2022 BMT

Bayerischer Mathematik-Test

MEHR ERFAHREN

Gymnasium Bayern

Mathematik 10. Klass

STARK

Inhalt

Bayerischer Mathematik-Test 2020

Für das Jahr 2020 können keine Original-Aufgaben abgedruckt werden, da der BMT an allen bayerischen Gymnasien aufgrund des Corona-Virus abgesagt wurde.

Bayerischer Mathematik-Test 2021

Autor: Verlagsredaktion

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

in Bayern müssen sich alle Gymnasiasten der **10. Jahrgangsstufe** dem **zentralen Bayerischen Mathematik-Test (BMT)** stellen. Das Testergebnis zählt entweder als mündliche Note oder wird zusammen mit einem schulinternen zweiten Test als Schulaufgabe gewertet. Im BMT soll geprüft werden, inwieweit dein **Grundwissen** in Mathematik aus den vergangenen Klassen noch präsent ist.

Der BMT findet meist in einer der ersten vollen Schulwochen des neuen Schuljahres statt. Mit diesem Buch kannst du deine Kenntnisse aus den **vergangenen Schuljahren** auffrischen und dich auf die spezielle Situation des Tests vorbereiten. Das Buch enthält die **BMTs der vergangenen Jahre** mit **ausführlichen Erläuterungen der Lösungen**. Einige Inhalte dieser BMTs sind aufgrund einer Lehrplanänderung für die kommenden BMTs nicht mehr relevant. (Ausführliche Informationen dazu findest du bei den Hinweisen.) Dagegen können andere Inhalte Gegenstand des Tests sein, die bis zum BMT im Jahr 2021 nicht gefragt wurden. Zur Einübung dieser Inhalte enthält das Buch zusätzliche Übungsaufgaben.

Jeder Test ist in die zwei Aufgabengruppen **A und B** unterteilt. Gruppe B unterscheidet sich von Gruppe A – wie du es aus der Schule gewohnt bist – meist nur durch andere Zahlen oder Bezeichnungen. Die Lösungen zur **Gruppe A** sind **ausführlich** erklärt, damit du Schritt für Schritt den richtigen Lösungsweg trainieren und deinen Wissensstand durch Üben entscheidend verbessern kannst.

Um zu sehen, ob du eventuelle Lücken dauerhaft schließen konntest, solltest du einige Zeit verstreichen lassen und dann auch **Gruppe B** des betreffenden Jahrgangs bearbeiten. Hier sind die Lösungen kürzer gefasst, sodass sie sich rasch mit deinen Rechenergebnissen vergleichen lassen. Auf diese Weise kannst du dich ganz gezielt und umfassend vorbereiten und dem Test gelassen entgegensehen.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen für den BMT 2022 vom Kultusministerium bekannt gegeben werden, findest du aktuelle Informationen dazu im Internet unter:
https://www.pearson.de/schule/themen/alle-themen/zentrale-abitur-und-abschlusspruefungen

Wir wünschen dir viel Freude bei der Arbeit mit diesem Buch und den erwünschten Erfolg beim nächsten BMT.

Dein

Stark Verlag

Aufgabe 1

Geben Sie jeweils Minimum, Maximum, Spannweite und Median der folgenden Datenreihen an.

a) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7

b) 1; 2; 2; 3; 3; 3

c) 1; 3; 5; 5; 7; 1

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe geht es um die Datenreihe 2; 2; 3; 3; 5; 6; 8.

a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel (d. h. den Durchschnitt) und den Median.

b) Ändern Sie einen Datenwert so ab, dass der Median gleich bleibt und sich das arithmetische Mittel stark vergrößert.

Aufgabe 3

Die Tabelle gibt für die europäischen Länder Finnland, die Slowakei und Deutschland Auskunft über das Vermögen in 1 000 Euro je Haushalt und den Anteil der Hausbesitzer.

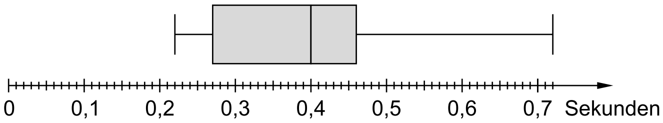
	Median	Durchschnittsvermögen	Anteil der Hausbesitzer
Finnland	86	162	74 %
Slowakei	61	80	90 %
Deutschland	51	195	44 %

eigene Darstellung, Daten nach: EZB, Eurostat

Das Durchschnittsvermögen übersteigt das Medianvermögen mehr oder weniger stark.
Beschreiben Sie, was dies im Anwendungszusammenhang bedeutet.
Stellen Sie eine Vermutung über den Zusammenhang zum Anteil der Hausbesitzer auf.

Aufgabe 4

Lena hat mithilfe einer App in mehreren Versuchen ihre jeweilige Reaktionszeit bestimmt. Anschließend hat sie zu dieser Datenreihe den folgenden Boxplot erstellt.



a) Entnehmen Sie dem Boxplot die folgenden Kenngrößen.

Minimum: ____________ Maximum: ______________ Spannweite: ______________

1. Quartil: _____________ 2. Quartil: _______________ 3. Quartil: ________________

b) Beschreiben Sie, wie Lena die Quartile bestimmt hat. Den Begriff des Medians müssen Sie nicht erklären.

Lösungen

Aufgabe 1

a) **Minimum: 1**
Maximum: 7
Spannweite: 6
Median: 4

Hinweise und Tipps

Das Minimum ist der kleinste Datenwert, das Maximum der größte.
Die Spannweite ist die Differenz aus Maximum und Minimum, hier also $7 - 1 = 6$.
Der Median soll grundsätzlich eine geordnete Datenreihe in zwei gleich große Hälften zerlegen. „Gleich groß" bedeutet: mit der gleichen Anzahl an Daten. Die Daten der unteren, „ärmeren" Hälfte haben höchstens den Wert des Medians, die Daten der oberen, „reicheren" Hälfte haben mindestens den Wert des Medians. Der Median selbst gehört weder der unteren noch der oberen Hälfte an.
Es liegt eine geordnete Datenreihe vor und die Anzahl der Daten ist ungerade. Der Median ist dann der Datenwert in der Mitte.

b) **Minimum: 1**
Maximum: 3
Spannweite: 2
Median: 2,5

Es liegt wieder eine geordnete Datenreihe vor. Die Anzahl der Daten ist aber gerade. In der Mitte stehen die Datenwerte 2 und 3. In diesem Fall ist das arithmetische Mittel dieser Datenwerte der Median.
Beachten Sie, dass die Datenwerte 2 und 3 mehrfach auftreten.

c) **Minimum: 1**
Maximum: 7
Spannweite: 6
Median: 4

Die Daten müssen zunächst geordnet werden:
1; 1; 3; 5; 5; 7
Da die Anzahl der Daten gerade ist, ist der Median das arithmetische Mittel aus 3 und 5, also 4.

Aufgabe 2

a) **Arithmetisches Mittel**:
$$\frac{2+2+3+3+5+6+8}{7} = \frac{29}{7} = \mathbf{4\frac{1}{7}}$$
Median: 3

Hinweise und Tipps

$$\text{Arithmetisches Mittel} = \frac{\text{Summe der Datenwerte}}{\text{Anzahl der Daten}}$$

Da die Anzahl der Daten ungerade ist, steht in der Mitte der geordneten Datenreihe der Datenwert 3.

b) Z. B.:
2; 2; 3; 3; 5; 6; **700**

Ändert man nur das Maximum ab, so bleibt der Median sicher erhalten. Um das arithmetische Mittel zu vergrößern, muss man nur das Maximum größer machen.
In der neuen Datenreihe ist „700" ein sogenannter Ausreißer. Ausreißer beeinflussen in der Regel das arithmetische Mittel, nicht aber den Median.

Aufgabe 3

Je **stärker** das **Durchschnittsvermögen das Medianvermögen übersteigt**, desto **höher** ist das **Vermögen der reicheren Hälfte** im Vergleich zum Vermögen der ärmeren Hälfte.
Dies ist im Vergleich der drei Länder besonders ausgeprägt in Deutschland. Es könnte an dem **geringen Anteil an Hausbesitzern** liegen.

Hinweise und Tipps

Das Medianvermögen zerlegt die Haushalte in zwei gleich große Hälften: in die der ärmeren, deren Vermögen höchstens so groß wie das Medianvermögen ist, und in die der reicheren, deren Vermögen mindestens so groß wie das Medianvermögen ist. Ausreißer nach oben, also besonders reiche Haushalte, treiben das Durchschnittsvermögen nach oben.
Über die absolute Höhe des Vermögens der einzelnen Länder ist damit noch nichts ausgesagt: ärmere Haushalte in Deutschland können ein höheres Vermögen haben als reichere Haushalte in der Slowakei.

Bayerischer Mathematik-Test 2021
10. Jahrgangsstufe Gymnasium, Gruppe A

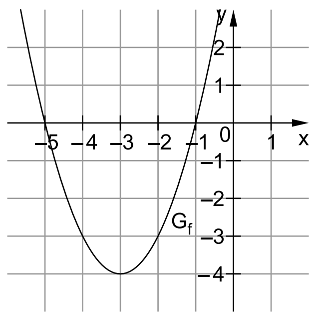
Aufgabe 1

a) Geben Sie für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Lösung der Gleichung $\frac{2}{x} = 3$ an. / 1

b) Bestimmen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Lösungen der Gleichung $2x^2 - 5x - 3 = 0$. / 2

Aufgabe 2

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f\colon x \mapsto (x+3)^2 - 4$ hat genau zwei Nullstellen. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.



a) G_f schneidet die y-Achse im Punkt P.
Berechnen Sie die y-Koordinate von P. / 1

b) Betrachtet wird nun allgemein für jeden Wert $b \in \mathbb{R}$ die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f_b\colon x \mapsto (x+3)^2 + b$.
Geben Sie an, für welche Werte von b die Funktion f_b keine Nullstelle besitzt. / 1

c) Betrachtet wird ferner für jeden Wert $a \in \mathbb{R}$ die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f_a\colon x \mapsto (x+a)^2 - 4$.
Begründen Sie, dass die Funktion f_a für jeden Wert von a zwei Nullstellen besitzt. / 1

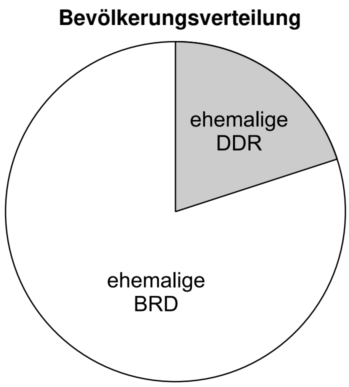
Aufgabe 3

Am 3. Oktober 1990 wurde die deutsche Wiedervereinigung vollzogen.

a) Im abgebildeten Kreisdiagramm ist der Anteil p der Einwohner Gesamtdeutschlands dargestellt, die im Jahr 1990 im Gebiet der ehemaligen DDR lebten. Der Mittelpunktswinkel des zugehörigen grau gefärbten Sektors beträgt 72°.

Berechnen Sie den Anteil p in Prozent.

/ 1



b) Gemäß einer repräsentativen Umfrage aus dem Jahr 2018 unter jungen[1] Deutschen waren 69 % der jungen Westdeutschen, aber nur 56 % der jungen Ostdeutschen der Meinung, dass es nach wie vor kulturelle Unterschiede zwischen Ost- und Westdeutschen gibt.

Basierend auf diesen Daten soll der Anteil aller jungen Deutschen berechnet werden, die 2018 der Meinung waren, dass es nach wie vor kulturelle Unterschiede zwischen Ost- und Westdeutschen gibt.

Beurteilen Sie, ob dafür der Ansatz $(69\,\% + 56\,\%) : 2$ geeignet ist.

/ 1

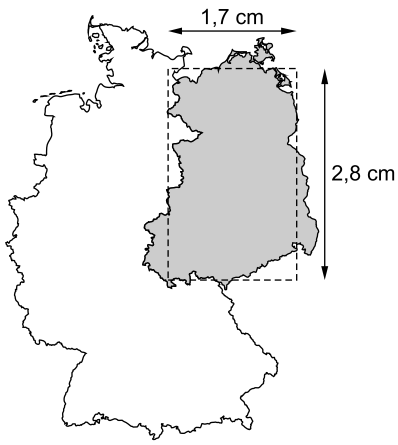
[1] Als jung wurden in dieser Umfrage 16- bis 30-Jährige bezeichnet.

c) Die nebenstehende Karte zeigt Deutschland im Maßstab $1 : 15\,000\,000$.

Durch eine Abschätzung mithilfe des eingezeichneten Rechtecks soll ein Näherungswert für den Inhalt der Fläche Ostdeutschlands (in der Karte grau dargestellt) ermittelt werden.

Geben Sie mithilfe der angegebenen Seitenlängen einen Ansatz zur Berechnung des Flächeninhalts Ostdeutschlands in km^2 an.

/ 2



© d-maps.com

Lösungen

Aufgabe 1

a) $\mathbf{x = \frac{2}{3}}$

Bewertung: „Geben Sie an“ verlangt keinen Rechenweg.

b) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49$

$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 7}{4}$

$\mathbf{x_1 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}}$; $\mathbf{x_2 = \frac{12}{4} = 3}$

Hinweise und Tipps

$\frac{2}{x} = 3 \quad | \cdot x$

$2 = 3 \cdot x \quad | : 3$

$\frac{2}{3} = x$

Diese quadratische Gleichung besitzt bereits die Normalform:
$ax^2 + bx + c = 0$

Ihre Lösungen werden aus den Koeffizienten a, b und c mithilfe der „Mitternachtsformel“ berechnet.

Diskriminante: $D = b^2 - 4ac$

Lösungen: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ (falls $D \geq 0$)

In unserem Fall gilt: $a = 2$; $b = -5$; $c = -3$

Aufgabe 2

a) $f(x) = (x+3)^2 - 4$

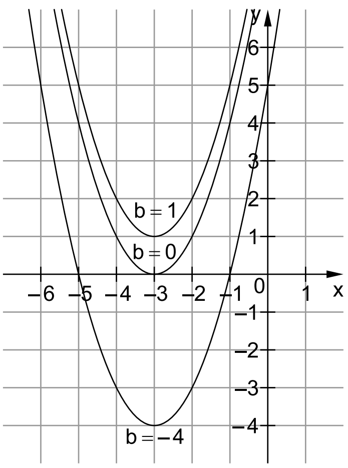
Da P auf der y-Achse liegt, ist der x-Wert dieses Punktes gleich 0.
Einsetzen von $x = 0$ in den Funktionsterm ergibt:
$\mathbf{y_P} = (0+3)^2 - 4 = 9 - 4 = \mathbf{5}$

b) $f_b(x) = (x+3)^2 + b$

Für $\mathbf{b > 0}$ hat die Funktion f_b keine Nullstelle.

Bewertung: $b \geq 0$ ergibt 0 BE. Die unten stehende Abbildung dient lediglich der Veranschaulichung, ist aber nicht Teil der geforderten Lösung.

Graphen zur Veranschaulichung:



Hinweise und Tipps

Der Funktionsterm $a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ beschreibt eine Parabel mit Scheitel $S(x_S \mid y_S)$ und Öffnungsfaktor a. In unserem Fall ist der Graph von f also eine zur Normalparabel kongruente, nach oben geöffnete Parabel mit Scheitel $S(-3 \mid -4)$.

Insbesondere ist die Konstante -4 im Funktionsterm $(x+3)^2 - 4$ **nicht** der gesuchte y-Achsenabschnitt, dies gälte nur im Fall einer linearen Funktion mit einer Gleichung der Form $g(x) = mx - 4$.

Die Funktion f aus Aufgabe 2 a ist ein spezielles f_b, nämlich f_{-4}.

Nullstellen sind – wie das Wort schon sagt – Stellen (x-Werte) mit $f_b(x) = 0$.

An diesen Stellen – und an keinen anderen – hat der Graph mit der x-Achse jeweils einen Punkt gemeinsam.

1. Lösungsweg: grafisch
Es ist zu überlegen, für welche Werte von b der Graph keine gemeinsamen Punkte mit der x-Achse hat.

Der Graph von f_b ist eine Parabel mit Öffnungsfaktor $a = 1$ und Scheitel $S(-3 \mid b)$. Wegen $a > 0$ ist er nach oben geöffnet. Eine solche Parabel hat genau dann mit der x-Achse keine gemeinsamen Punkte, wenn der Scheitel oberhalb der x-Achse liegt, also für $b > 0$.

Variante: explizite Angabe von Verschiebungen
Der Graph f_b entsteht aus der Normalparabel (Term x^2) durch Verschieben um 3 Einheiten nach links und um b Einheiten in y-Richtung ($b > 0$: nach oben, $b < 0$: nach unten). Also: keine gemeinsamen Punkte mit der x-Achse für $b > 0$.

2. Lösungsweg: rechnerisch
Es ist zu untersuchen, für welche Werte von b die Nullstellengleichung $f_b(x) = 0$ keine Lösungen hat. Wie gewohnt ist dabei x die Lösungsvariable.

$(x+3)^2 + b = 0 \quad | - b$

$(x+3)^2 = -b$

Das Quadrat auf der linken Seite ist immer ≥ 0. Also hat diese Gleichung genau dann keine Lösung, wenn die rechte Seite negativ ist, also für $-b < 0$ bzw. für $b > 0$.

Variante: Normalform (etwas umständlicher)

$(x+3)^2 + b = 0 \quad |$ Binomische Formel

$x^2 + 6x + 9 + b = 0$

Diskriminante:
$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9 + b) = 36 - 36 - 4b = -4b$

Es gibt keine Lösung für $D < 0$ und somit für $b > 0$.

c) $f_a(x) = (x+a)^2 - 4$

1. Lösungsweg: grafisch

Der **Scheitel** der zu f_a gehörenden Parabel hat die **y-Koordinate –4**. Er liegt daher für jeden Wert von a **unter der x-Achse**. Da die Parabel wegen des positiven Öffnungsfaktors 1 zudem nach oben geöffnet ist, schneidet sie die x-Achse in zwei verschiedenen Punkten. Die Funktion f_a hat also zwei Nullstellen.

Variante (elegant):

Eine Veränderung von a bedeutet nur eine **Verschiebung** des Graphen **in x-Richtung**. Für jeden Wert von a hat der Graph von f_a daher die gleiche Anzahl von Nullstellen wie der Graph von f, also zwei.

2. Lösungsweg: rechnerisch

$$f_a(x) = 0$$
$$(x+a)^2 - 4 = 0 \quad |+4$$
$$(x+a)^2 = 4$$
$$x_{1,2} + a = \pm 2$$

Also gibt es für jeden Wert von a zwei (verschiedene) Nullstellen.

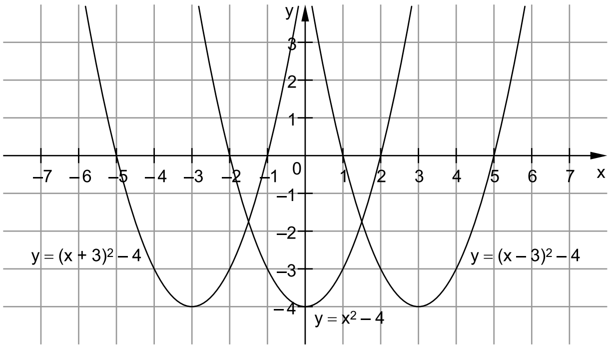
Variante: Normalform (umständlich)

$$f_a(x) = 0$$
$$(x+a)^2 - 4 = 0 \quad |\text{Binomische Formel}$$
$$x^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0$$
$$D = (2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - 4) = 4a^2 - 4a^2 + 16 = 16$$
$$D > 0 \;\Rightarrow\; 2 \text{ Lösungen für jeden Wert von a}$$

Den Graphen von f aus Aufgabe 2 a erhält man für $a = 3$.
Achtung: a ist hier nicht der Öffnungsfaktor der Parabel, dieser ist gleich 1.

Grafisch formuliert lautet die Aufgabe so:
Begründen Sie, dass der Graph von f_a die x-Achse für jeden Wert von a in zwei (verschiedenen) Punkten schneidet.

Darstellung des Graphen von f_a für drei verschiedene Werte von a:



Rechnerisch formuliert, lautet die Aufgabe so:
Begründen Sie, dass die Gleichung $f_a(x) = 0$ für jeden Wert von a (genau) zwei x-Werte als Lösungen hat.

Die reinquadratische Gleichung $z^2 = c^2$ hat die Lösungen $z_1 = -c$ und $z_2 = +c$.

Das explizite Auflösen nach x_1 und x_2 ist nicht nötig.

Zur Lösung einer quadratischen Gleichung in Normalform siehe auch die Hinweise zu Aufgabe 1 b dieses Jahrgangs.

Aufgabe 3

Hinweise und Tipps

a) $\mathbf{p} = \frac{72}{360} = \frac{2}{10} = \frac{20}{100} = \mathbf{20\ \%}$

Gesucht ist der Anteil des 72°-Winkels am vollen Mittelpunktswinkel von 360°.

Es wurde mit 36 gekürzt ($72 = 2 \cdot 36$).

Auch eine dezimale Rechnung ist möglich:
$p = \frac{72}{360} = 72 : 360 = 0{,}2 = 20\ \%$

b) Der Ansatz ist **nicht geeignet**, weil es (nach Aufgabe 3 a) auch heute noch **mehr junge Westdeutsche als Ostdeutsche** gibt.

Vereinfachend kann man nach Aufgabe 3 a annehmen, dass im Jahr 2018 $20\ \% = \frac{1}{5}$ aller jungen Deutschen aus Ostdeutschland und $80\ \% = \frac{4}{5}$ aller jungen Deutschen aus Westdeutschland sind.

Im Ansatz $(69\ \% + 56\ \%) : 2 = 69\ \% \cdot \frac{1}{2} + 56\ \% \cdot \frac{1}{2}$ werden die Prozentsätze gleich gewichtet. Dieser Ansatz wäre richtig, wenn es gleich viele junge West- wie Ostdeutsche gäbe. Korrekt ist aber die folgende Gewichtung: $69\ \% \cdot \frac{4}{5} + 56\ \% \cdot \frac{1}{5}$