2022

Fachoberschule

Original-Pr… mit Lösung…

MEHR ERFAHREN

Hessen

Mathematik

+ Übungsaufgaben im … de…

ActiveBook
Interaktives Training

Original-Prüfungsaufgaben **2021** zum Download

STARK

Inhaltsverzeichnis

Abschlussprüfung 2018

Abschlussprüfung 2019

Abschlussprüfung 2020

*Coronabedingt gab es in der Abschlussprüfung 2020 eine zusätzliche Aufgabe aus der Analysis, da Integralrechnung, Lineare Algebra und analytische Geometrie und Stochastik als prüfungsrelevante Themen gestrichen wurden und die Schülerinnen und Schüler selbst auswählen konnten, ob sie eine Aufgabe aus diesen drei Bereichen wählen oder die Ersatzaufgabe aus der Analysis.

Abschlussprüfung 2021

Online als PDF zum Download .... www.stark-verlag.de/mystark

Das Corona-Virus hat auch im vergangenen Schuljahr die Prüfungsabläufe durcheinandergebracht und manches verzögert. Daher sind die Aufgaben und Lösungen zur Prüfung 2021 in diesem Jahr nicht im Buch abgedruckt, sondern erscheinen in digitaler Form. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2021 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können Sie sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen.

Bei MyStark finden Sie:
- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil der Abschlussprüfung
- **Jahrgang 2021**, sobald dieser zum Download bereit steht

Ausführliche Infos inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Autorin:
Cristina Alberti

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

mit diesem Buch geben wir Ihnen eine optimale Hilfestellung zur Vorbereitung auf die **Abschlussprüfung 2022** an der **Fachoberschule** in **Hessen** im Fach **Mathematik**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches zahlreiche **Informationen zur Abschlussprüfung**, deren Kenntnis für die gezielte Vorbereitung hilfreich und wichtig ist. Dazu gehören u. a. eine komplette, kommentierte Aufstellung der Operatoren für die Abschlussprüfung, Hinweise zum genauen Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben. Sie finden dort darüber hinaus viele **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl in der Vorbereitung auf die Abschlussprüfung als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Der Band enthält **Übungsaufgaben** zu den **Themen der zentralen Abschlussprüfung 2022**. Die Aufgaben sind dabei auf den Stil der Prüfungsaufgaben abgestimmt, d. h., in der Abschlussprüfung werden auf Sie in Umfang, Form und Schwierigkeitsgrad vergleichbare Fragestellungen zukommen.
- Zusätzlich finden Sie in diesem Band die **Original-Abschlussprüfungen 2018 bis 2021**. Damit können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Zu sämtlichen Aufgaben im Buch wurden von uns **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem ist dieses Buch ein **ActiveBook** – das bedeutet, Sie erhalten zusätzliches Übungsmaterial **online bei MyStark**:
  - **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil
  - **Jahrgang 2021**, sobald dieser zum Download bereit steht

  Ausführliche Infos dazu inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

ActiveBook
Interaktives Training

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Vorbereitung und bei Ihrer Abschlussprüfung!

Cristina Alberti

Teil II: Analysis / Vorschlag B

Aufgaben BE

2 Gegeben ist eine allgemeine ganzrationale Funktion dritten Grades $f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, die durch die Punkte $(0|520)$, $(1|324)$, $(2|182)$ und $(3|88)$ verläuft.

2.1.1 Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem mithilfe der gegebenen Punkte auf. Bestimmen Sie daraus den Funktionsterm f(t).
(*zur Kontrolle:* $f(t) = -t^3 + 30t^2 - 225t + 520$) 9

2.1.2 Untersuchen Sie die Funktion f auf ihr Globalverhalten. 5

2.1.3 Begründen Sie, dass die Funktion f weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung ist. 3

2.2 Ein Einkaufszentrum ist von 8:00 Uhr bis 20:00 Uhr geöffnet. Die momentane Anzahl der Besucherinnen und Besucher wird näherungsweise durch die Funktion f angegeben:
$f(t) = -t^3 + 30t^2 - 225t + 520;\ 8 \leq t \leq 20$
t beschreibt dabei die Zeit in Stunden. (8:00 Uhr entspricht $t = 8$.)

2.2.1 Berechnen Sie, wie viele Besucherinnen und Besucher direkt zur Öffnung des Einkaufszentrums erscheinen und wie viele sich zwei Stunden später im Einkaufszentrum aufhalten. 5

2.2.2 Berechnen Sie, um welche Uhrzeit sich die meisten Besucherinnen und Besucher im Einkaufszentrum befinden und wie viele es sind. 9

2.2.3 Geben Sie an, in welchem Bereich die Funktion f im Intervall $8 \leq t \leq 20$ streng monoton steigend oder fallend ist.
Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. 6

2.2.4 Weisen Sie nach, dass der Anstieg der Besucherzahl um 10:00 Uhr am größten ist. 8

2.2.5 Wenn sich mindestens 270 Besucherinnen und Besucher im Einkaufszentrum befinden, werden bei einer Promotion-Aktion Werbegeschenke verteilt.
Berechnen Sie, in welchem Zeitraum die Promotion-Aktion stattfindet. 10

55

TIPP **Lösungshinweise zum Teil II: Analysis / Vorschlag B**

Teilaufgabe 2.1.1

Dies ist eine Steckbrief-/Rekonstruktionsaufgabe. Setzen Sie die Koordinaten der Punkte in die allgemeine Funktionsgleichung ein.

Wegen des Operators „bestimmen“ dürfen Sie zur Lösung des linearen Gleichungssystems den WTR benutzen.

Teilaufgabe 2.1.2

Anhand welcher Bestandteile des Funktionsterms kann man das Globalverhalten dieser Funktion herleiten?

Betrachten Sie das Glied des Funktionsterms mit dem höchsten Exponenten.

Teilaufgabe 2.1.3

Was sind die Voraussetzungen für Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung?

Der Graph einer Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn alle Exponenten der Funktion gerade sind. Punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung sind Graphen, wenn alle Exponenten der Funktion ungerade sind und das Absolutglied null ist.

Alternativ: Berechnen Sie $f(-t)$ und untersuchen Sie, ob $f(-t) = f(t)$ oder $f(-t) = -f(t)$ erfüllt ist.

Teilaufgabe 2.2.1

Sie benötigen die Funktionswerte für $t = 8$ und $t = 10$.

Teilaufgabe 2.2.2

Die meisten Besucherinnen und Besucher bedeutet, dass Sie einen Extrempunkt (in diesem Fall einen Hochpunkt) suchen.

Welche Voraussetzungen müssen für das Vorhandensein eines Extrempunktes gegeben sein? Was ist die notwendige, was die hinreichende Bedingung?

Die notwendige Bedingung für die Existenz eines Extrempunktes ist $f'(t) = 0$, die hinreichende Bedingung ist $f''(t) \neq 0$ und $f''(t) > 0$ für einen Tiefpunkt und $f''(t) < 0$ für einen Hochpunkt.

Die y-Koordinate des Extrempunktes erhalten Sie, indem Sie die Extremstelle in die Funktion f einsetzen.

2.1.1 Die allgemeine Funktionsgleichung für eine ganzrationale Funktion 3. Grades lautet:
$f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$

Bei einer Funktion 3. Grades werden vier Wertepaare benötigt, um das entstehende lineare Gleichungssystem mit vier Variablen und vier Gleichungen lösen zu können. Diese Wertepaare werden der Aufgabenstellung entnommen:
$f(0) = 520$, $f(1) = 324$, $f(2) = 182$ und $f(3) = 88$

Einsetzen in die Funktionsgleichung liefert:
$f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 520 \quad \Rightarrow \quad d = 520$
$f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 324$
$f(2) = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 182$
$f(3) = a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = 88$

Man erhält das lineare Gleichungssystem:
I $\quad d = 520$
II $\quad a + b + c + 520 = 324$
III $\quad 8a + 4b + 2c + 520 = 182$
IV $\quad 27a + 9b + 3c + 520 = 88$

Vereinfachen der Gleichungen führt zu:
I $\quad d = 520$
II $\quad a + b + c = -196$
III $\quad 8a + 4b + 2c = -338$
IV $\quad 27a + 9b + 3c = -432$

TIPP Das lineare Gleichungssystem kann aufgrund des Operators „bestimmen" mit dem WTR gelöst werden.

Man erhält:
$a = -1$; $b = 30$; $c = -225$

Daraus ergibt sich der Funktionsterm:
$f(t) = -t^3 + 30t^2 - 225t + 520$

2.1.2 Das Globalverhalten (Verhalten im Unendlichen) einer ganzrationalen Funktion lässt sich anhand des Gliedes mit der höchsten Potenz und dem dazugehörigen Koeffizienten bestimmen.
Hier ist dies $-t^3$. Es liegen also ein ungerader Exponent (3) und ein negativer Koeffizient (–1) vor.

Daraus folgt ein Verlauf des Graphen vom II. in den IV. Quadranten:
für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to -\infty$
für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to \infty$

2.1.3 *Lösungsweg 1:*
In der vorliegenden Funktion existieren sowohl gerade als auch ungerade Exponenten. Somit ist der Graph der Funktion f weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Lösungsweg 2:
$f(-t) = -(-t)^3 + 30(-t)^2 - 225 \cdot (-t) + 520 = t^3 + 30t^2 + 225t + 520$
Da weder $f(-t) = f(t)$ noch $f(-t) = -f(t)$ gilt, ist die Funktion f(x) weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

2.2.1 Das Einkaufszentrum öffnet um 8:00 Uhr. Zwei Stunden später ist es 10:00 Uhr. Es müssen also die Funktionswerte an den Stellen $t = 8$ und $t = 10$ berechnet werden:
$f(8) = -8^3 + 30 \cdot 8^2 - 225 \cdot 8 + 520 = 128$
$f(10) = -10^3 + 30 \cdot 10^2 - 225 \cdot 10 + 520 = 270$
Um 8:00 Uhr erscheinen 128 Besucherinnen und Besucher im Einkaufszentrum. Zwei Stunden später befinden sich dort 270 Besucherinnen und Besucher.

2.2.2 Die notwendige Bedingung für die Existenz eines Extrempunktes ist $f'(t) = 0$, die hinreichende Bedingung ist $f''(t) \neq 0$ und $f''(t) > 0$ für einen Tiefpunkt und $f''(t) < 0$ für einen Hochpunkt.

Zuerst werden die ersten beiden Ableitungen mithilfe der Potenzregel für Ableitungen ganzrationaler Funktionen gebildet:
$f'(t) = -3t^2 + 60t - 225$
$f''(t) = -6t + 60$

Es muss $f'(t) = 0$ gelten.

TIPP Der Operator ist „berechnen“. Die Gleichung muss „per Hand“ gelöst werden.

Mithilfe der pq-Formel gilt:

$$
\begin{aligned}
-3t^2 + 60t - 225 &= 0 && \mid :(-3) \\
t^2 - 20t + 75 &= 0 && \mid \text{pq-Formel} \\
t_{1/2} &= 10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 75} \\
t_{1/2} &= 10 \pm \sqrt{25} \\
t_{1/2} &= 10 \pm 5 \\
t_1 &= 15 \\
t_2 &= 5
\end{aligned}
$$

Da $t_2 = 5$ außerhalb des Definitionsbereichs liegt, wird nur die Extremstelle $t_1 = 15$ genauer betrachtet:
$f''(15) = -6 \cdot 15 + 60 = -30 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Hochpunkt

Teil II: Analysis / Vorschlag A

Aufgaben BE

2 Untersuchung ganzrationaler Funktionen

2.1 Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 5. Grades in der Form $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2$. Der Graph von f hat in $S\left(2 \,\middle|\, \frac{32}{3}\right)$ einen Sattelpunkt und besitzt an der Stelle $x=1$ eine Tangente mit der Steigung $m=7{,}5$.

2.1.1 Ermitteln Sie aus den obigen Angaben ein lineares Gleichungssystem, mit dem die Funktionsgleichung der ganzrationalen Funktion 5. Grades bestimmt werden kann.

Hinweis: Eine Lösung des Gleichungssystems ist nicht erforderlich. 6

Die zugehörige Funktionsgleichung lautet:

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^5+5x^4-\frac{50}{3}x^3+20x^2$$

2.1.2 Geben Sie das Globalverhalten (Verhalten von f(x) für $x \to \pm\infty$) von f an. Begründen Sie Ihre Lösung. 4

2.1.3 Der Graph von f verläuft punktsymmetrisch zu seinem Sattelpunkt $S\left(2 \,\middle|\, \frac{32}{3}\right)$. Der Tiefpunkt des Graphen liegt bei $T(0|0)$.

Erläutern Sie die Art und Lage des fehlenden Extrempunktes. Geben Sie die Koordinaten des fehlenden Extrempunktes an. 5

2.1.4 Die 2. Ableitung von f(x) lautet $f''(x)=-10x^3+60x^2-100x+40$. Berechnen Sie die Koordinaten der fehlenden Wendepunkte des Graphen f. 10

2.1.5 Zeichnen Sie den Graphen f mithilfe Ihrer Ergebnisse und folgender Wertetabelle in Material 2, Abbildung 2.1 ein.

x	−0,5	0	1	2	3	4	5
y	≈ 7,4	0	≈ 7,8	≈ 10,7	13,5	≈ 21,3	≈ −20,8

6

2.1.6 Bestimmen Sie die Gleichung t(x) der Tangente an der Stelle $x=1$ des Graphen f. Zeichnen Sie die Tangente in Material 2, Abbildung 2.1 ein. 5

2.1.7 Begründen Sie, dass es weitere Punkte des Graphen f gibt, die eine Steigung von 7,5 aufweisen.
Kennzeichnen Sie alle diese Punkte näherungsweise in Ihrer Zeichnung in Material 2, Abbildung 2.1. 7

2.2 Gegeben sind die folgenden ganzrationalen Funktionsgleichungen und ihre zugehörigen Graphen in Material 2, Abbildung 2.2.

$g(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 4x \qquad h(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$

2.2.1 Berechnen Sie Art und Lage des Extrempunktes von h(x). 5

2.2.2 Der Graph von h kann so nach oben verschoben werden, dass er den Graphen von g an der Stelle $x = 2$ berührt. Der verschobene Graph sei v.
Skizzieren Sie den verschobenen Funktionsgraphen v in Material 2, Abbildung 2.2 und geben Sie die Funktionsgleichung v(x) an. 4

2.2.3 Weisen Sie nach, dass es sich tatsächlich um einen Berührpunkt handelt. 3

55

TIPP Lösungshinweise zum Teil II: Analysis / Vorschlag A

Teilaufgabe 2.1.1

Dies ist eine Steckbrief-/Rekonstruktionsaufgabe. Welche Bedingungen können Sie der Aufgabe entnehmen?

Sie müssen aus den Informationen vier Gleichungen aufstellen.

Teilaufgabe 2.1.2

Anhand welcher Bestandteile des Funktionsterms kann man das Globalverhalten dieser Funktion herleiten?

Betrachten Sie das Glied des Funktionsterms mit dem höchsten Exponenten.

Teilaufgabe 2.1.3

Was können Sie aus der Punktsymmetrie für den fehlenden Punkt schließen?

Wie verändert sich die Lage des Tiefpunktes durch die Spiegelung am Sattelpunkt?

Die Koordinaten des fehlenden Extrempunktes haben den gleichen Abstand zum Sattelpunkt wie die des Tiefpunktes T.

Teilaufgabe 2.1.4

Welche Voraussetzungen müssen für das Vorhandensein eines Wendepunktes gegeben sein?

Die notwendige Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes ist $f''(x) = 0$, für die hinreichende Bedingung muss $f'''(x) \neq 0$ gelten.

Beachten Sie bei der Lösung der entstehenden Gleichung, dass an der Stelle $x = 2$ ein Sattelpunkt vorliegt. Dadurch kennen Sie schon eine Lösung der Gleichung $f''(x) = 0$.

Wenden Sie die Polynomdivision oder das Horner-Schema an.

Vergessen Sie nicht, die y-Koordinate der Wendepunkte zu berechnen.

Teilaufgabe 2.1.6

Eine Tangente ist eine Gerade. Die allgemeine Geradengleichung ist $y = mx + b$, wobei m die Steigung und b der y-Achsenabschnitt ist.

Die Steigung m der Tangente ist die gleiche, die die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 1$ hat. Beachten Sie hierfür Teilaufgabe 2.1.

Der y-Achsenabschnitt b wird durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes $P(1 \mid f(1))$ berechnet.

Alternativ: Für die Tangentengleichung an der Stelle x_0 gilt:
$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

2.1.1 Dies ist eine Steckbrief-/Rekonstruktionsaufgabe. Laut Aufgabenstellung geht es um eine Funktion 5. Grades.

Für die Funktion und ihre ersten beiden Ableitungen gilt:
$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2$
$f'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx$
$f''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d$

Bei der vorliegenden Funktion 5. Grades werden vier Bedingungen benötigt, um das entstehende lineare Gleichungssystem lösen zu können (die Unbekannten sind a, b, c und d).

Bedingung 1: Es gibt einen Punkt $S\left(2 \,\middle|\, \frac{32}{3}\right)$. Daraus resultiert $f(2) = \frac{32}{3}$. Dies in f(x) eingesetzt ergibt:

$$f(2) = 32a + 16b + 8c + 4d = \frac{32}{3}$$

Bedingungen 2 und 3: Die Funktion hat an dem Punkt S einen Sattelpunkt. Die Voraussetzung für einen Sattelpunkt ist, dass die erste und die zweite Ableitung der Funktion an der Stelle $x = 2$ den Wert null hat. Daraus folgen die Bedingungen $f'(2) = 0$ und $f''(2) = 0$. Dies eingesetzt ergibt:
$f'(2) = 80a + 32b + 12c + 4d = 0$
$f''(2) = 160a + 48b + 12c + 2d = 0$

Bedingung 4: Der Graph besitzt an der Stelle $x = 1$ eine Tangente mit der Steigung 7,5. Daraus resultiert die Bedingung $f'(1) = 7{,}5$. Dies eingesetzt ergibt:
$f'(1) = 5a + 4b + 3c + 2d = 7{,}5$

Man erhält das lineare Gleichungssystem, das aus vier Gleichungen besteht:

$$\begin{array}{lr} \text{I} & 32a + 16b + 8c + 4d = \frac{32}{3} \\ \text{II} & 80a + 32b + 12c + 4d = 0 \\ \text{III} & 160a + 48b + 12c + 2d = 0 \\ \text{IV} & 5a + 4b + 3c + 2d = 7{,}5 \end{array}$$

TIPP Laut Aufgabenstellung ist die Lösung des LGS nicht erforderlich.

2.1.2 Das Globalverhalten (Verhalten im Unendlichen) einer ganzrationalen Funktion lässt sich anhand des Gliedes mit der höchsten Potenz und dem dazugehörigen Koeffizienten bestimmen.
Hier ist dies $-\frac{1}{2}x^5$. Es liegen also ein ungerader Exponent (5) und ein negativer Koeffizient $\left(-\frac{1}{2}\right)$ vor.

Daraus folgt ein Verlauf des Graphen vom II. in den IV. Quadranten:
für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to -\infty$
für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to \infty$

2.1.3 Bei einer Punktsymmetrie handelt es sich um eine Drehsymmetrie um 180°. Bei einer Drehung des Tiefpunktes um 180° wird daraus ein Hochpunkt.

Der Abstand der Koordinaten des Hochpunktes vom Sattelpunkt muss gleich dem Abstand der Koordinaten des Tiefpunktes vom Sattelpunkt sein, nur jeweils in die andere Richtung. Daraus ergibt sich:

$x = 2 + (2 - 0) = 4$

$y = \frac{32}{3} + \left(\frac{32}{3} - 0\right) = \frac{64}{3}$

Alternativ:
Für den y-Wert des Hochpunktes wird $x = 4$ in die Funktion $f(x)$ eingesetzt:

$f(4) = -\frac{1}{2} \cdot 4^5 + 5 \cdot 4^4 - \frac{50}{3} \cdot 4^3 + 20 \cdot 4^2 = \frac{64}{3}$

Daraus resultiert der Hochpunkt $HP\left(4 \,\middle|\, \frac{64}{3}\right)$.

2.1.4 Die notwendige Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes ist $f''(x) = 0$, für die hinreichende Bedingung muss $f'''(x) \neq 0$ gelten.

Die angegebene zweite Ableitung von $f(x)$ wird gleich null gesetzt:
$-10x^3 + 60x^2 - 100x + 40 = 0$

Diese Gleichung wird mit der Polynomdivision oder mit dem Horner-Schema gelöst. Als erste Lösung der Gleichung ist bereits $x_1 = 2$ bekannt, da dort ein Sattelpunkt liegt (siehe Teilaufgabe 2.1.3).

Lösungsweg 1: Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
\;\;(-10x^3 + 60x^2 - 100x + 40) : (x - 2) = -10x^2 + 40x - 20 \\
\underline{-(-10x^3 + 20x^2)} \\
\qquad\qquad 40x^2 - 100x \\
\qquad\quad \underline{-(40x^2 - 80x)} \\
\qquad\qquad\qquad -20x + 40 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(-20x + 40)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Lösungsweg 2: Horner-Schema

	-10	$+60$	-100	$+40$
$x = 2$		-20	80	-40
	-10	40	-20	0