Per Anhalter durch die Mathematik

der FOS/BOS 12 NT
Bayern, 21/22

Autoren: Christoph Kunkel, Uli Ludwig, Fabian Dörr
2. Auflage

Herstellung: WIRmachenDRUCK GmbH, Backnang
ISBN: 978-3-949756-10-8
www.kunkelverlag.de

Inhaltsverzeichnis

Hinweise

Spendenaktion

Für jedes verkaufte Buch erhält unser Partner, der Bundesverband Deutsche Kindertafel e. V, im Rahmen einer Spendenaktion 0,50 €. Wir wollen damit ihre wertvolle und wichtige Arbeit unterstützen. Hierzu ein kurzes Statement:

„Der Bundesverband Deutsche Kindertafel e. V. ist Partner des Kunkel Verlages beim Projekt „Per Anhalter durch die Mathematik“. Wir freuen uns über die Zusammenarbeit, denn unser Hauptziel ist die Unterstützung der Kinder- und Jugendfürsorge lokal wie überregional und bundesweit! Bei der Arbeit des Bundesverbandes Deutsche Kindertafel e. V. steht das Wohl von Menschen im Vordergrund.

Ihr Stefan Labus,
geschäftsführender Vorstand des Bundesverbandes Deutsche Kindertafel e. V.“

Mehr Infos unter www.deutsche-kindertafel.eu.

Anpassungen durch Corona

Aufgrund der Corona-Lage wurden für das Schuljahr 2021/22 die Prüfungsinhalte für die Fachabiturprüfung angepasst. In der nachfolgenden Tabelle sind diejenigen Aufgaben mit zugehöriger Begründung aufgelistet, die durch diese Anpassungen nicht mehr prüfungsrelevant sind.

Abkürzungen: T = Teil/Aufgabenteil , A = Analysis , S = Stochastik
P = Pizzeria „Mama Mia“ , E = Elektohersteller „Volt“

Beispiel 2019-T2-AI-2: Abschlussprüfung 2019 – Teil 2 – Analysis I – Aufgabe 2
⇒ Angaben zu finden auf Seite 2019-11

Begründung	**Aufgaben**
Verknüpfung einer Exponentialfunktion mit einer linearen oder quadratischen Funktion. Lehrplan: LB 3 (FOS) bzw. LB 4 (BOS)	OhHiMi: A-1.2, A-1.3, A-2.2 MiHiMi: A komplett Themen: P-A-2, P-A-3, E-A-3 2019: T1-A-3, T2-AI-2, T2-AII-2, T2-AII-3 2020: T2-AI-1, T2-AII-2

Keine Gewähr für Aktualität (Stand 18.06.2021)! Bitte besuche regelmäßig die Seite des ISB (https://www.isb.bayern.de/berufliche-oberschule/uebersicht/) und überprüfe, ob Veränderungen an den Anpassungen vorgenommen wurden. Falls du dir doch mal unsicher sein solltest, frage deine Lehrkraft, ob sich etwas geändert hat.

Vorwort

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler,

im Gegensatz zu den meisten Büchern, die lösungsorientiert arbeiten, lautet unser Leitsatz „der Weg ist das Ziel“. Wir möchten euch nicht einfach nur die Lösungen mit direktem Weg dorthin präsentieren, unser Anspruch ist es vielmehr, euch den Lösungsprozess selbst näher zu bringen. Ihr werdet systematisch an die Lösungen herangeführt und unter didaktischen Prinzipien auf diesem Weg unterstützt. Jeder Lösungsschritt wird somit genau erläutert und begründet. Wenn sich die Aufgabenstellung anbietet, wird unser Lösungsweg auch immer mittels Skizzen veranschaulicht, um so den Zugang zu den Argumentationen zu erleichtern.

Unsere Intention ist es, euch mit diesem Buch dabei zu begleiten, die Mathematik und ihre Anwendungen, die hinter den Aufgaben stecken, zu verstehen und diese dann vor allem auch auf andere Aufgaben übertragen zu können. Auf diese Weise seid ihr fundiert auf die Abschlussprüfung vorbereitet und in der Lage, das Gelernte souverän anzuwenden.

Euch stehen in diesem Buch nicht nur die kompletten Abschlussprüfungen der letzten Jahre zur Verfügung, zudem haben wir komplette Aufgabenserien für euch entwickelt, die den gesamten neuen LehrplanPLUS abdecken. Diese umfassen Aufgabenbereiche, sowohl mit, als auch ohne Hilfsmittel. Da kontextbezogenes Lernen dauerhafte Lernfortschritte ermöglicht, haben wir einen großen Teil der Aufgaben in unterschiedliche thematische Kontexte zusammengefasst. Der rote Faden, der durch die Verknüpfung der Aufgaben entsteht, ebnet den Weg vom abstrakten Denken bis hin zum praktischen Nutzen der Mathematik.

Wir wünschen euch viel Erfolg bei der anstehenden Prüfung und hoffen, dass wir euch mit diesem Buch auf dem Weg dorthin unterstützen können.

Das Autorenteam.

Fehler gefunden?

Wie in jedem Buch versteckt sich der ein oder andere Fehler trotz sorgfältigster Suche. Solltest du einen Fehler gefunden haben, melde ihn uns einfach direkt per Mail an fehlersuche@kunkelverlag.de. Unter allen Einsendungen zu den aktuellen Büchern des Schuljahres 2021/22 verlosen wir am 31.07.2022 einen 25 €-Gutschein, den du dann auf der Verkaufsplattform Amazon einlösen kannst. Bitte schicke uns dazu den vollständigen Titel des Buches, die genaue Seitenbezeichnung und ein Foto, auf dem du den Fehler markiert hast. Wir freuen uns über jeden Fehler, den du findest.
Bei Fragen und Anregungen kontaktiere uns gerne auf www.kunkelverlag.de.
Viel Spaß beim Suchen und viel Erfolg bei deinen Prüfungen!

Übungsaufgaben ohne Hilfsmittel

Analysis OH – Aufgabe 1

1.1.0 Der Graph der ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ steigt nur im Intervall $]-2;4[$ und schneidet die x-Achse bei $x = 6$. Außerdem gilt für den Funktionswert an der Stelle x_0, an dem der Graph der Funktion am stärksten steigt, $f(x_0) = -10$.

1.1.1 Ermitteln Sie den Funktionsterm von f und bestimmen Sie außerdem den Wendepunkt des zugehörigen Graphen G_f von f ohne Zuhilfenahme der zweiten Ableitungsfunktion.
$\left[\text{mögliches Ergebnis: } f(x) = -x^3 + 3x^2 + 24x - 36\right]$

1.1.2 Bestimmen Sie Art und Lage aller Extrempunkte von f.

1.1.3 Zeichnen Sie G_f unter der Voraussetzung, dass die Funktion f zwei weitere Nullstellen erster Ordnung bei $x_2 \approx -4{,}4$ und $x_3 \approx 1{,}4$ besitzt (muss nicht gezeigt werden), in ein kartesisches Koordinatensystem für $-5 \le x \le 7$ ein. Nutzen Sie dafür die folgenden Maßstäbe:
x-Achse: $1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$
y-Achse: $1\,\text{LE} = 0{,}5\,\text{mm}$

1.2.0 Die erste Ableitungsfunktion f´ von f bildet mit einer weiteren Funktion die neue Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{3} f'(x) \cdot e^{-(x-4)}$ mit ihrem Graphen G_g.

1.2.1 Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D_g von g.

1.2.2 Geben Sie den Funktionsterm von g an und bestimmen Sie damit alle Nullstellen von g.

1.2.3 Bestimmen Sie die Art aller Extrempunkte von G_g. Die Lage der Punkte muss nicht bestimmt werden.

$\left[\text{Hinweis: } \sqrt{10} \approx 3\right]$

$\left[\text{Teilergebnisse: } x_4 \approx -1;\ x_5 \approx 5\right]$

1.2.4 Untersuchen Sie das Verhalten von G_g an den Rändern von D_g.

1.3.0 Betrachten Sie nun die Funktion $G: x \mapsto -(8-x^2)e^{-x+4}$ mit maximalem Definitionsbereich $D_G = \left[2^{1,5}; 4\right]$.

1.3.1 Zeigen Sie, dass es sich bei G um eine Stammfunktion von g auf D_G handelt.

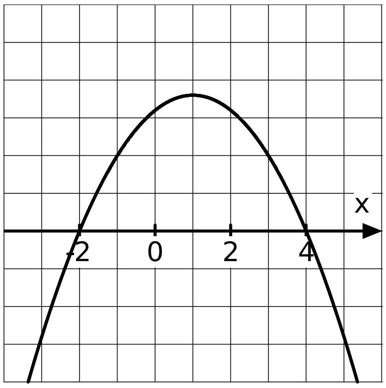
1.3.2 Berechnen Sie den Wert des Integrals von g über dem gesamten Definitionsbereich von G.

1.3.3 Erläutern Sie, ob es sich bei diesem Wert auch um den Inhalt der Fläche handelt, den G_g mit der x-Achse in D_G einschließt.

Lösungsvorschlag zu Analysis OH – Aufgabe 1

1.1.1 Leitet man eine ganzrationale Funktion ab, so reduziert sich ihr Grad um 1. Die Ableitungsfunktion f´ muss demnach eine quadratische Funktion und ihr Graph eine Parabel sein. Da G_f nur im Intervall $[-2;4]$ steigt, muss er in den Intervallen $]-\infty;-2]$ und $[4;\infty[$ fallen.

Mit diesen Informationen können wir bereits den Graphen $G_{f'}$ von f´ skizzieren.



Der Extrempunkt einer Parabel ist gleichzeitig ihr Scheitelpunkt. In unserem Fall ist das ein Hochpunkt. Die Lage des Scheitels wird durch die beiden Nullstellen definiert, denn er liegt immer genau zwischen ihnen. Wie man auch an der Skizze erkennen kann, muss er sich bei $x_S = 1$ befinden.

In faktorisierter Form lässt sich f´ durch den Term $f'(x) = a(x+2)(x-4)$ mit dem unbekannten Leitkoeffizienten $a \in \mathbb{R}$ ausdrücken. Um auf f zu kommen, müssen wir f´ lediglich integrieren. Wir erhalten daraus:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int a(x+2)(x-4)dx = a\cdot\int x^2-2x-8\,dx = a\left(\tfrac{1}{3}x^3-x^2-8x\right)+c$$

Wichtig ist, dass wir die Integrationsvariable c nicht vergessen, da das Integral unbestimmt ist. Nun haben wir für f einen Term mit zwei Unbekannten. Demnach brauchen wir auch zwei Gleichungen, um diese eindeutig bestimmen zu können.

Wir kennen bereits den Wendepunkt von G_f. Da die Wendestelle einer Funktion immer ein Extremstelle ihrer Ableitungsfunktion ist, muss es sich bei x_0 auch um x_S handeln. Daraus erhalten wir die Gleichung:

$$f(x_S) = f(1) = -10 \Leftrightarrow a\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1^3-1^2-8\cdot1\right)+c = -10 \Rightarrow \text{I}: -\frac{26}{3}a+c = -10$$

Aus der gegebenen Nullstelle bei $x_1 = 6$ erhalten wir eine weitere:

$$f(6) = 0 \Leftrightarrow a\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot6^3-6^2-8\cdot6\right)+c = 0 \Rightarrow \text{II}: -12a+c = 0$$

Da beide Gleichungen im Koeffizienten von c übereinstimmen, können wir $\text{II}-\text{I}$ rechnen und erhalten: $-12a+\frac{26}{3}a = 10 \Leftrightarrow -\frac{10}{3}a = 10 \Leftrightarrow a = -3$

Das a eingesetzt in II ergibt $c = -36$. Somit erhalten wir für f:

$$f(x) = -3\cdot\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-8x\right)-36 = -x^3+3x^2+24x-36$$

1.1.2 Die Hauptarbeit ist in 1.1.1 eigentlich schon getan. Wir haben bereits f´ skizziert und die Monotonieintervalle angegeben. Die Funktion f hat bei $x = -2$ einen Tiefpunkt, da f´ dort von fallend auf steigend wechselt und bei $x = 4$ einen Hochpunkt, da f´ dort von steigend auf fallend wechselt. Setzen wir die Extremstellen in f ein, so erhalten wir:

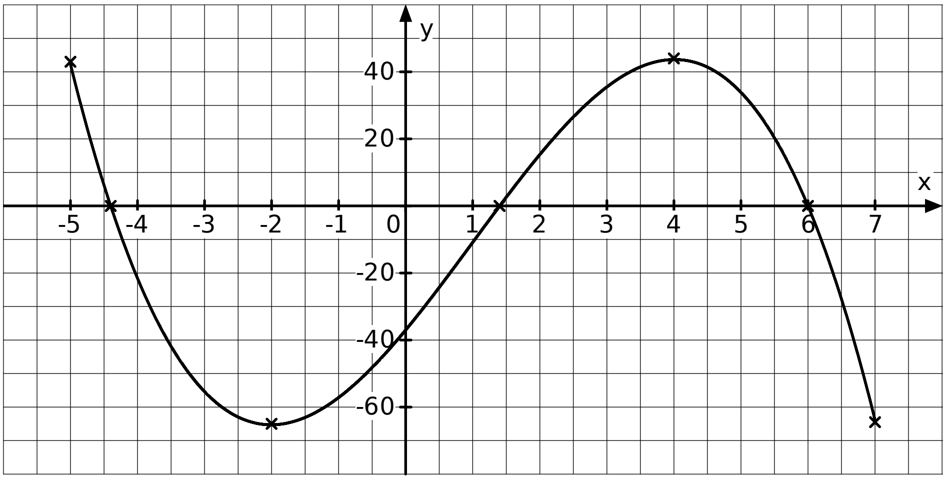
$f(-2) = -(-2)^3 + 3\cdot(-2)^2 + 24\cdot(-2) - 36 = -64$ ⇒ TIP(-2|-64)

$f(4) = -(4)^3 + 3\cdot(4)^2 + 24\cdot(4) - 36 = 44$ ⇒ HOP(4|44)

1.1.3 Mit den zusätzlichen Nullstellen und den Randwerten von f lässt sich der Graph leicht zeichnen. (Maßstab beachten!)

$f(7) = -(7)^3 + 3\cdot(7)^2 + 24\cdot(7) - 36 = -64$

$f(-5) = -(-5)^3 + 3\cdot(-5)^2 + 24\cdot(-5) - 36 = 44$



1.2.1 Die Funktion g besteht aus einem ganzrationalen und einem e-Teil. Da beide Teile maximal auf ganz ℝ definiert sind, gilt $D_g = \mathbb{R}$.

1.2.2 Da die e-Funktion keine Nullstellen liefert, bleibt nur f´ dafür übrig, von der wir die Nullstellen sogar schon kennen, nämlich bei $x = -2$ und bei $x = 4$. Daher müssen das gleichzeitig auch die Nullstellen von g sein.

Mit $f'(x) = -3x^2 + 6x + 24$ folgt für den Funktionsterm von g:

$$g(x) = \frac{1}{3}(-3x^2 + 6x + 24)e^{-(x-4)} = (-x^2 + 2x + 8)e^{-x+4}$$

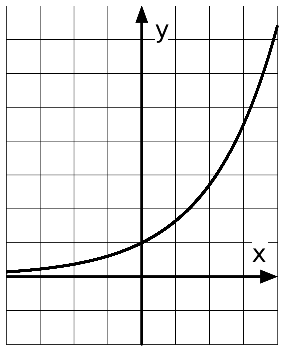
1.2.3 Extrempunkte besitzen immer eine waagerechte Tangente, haben also die Steigung „0“. Somit müssen wir die Nullstellen von g´, der ersten Ableitungsfunktion von g, ermitteln. Am Funktionsterm von g können wir erkennen, dass g ist ein Produkt von Funktionen ist. Für die Ableitung benötigen wir also die Produktregel. Da zusätzlich noch ein e-Teil vorhanden ist, dürfen wir auch die Kettenregel nicht vergessen.

$$g'(x) = (-2x+2)e^{-x+4} + (-x^2+2x+8)e^{-x+4}\cdot(-1) = (-2x+2+x^2-2x-8)e^{-x+4}$$
$$= (x^2-4x-6)e^{-x+4}$$

Mit Hilfe der Mitternachtsformel können wir die beiden Lösungen des quadratischen Teils berechnen. Mit dem Hinweis $\sqrt{10} \approx 3$ erhalten wir:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}\cdot\sqrt{10}}{2} = \frac{4 \pm 2\cdot\sqrt{10}}{2} = 2 \pm \sqrt{10}$$
$$\Rightarrow\ x_1 = 2+\sqrt{10} \approx 2+3 = 5 \text{ und } x_2 = 2-\sqrt{10} \approx 2-3 = -1$$

1.2.4 Das Verhalten des Graphen an den Rändern von D_g bestimmen wir über den Grenzwert der Funktion an der unteren und oberen Grenze von D_g. Als Hilfe können wir uns die normale e-Funktion skizzieren.



Da für den quadratischen Teil $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^2+2x+8) \to -\infty$ und für den e-Teil $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+4} = e^{\infty} \to \infty$ gilt, folgt für g

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^2+2x+8)e^{-x+4} \to -\infty\ .$$

In positiver Richtung gilt für den quadratischen Teil $\lim\limits_{x\to\infty}(-x^2+2x+8) \to -\infty$ und für $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x+4} = e^{-\infty} \to 0^+$.

Daraus folgt $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (-x^2+2x+8)e^{-x+4} \to 0^-$.

Da die e-Funktion in einem Produkt von Funktionen immer „gewinnt“, stellt sie auch den Wert des Grenzwerts. Sein Vorzeichen hingegen wird aus den Vorzeichen der beteiligten Funktionen gebildet.

1.3.1 Um zu zeigen, dass es sich bei G um eine Stammfunktion von g handelt, können wir G einfach ableiten und prüfen, ob dabei g entsteht. Vorher können wir das „-“ noch mit in die Klammer ziehen, damit das Ableiten etwas einfacher wird: $G(x) = -(8-x^2)e^{-x+4} = (x^2-8)e^{-x+4}$

Wie in der Aufgabe vorher, immer an Produkt- und Kettenregel denken und nicht vergessen, den e-Teil auszuklammern.

$G'(x) = (2x)e^{-x+4} + (x^2-8)e^{-x+4} \cdot (-1) = (-x^2+2x+8)e^{-x+4} = g(x) \Rightarrow$ Passt!

Da der maximale Definitionsbereich für G ebenfalls $\mathbb{R}$ ist, kann die Einschränkung auf $D_G = [2^{1,5};\ 4]$ ohne Probleme erfolgen, womit gezeigt ist, dass es sich bei G um eine Stammfunktion von g auf D_G handelt.

1.3.2 Den Wert des gesuchten Integrals erhalten wir, indem wir die Grenzen des Integrals mit den Grenzen des Definitionsbereichs gleichsetzen.

$$\int_{2^{1,5}}^{4} g(x)dx = G(4) - G(2^{1,5}) = (4^2-8)e^{-4+4} - ((2^{1,5})^2-8)e^{-(2^{1,5})+4}$$

$$= (16-8)e^0 - (8-8)e^{-\sqrt{2^3}+4} = 8 - 0 \cdot e^{-\sqrt{2^3}+4} = 8 - 0 = 8$$

Anmerkung: $2^{1,5} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt{2^3}$ und $(2^{1,5})^2 = 2^{1,5 \cdot 2} = 2^3 = 8$

1.3.3 Integral und Fläche sind genau dann dasselbe, wenn sich zwischen Ober- und Untergrenze des Integrals keine Nullstelle befindet. Bei den Grenzen selber darf es sich jedoch um Nullstellen handeln.

Die beide Nullstellen von g sind $x = -2$ und $x = 4$. Weil $x = -2$ nicht in D_G liegt und $x = 4$ gerade die Obergrenze von D_G ist, handelt es sich bei dem Integral also tatsächlich auch um die Fläche.