarm, belastet durch zwei Einzelkräfte	225
17.8.10	Gerberträger mit Einzellasten	226
17.8.11	Beiderseits frei aufliegender Träger mit veränderlichem Querschnitt unter zwei Einzellasten	227
17.9	Biegung von Stäben mit gekrümmter Mittellinie	228
17.9.1	Stäbe mit ebener Vorkrümmung	228
17.9.2	Verzerrungsarbeit	229
17.9.3	Verfahren für stark gekrümmte Stäbe	231
17.10	Beispiele	234
17.10.1	Halbkreisbogen bei statisch bestimmter Lagerung mit symmetrisch angreifender Einzellast	234
17.10.2	Halbkreisbogen bei statisch unbestimmter Lagerung	235
17.10.3	Parabelbogen bei statisch bestimmter Lagerung	237
17.10.4	Parabelbogen bei statisch unbestimmter Lagerung	238
17.10.5	Rahmen bei statisch bestimmter Auflagerung	241
17.10.6	Rahmen bei statisch unbestimmter Auflagerung	241
17.10.7	Zweistieliger Rahmen	242
17.10.8	Geschlossener Ring	243
17.10.9	Schwungrad	244
18	Torsion	248
18.1	Kreiszyklindrische Stäbe	248
18.2	Dünnwandige Stäbe mit zweifach zusammenhängendem Querschnitt	253
18.2.1	Gleichgewicht	253

18.2.2	Formänderung	255
18.3	Bestimmung des Drehpols	258
18.4	Dünnwandige Stäbe mit drei- oder mehrfach zusammenhängendem Querschnitt	259
18.5	Dünnwandige Stäbe mit einfach zusammenhängendem Querschnitt	263
18.6	Beispiele	266
18.6.1	Dünnwandiges Rohr konstanter Wandstärke mit Kreisquerschnitt	266
18.6.2	Doppelsymmetrischer Kastenträger	266
18.6.3	Einfach symmetrischer Kastenträger	267
18.6.4	Aus einem Halbkreis und einer Geraden bestehender Querschnitt konstanter Wandstärke	268
18.6.5	Dünnwandiger Träger mit dreifach zusammenhängendem Kastenquerschnitt konstanter Wandstärke	269
18.6.6	Schmaler elliptischer Querschnitt	269
18.6.7	Schmaler Rechteckquerschnitt	271
18.6.8	Schmaler Trapezquerschnitt	271
18.6.9	Querschnitt mit gerader Mittellinie und stückweise konstanter Wandstärke	271
18.6.10	Halbkreisprofil	272
18.6.11	Winkelprofil	273
18.6.12	U-Profil	273
18.6.13	T-Profil	274
18.6.14	Profil mit Verzweigungspunkt	274
18.6.15	Z-Profil	275
18.6.16	I-Profil	276
18.7	Wölbfreie Torsion	277
18.7.1	Dünnwandige zweifach zusammenhängende wölbfreie Querschnitte	277
18.7.2	Dünnwandige drei- und mehrfach zusammenhängende wölbfreie Querschnitte	278
18.7.3	Dünnwandige einfach zusammenhängende Querschnitte	281
18.8	Beispiele	281
18.8.1	Dreifach zusammenhängender wölbfreier Querschnitt . .	281
18.8.2	Vierfach zusammenhängender wölbfreier Querschnitt . .	282
18.9	Wölbbehinderte Torsion	282
18.9.1	Grundgleichungen zur profiltreuen wölbbehinderten Torsion	282
18.9.2	Näherungslösung zur profiltreuen wölbbehinderten Torsion	283
18.10	Beispiele	285
18.10.1	Einseitig wölbverhindert eingespannter tordierter Stab	285
18.10.2	Einseitig wölbverhindert eingespannter Stab mit am anderen Ende unter Wölbverhinderung eingeleitetem Torsionsmoment	286
18.10.3	Vergleich eines wölbfreien Kastenträgers mit einem I-Träger bei verhinderter Endverwölbung	286
18.10.4	Beiderseits wölbverhindert eingespannter Stab mit Einzelmoment	287
18.10.5	Einseitig wölbverhindert eingespannter Stab mit konstantem Streckenmoment	288

18.10.6	Beiderseits wölbverhindert eingespannter Stab mit konstantem Streckenmoment	289
19	Querschub	290
19.1	Vollquerschnitte	290
19.2	Beispiele	292
19.2.1	Rechteckquerschnitt	292
19.2.2	Kreisquerschnitt	293
19.2.3	Elliptischer Querschnitt	293
19.2.4	I-Querschnitt	293
19.3	Dünnwandige Querschnitte	293
19.3.1	Einfach zusammenhängende dünnwandige Querschnitte	293
19.3.2	Zweifach zusammenhängende dünnwandige Querschnitte	294
19.3.3	Drei- und mehrfach zusammenhängende dünnwandige Querschnitte	295
19.3.4	Schubmittelpunkt und Drehpol	296
19.4	Beispiele	298
19.4.1	U-Profil	298
19.4.2	Halbkreisprofil	298
19.4.3	Dünnwandiges Rohr mit Kreisquerschnitt	299
19.4.4	Kastenquerschnitt	299
19.4.5	Dreifach zusammenhängender Kastenquerschnitt konstanter Wandstärke	300
19.5	Querschubdeformation bei Biegung	302
20	Stäbe unter kombinierter Belastung	303
20.1	Virtuelle Arbeit bei kombinierter Belastung	303
20.2	Beispiele	304
20.2.1	Einseitig eingespannter kreisförmig gekrümmter Stab mit Einzellast	304
20.2.2	Beiderseits eingespannter Kreisbogenstab mit Einzellast	305
20.2.3	Spiralfeder	306
21	Kräftepotential und Stabilität	307
21.1	Potential der äußeren Kraftgrößen	307
21.2	Potential der Zwangskraftgrößen	308
21.3	Potential der elastischen Kraftgrößen	309
21.4	Gesamtpotential und Gleichgewicht	310
21.5	Stabilität, Labilität und Indifferenz	310
21.6	Beispiele	311
21.6.1	Drehbar gelagerte Stange mit zwei Gewichten	311
21.6.2	Drehbar gelagerter, durch Federn gestützter starrer Druckstab	313
21.6.3	Starrer Druckstab mit seitlichen Federn und einem Zwischengelenk	315
21.6.4	Starrer Druckstab mit seitlichen Federn und zwei Zwischengelenken	315
21.7	Knickung	316
21.7.1	Knicken des druckbeanspruchten elastischen Stabes . .	316
21.7.2	Verschiedene Auflagerungsarten	319

XII

Inhaltsverzeichnis

21.7.3	Krafteinleitungs- und Herstellungsungenauigkeiten . .	320
21.7.4	Schlankheitsgrad und ω -Verfahren	321
22	Berücksichtigung der Abweichungen vom linearen Elasti- zitätsgesetz	323
Anhang:	Beispiele für Walzprofile	324
Schrifttum		325
Sachverzeichnis		328