1
Eine kurze Einführung in die moderne Physik

Viele grundlegende Aspekte der Physik haben einfache mathematische Grundlagen, die aber hinter der Komplexität des mathematischen Formalismus verschwinden – sowohl hinter der ungewohnten Sprache als auch hinter den manchmal furchteinflößenden Gleichungen. Dasselbe gilt für viele abstrakte mathematische Ideen, die oft auf einfachen Gedanken beruhen, welche jedoch aufgrund ihrer komplexen Darstellung verdeckt werden. Tiefgehende Ideen in Physik und Mathematik haben oft einen gemeinsamen Kern, was angesichts der Nähe dieser beiden Disziplinen wenig überraschend ist. Überraschend ist jedoch die Tatsache, dass einige dieser gemeinsamen Gedanken während der Lösung mathematischer Rätsel auftauchen können.

In diesem Buch geht es um Rätsel und ihre Beziehungen zur Mathematik und Physik. Natürlich können Rätsel auch an und für sich faszinierend und unterhaltsam sein. Wir werden in diesem Buch aber vor allem sehen, wie sie als Brücke zwischen den Disziplinen dienen und einige der Verknüpfungen zwischen diesen offenbaren können. Zur Lösung der in diesem Buch vorgestellten Rätsel sind keine fortgeschrittenen Kenntnisse in Mathematik oder Physik erforderlich, und ich gehe auch nicht davon aus, dass Sie in einem dieser Fächer über einen tieferen Hintergrund verfügen. Ein intensives Interesse an diesen Themen sowie einige Grundkenntnisse wären aber sicher hilfreich, um von diesem Buch zu profitieren.

Obwohl Physik und Mathematik eng miteinander verflochten sind, sind ihre Kulturen und Philosophien doch sehr unterschiedlich. Die Mathematik baut auf fundamentalen Axiomen auf und entwickelt daraus mithilfe von logischen Schlussfolgerungen ihr Gedankengebäude. Physikalische Gesetze sollen erklären, wie verschiedene Aspekte der Natur funktionieren und wie die Naturgesetze zusammenpassen, sind aber nicht in hierarchischer Weise logisch voneinander abgeleitet. Die Physik betont eher die *praktischen Beziehungen* zwischen den Gesetzen als ihre logischen Abhängigkeiten. Natürlich ist der logische Zusammenhalt der Ideen aber ebenfalls ein notwendiger Bestandteil der physikalischen Gesetze. In der Mathematik ist es wichtig, sich jederzeit über die zugrunde liegenden Axiome und Annahmen im Klaren zu sein. Im Gegensatz dazu können sich die Axiome oder Grundprinzipien der Physik, wie wir bald sehen werden, jederzeit ändern, wenn neue Beweise oder theoretische Gedanken ans Licht kommen.

Das Universum in Rätseln, 1. Auflage. Cumrun Vafa.

Die Geschichte zeigt, dass Fortschritte in der Physik häufig darauf zurückgehen, dass ein Gedanke, der zunächst als *Folge* eines physikalischen Gesetzes aufgefasst wurde, zu einem eigenständigen Prinzip erhoben wurde. Ein guter Physiker sollte daher immer offen sein für solche Neuformulierungen oder „Umwälzungen", weil ein solches neu erkanntes Prinzip sich letztlich oft als grundlegender erweist und einen größeren Anwendungsbereich hat als das Gesetz, von dem es ursprünglich abgeleitet war. Ein gutes Beispiel hierfür ist das Prinzip der Impulserhaltung. Es wurde zunächst als Folge der newtonschen Gesetze betrachtet, bevor man später – mehr als 225 Jahre nach der Vorstellung der newtonschen Gesetze in der *Principia Mathematica* – feststellte, dass die Erhaltungssätze grundlegender sind als die Bewegungsgesetze, weil sie auf die zugrunde liegenden Symmetrien der Natur zurückgehen.

Aus diesem Grund versuchen Physiker, sich eine flexible Einstellung zu der Frage zu bewahren, was genau die grundlegenden Prinzipien sind – eine Einschätzung, die sich ständig weiterentwickelt. Anstatt der hierarchischen Anordnung von Gedanken zu viel Wert beizumessen, sind Physiker bereit, die Anordnung jederzeit neu zu sortieren, was in völligem Gegensatz zu der Art und Weise steht, wie Mathematiker gewöhnlich die Mathematik betrachten. Ein mathematisches Theorem gilt, sofern es sich einmal als richtig erwiesen hat, als ewige Wahrheit – im Gegensatz zu physikalischen Prinzipien, die jederzeit Veränderungen unterworfen sein können, wenn neue empirische Erkenntnisse auftauchen.

Es gibt noch weitere Unterschiede. Zur Erklärung komplizierter Phänomene verwenden Physiker z. B. oft Näherungen, gegen die Mathematiker eine grundsätzliche Abneigung pflegen. Beispielsweise ist die Frage, ob der Raum „stetig" ist, d. h. keinerlei Lücken enthält, oder aus nahe nebeneinander liegenden diskreten Punkten besteht, für Physiker, die sich mit den Ergebnissen von Experimenten auf wesentlich größeren Entfernungsskalen befassen, eher irrelevant. Für Mathematiker hingegen ist die Stetigkeit eines Raums oder ihr Fehlen ein zentraler und entscheidender Punkt und alles andere als irrelevant.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, einen kurzen Überblick über die Welt der Physik zu geben. Es handelt sich dabei wirklich nur um einen kurzen und allgemeinen Abriss ohne Anspruch auf eine umfassende Darstellung, die im Rahmen eines einzigen Kapitels ohnehin unmöglich wäre. Stattdessen wollen wir einige Beispiele aus der Geschichte der Physik anreißen, die einen Eindruck davon vermitteln können, wo wir heute in unserem langjährigen Streben nach dem Verständnis der grundlegenden Naturgesetze stehen.

1.1 Die Anfänge der Naturwissenschaft in der Antike

Schon die Griechen versuchten zu verstehen, wie die Welt um sie herum funktionierte, und entwickelten dabei viele faszinierende Ideen über die Physik. Sie liebten die Eleganz der Mathematik und einige Gelehrte – unter ihnen Platon – glaubten, dass die letzte Wahrheit über die Welt in der Geometrie verborgen liege. Sie schätzten die Schönheit der euklidischen Geometrie und der platonischen Körper, von

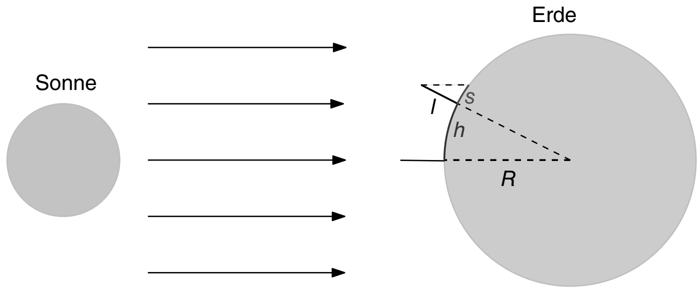

Abb. 1.1 Eratosthenes von Kyrene bestimmte um 230 v. Chr. den Umfang der Erde.

denen sie glaubten, sie könnten als Basis für die Beschreibung der Natur insgesamt dienen. Die meisten ihrer Gedanken zur Mathematik waren ihrer Zeit weit voraus, ihr Verständnis der Physik erreichte jedoch nicht dasselbe Niveau. Aristoteles glaubte z. B., dass Steine nach unten fallen, weil sie gerne auf der Erde liegen. Von allen möglichen Zuständen, argumentierte er, sei derjenige, auf dem Boden zu liegen, den Steinen der liebste. Daraus schloss er, dass Steine um so schneller fielen, je mehr sie sich dem Boden näherten, weil sie froh seien, ihrem natürlichen und bevorzugten Ruheplatz näher zu kommen.[1)]

Trotz der unzulänglichen Beschreibungen physikalischer Phänomene durch die alten Griechen ist ihr grundlegendes Bestreben, die Welt durch schöne Mathematik zu beschreiben, auch heute noch von entscheidender Bedeutung für die Wissenschaft. Einige ihrer Gedanken, wie z. B. die Vorstellung, dass Materie aus einzelnen Atomen besteht (u. a. von Leukipp und Demokrit weiterentwickelt), haben sich bis heute gehalten. Sie glaubten nicht nur, dass die Erde eine Kugel sei, sondern bestimmten um 230 v. Chr. auch ihren Umfang. Insbesondere Eratosthenes von Kyrene beobachtete, wie sich die Länge eines Schattens ändert, wenn wir uns eine bestimmte Wegstrecke vom Äquator entfernen, und berechnete daraus mithilfe einiger trigonometrischer Beziehungen den Radius der Erde. Sein Resultat war nicht allzu weit von dem heute akzeptierten Wert entfernt – der Fehler betrug etwa 15 %. Sein Grundgedanke war dabei, dass der Schatten eines Stockes mit einer Länge von l zur Mittagszeit von null auf s anwächst, wenn man sich um eine Entfernung h senkrecht zum Äquator (also entlang eines Meridians) bewegt (siehe Abb. 1.1). Der Radius R der Erde ergibt sich dann aus einfachen trigonometrischen Überlegungen zu

$$\sim h \cdot \frac{l}{s} \,.$$

Der Ansatz, Wissen aus der reinen Geometrie zu nutzen, um daraus praktische Erkenntnisse über die Natur zu erhalten, wurde noch lange nach der Zeit der frühen griechischen Mathematiker gepflegt. Um 1000 n. Chr. bestimmten die Astronomen Ibn Muadh und Ibn Al-Haytham die Höhe der Atmosphäre zu etwa 80 km[2)], was bis auf etwa 20 % dem heute akzeptierten Wert entspricht. Ibn Muadh und einige

1) Siehe *Über den Himmel* von Aristoteles.
2) Siehe Goldstein, B.R. (1977). Ibn Muadh's treatise on twilight and the height of the atmosphere. *Arch. Hist. Exact Sci.* 17: 97–118; 10.1007/BF02464977.

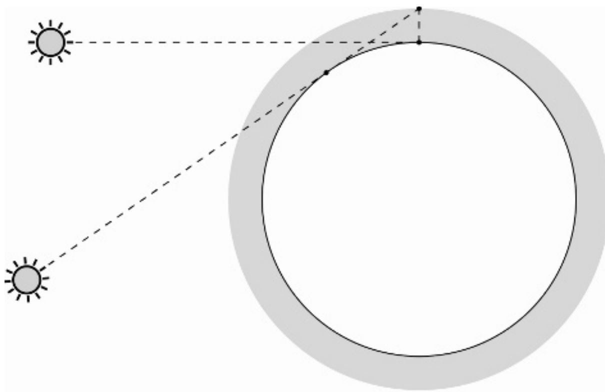

Abb. 1.2 Ibn Muadh und Ibn Al-Haytham bestimmten im 11. Jahrhundert die Höhe der Atmosphäre.

andere muslimische Wissenschaftler verwendeten für ihre Berechnungen den Einfallswinkel der Sonne in der Dämmerung sowie einfache trigonometrische Funktionen. Ihr Ansatz war recht einfach: Der Grund dafür, dass der Himmel nicht sofort bei Sonnenuntergang dunkel wurde, musste darin liegen, dass die oberen Teile der Atmosphäre auch nach Sonnenuntergang noch Licht von der Sonne empfangen konnten (siehe Abb. 1.2). Wenn man nun misst, wie lange (t als Bruchteil der Länge eines Tages) es dauert, bis das Sonnenlicht „ausläuft" (das sind in der Realität einige Stunden), so die Argumentation von Ibn Muadh, so erhält man daraus die Höhe h der Atmosphäre als Bruchteil des Radius R der Erde aus

$$\frac{1}{2}\left(\frac{t}{24}\right)^2 \sim \frac{h}{R} .$$

Tiefergehende Anwendungen der Mathematik auf die Physik ließen noch einige Jahrhunderte auf sich warten. Dabei waren die Arbeiten von Sir Isaac Newton Mitte bis Ende des 16. Jahrhunderts ein fulminanter Startpunkt.

1.2 Newtonsche Mechanik

Newton war ohne Frage einer der großen Pioniere der modernen Physik. Sein zweites Gesetz der Bewegung ist eine der berühmtesten Gleichungen der Physik. Es beschreibt eine differentielle Beziehung zwischen dem *Ort* $x(t)$ und der *Kraft* F:

$$a := \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{F}{m} .$$

Während F und m physikalische Größen sind, ist die *Beschleunigung* a eher eine mathematische Größe, die als zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit definiert ist. Je mehr die Physik sich bemühte, quantitative Aussagen über ihre Studienobjekte zu machen, desto stärker wurde die Mathematik zu einem zentralen Bestandteil ihrer Sprache. Newton musste ein komplettes Teilgebiet der Mathematik erfinden – die Analysis –, um sein zweites Gesetz in präzisen mathematischen Begriffen formal ausdrücken zu können. Dies ist aber nur eines von zahlreichen Beispielen, bei denen Anforderungen der Physiker an die Formulierung von physikalischen Gesetzen zur Entwicklung neuer Zweige der Mathematik führten. Umgekehrt führte auch die Mathematik zu neuen Erkenntnissen in der Physik. Im Laufe des Buches werden wir viele Beispiele für diese gegenseitige Verknüpfung und das Geben und Nehmen zwischen Physik und Mathematik kennenlernen.

1.3 Lagrangesche und hamiltonsche Mechanik

Die Untersuchung der mathematischen Grundlagen der newtonschen Mechanik in verschiedenen physikalischen Kontexten führte zu ihrer weitgehenden Neuformulierung sowie einigen neuen mathematischen Erkenntnissen. In den späten 1700er-Jahren schlug Joseph-Louis Lagrange z. B. eine neue, sogenannte „lagrangesche“ Formulierung der Mechanik vor, die dieselben physikalischen Ergebnisse wie die newtonsche Mechanik lieferte, aber auf dem „Prinzip der kleinsten Wirkung“ anstelle der Kraft beruhte. Die Wirkung ist ein Integral, das für jeden möglichen Weg, den ein Teilchen von seinem Startpunkt zu einem Endpunkt nehmen könnte, berechnet werden kann. Sie ist als $S = \int (K - V)\,\mathrm{d}t$ definiert, wobei K die kinetische Energie des Teilchens und V seine potentielle Energie entlang des untersuchten Weges ist (siehe Abb. 1.3).

Das Prinzip der kleinsten Wirkung besagt, dass der Weg, dem das Teilchen tatsächlich folgt, derjenige ist, für den die Wirkung minimal ist. Wenn es mehrere Lösungen gibt, entspricht jede Lösung einem Extremum (einem Minimum oder Maximum) der Wirkung.

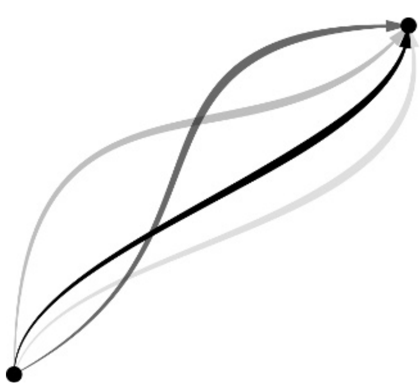

Abb. 1.3 Die lagrangesche Formulierung der Mechanik betrachtet alle möglichen Wege von einem Start- zu einem Endpunkt. Der tatsächliche Weg – der Weg, den ein Teilchen natürlicherweise nehmen würde – ist derjenige, für den eine als *Wirkung* bezeichnete Größe minimal ist.

Diese neue Sichtweise machte es den Physikern einfacher, die Mechanik unter Randbedingungen (d. h. vorgegebenen Einschränkungen einer Bewegung) zu studieren, wie beispielsweise eine Kugel, die einen Hügel mit einer bestimmten Topographie hinunterrollt, oder einen Kreisel auf verschiedenen Oberflächen. Um die lagrangesche Mechanik zu formalisieren, entwickelten Leonhard Euler und Lagrange ein neues Teilgebiet der Mathematik, die sogenannte *Variationsrechnung*, die sich mit der Extremisierung (also Maximierung oder Minimierung) von Integralen entlang vorgegebener Wege befasst, deren Lösungen die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllen. Dieser Prozess ist schwieriger als das Auffinden der Minima einer Funktion einer endlichen Anzahl von Variablen, da unendlich viele Wege zwischen zwei Punkten im Raum existieren und berücksichtigt werden müssen. In gewissem Sinn ist die Aufgabe daher gleichbedeutend mit dem Auffinden des Minimums einer Funktion (hier der Wirkung) unendlich vieler Variablen (die den Raum aller möglichen Wege bilden). Physiker können nun die Variationsrechnung nutzen, um den Weg mit der kürzestmöglichen Länge zu bestimmen. Die Neugestaltung der klassischen Mechanik im 18. Jahrhundert, die durch die Ideen von Lagrange und Euler angestoßen wurde, schuf die Voraussetzungen für spätere Querverbindungen zur Physik des 20. Jahrhunderts, insbesondere zur Quantenmechanik, die auf der Basis der ursprünglichen newtonschen Gleichungen nicht ohne Weiteres zugänglich gewesen wäre.

In einer weiteren Neuformulierung der klassischen Mechanik reduzierte William Rowan Hamilton die zweiten Ableitungen nach der Zeit auf erste Ableitungen, indem er dafür die doppelte Zahl von Variablen verwendete. Hamilton betrachtete sowohl die Ortsfunktion $x(t)$ als auch die Impulsfunktion $p(t) = mv(t)$ als grundlegende Variablen, anstatt allein $x(t)$ zu betrachten, wie es zuvor üblich gewesen war. Die hamiltonsche Mechanik, wie der neue Formalismus genannt wurde, markierte den Beginn des modernen Begriffs des *Phasenraums* – des Raums von Ort und Impuls. Auch die hamiltonsche Mechanik erweist sich in der Quantenmechanik als nützlich, wie wir später sehen werden. Heute betrachten wir die lagrangeschen und hamiltonschen Formulierungen der Mechanik als allgemeiner und grundlegender als die newtonschen Gesetze; sie sind aus diesem Grund auch breiter anwendbar. Dies veranschaulicht die Tatsache, dass die Axiome der Physik ebensowenig unveränderlich sind wie die ihnen zugrunde liegenden Modelle. Beide können sich im Laufe der Zeit ändern und tun es auch.

1.4 Maxwells Theorie des Elektromagnetismus

Als James Clerk Maxwell mit der Arbeit an seiner Theorie des Elektromagnetismus begann, hatten Michael Faraday und andere bereits viele einzelne Aspekte der zugrunde liegenden Physik verstanden. Bei seinem Versuch, die zahlreichen bekannten Gesetze in einem Formalismus zu vereinen, entdeckte Maxwell eine *mathematische* Inkonsistenz zwischen den Gleichungen. Er löste das Problem, indem er seinen Gleichungen einen neuen mathematischen Term hinzufügte, der heute als Verschiebungsstrom bezeichnet wird. Dieser Term war im Labor schwer zu messen und daher bis zu diesem Zeitpunkt nicht entdeckt worden. Maxwell bemerkte schnell, dass seine um diesen Term vervollständigten Gleichungen die Existenz von Wellen aus elektrischen und magnetischen Feldern implizierten, die sich mit einer Geschwindigkeit bewegen sollten, die in etwa der zu diesem Zeitpunkt vermuteten Lichtgeschwindigkeit entsprach. Dies inspirierte Maxwell zu der Annahme, dass Licht nichts anderes als eine elektromagnetische Welle *ist*![3] Dies war ein weiterer schlagender Beweis für die Fähigkeit der mathematischen Logik, neue physikalische Phänomene vorherzusagen: Maxwells Korrektur ergab sich eher aus *mathematischen* als aus *physikalischen* Überlegungen. Seine Entdeckung einer einfachen mathematischen Inkonsistenz führte ihn zu der Schlussfolgerung, dass Licht aus elektrischen und magnetischen Störungen besteht, die sich durch den Raum ausbreiten – ein Triumph des menschlichen Denkens! Dies ist eines von unzähligen Beispielen, die zeigen, dass mathematische Prinzipien ausreichen können, um neue physikalische Gesetze zu begründen.

Die maxwellschen Gleichungen im Vakuum führen zu Gleichungen der Form

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \boldsymbol{F} \,,$$

wobei $\boldsymbol{F}$ entweder das Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ oder das elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ bezeichnet. Die Lösungen dieser Gleichung sind elektromagnetische Wellen, die sich mit der Geschwindigkeit c, der Lichtgeschwindigkeit, ausbreiten.

Das war aber noch nicht das Ende der Geschichte, denn schnell tauchten neue Fragen auf. Wenn man die Maxwell-Gleichungen verwendet, stellt man fest, dass sich die von ihnen beschriebenen Wellen tatsächlich mit der Geschwindigkeit c ausbreiten. Aber wie muss c gemessen werden? Ist es die Geschwindigkeit relativ zur Erde? Oder zur Sonne? Und auf welche Art von Beobachter bezieht sich die Gleichung – nur auf ruhende oder auch auf bewegte? Wenn wir uns mit konstanter Geschwindigkeit relativ zu einem Inertialsystem bewegen, gelten weiterhin die newtonschen Gesetze, aber ein Beobachter, der sich in dieser Weise bewegt, würde selbstverständlich eine andere Geschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen messen. Zunächst glaubte man, dass c nicht für alle Inertialsysteme gleich sein könne, weil dies ganz offensichtlich dem Additionsgesetz für Geschwindigkeiten aus der newtonschen Mechanik widerspräche. Anders ausgedrückt fehlte den maxwellschen Gleichungen die Symmetrie der newtonschen Mechanik (ausgedrückt durch die Galilei-Transformation), welche besagt, dass sich die gemessenen Geschwindigkeiten entsprechend der Relativgeschwindigkeit zweier Inertialsysteme ändern, wenn man das Inertialsystem wechselt. Maxwells Gedankenblitz schien damit zumindest auf den ersten Blick zu einem Widerspruch zu führen.

Glücklicherweise betrat bald Hendrik Lorentz die Bühne und zeigte einen mathematischen Weg auf, bestimmte Symmetrien der Maxwell-Gleichungen aufzude-

3) Es wurde ferner postuliert, dass diese Welle ein Medium benötigte, das zu der Zeit als Lichtäther oder einfach Äther bezeichnet wurde – eine Hypothese, die später durch das berühmte Michelson-Morley-Experiment widerlegt wurde. (Mehr über die wissenschaftliche Gedankenwelt dieser Zeit findet sich in dem klassischen Werk *A Guide to the Scientific Knowledge of Things Familiar* von Ebenezer Cobham Brewer.)

cken, die sich von denen unterschieden, die man aufgrund der newtonschen Mechanik erwartetet hatte. Die Lorentz-Transformationen lehren uns, wie sich die elektrischen und magnetischen Felder sowie der Ort (x, y, z) und die Zeit t ändern, wenn wir das Bezugssystem wechseln. Das wiederum sorgte dafür, dass die maxwellschen Gleichungen für alle Inertialsysteme gleich aussahen. Mit anderen Worten, er entwickelte die *Lorentz-Transformation*, im Gegensatz zu der Galilei-Transformation aus der newtonschen Mechanik. Seine Formulierung hatte jedoch bizarre physikalische Implikationen wie beispielsweise die Lorentz-Kontraktion, die *Schrumpfung* von Längen beim Wechsel zwischen verschiedenen Inertialsystemen. Lorentz stellte insbesondere fest, dass die Schrumpfung der Längen notwendig war, damit die maxwellschen Gleichungen unabhängig von der Geschwindigkeit eines Beobachters relativ zu einem Inertialsystem funktionierten. Er hatte jedoch große Schwierigkeiten, diesen Befund zu erklären, da er erfolglos versuchte, den Effekt auf elektrische Kräfte und andere Begriffe zurückzuführen. Obwohl seine mathematische Theorie wunderbar funktionierte, war er nicht in der Lage, eine schlüssige physikalische Rechtfertigung zu liefern und dachte, sein Konstrukt sei nur auf die elektromagnetische Theorie anwendbar. Eine korrekte Interpretation dessen, was er gefunden hatte, konnte erst Albert Einstein liefern, der auf dieser Grundlage seine spezielle Relativitätstheorie entwickelte.

1.5 Aufbruch in die vierte Dimension: Relativitätstheorie

Auftritt Einstein. Albert Einstein schlug vor, dass das von Lorentz und anderen entdeckte Phänomen nicht spezifisch für den Elektromagnetismus war, sondern ganz allgemein galt. Eine der Konsequenzen dieses radikalen Gedankens war eine kompakte Beziehung zwischen Masse und Energie, die zu einer der bekanntesten Gleichungen in der Geschichte der Wissenschaft wurde:

$$E = mc^2 .$$

Einsteins Theorie besagt, dass der Raum und insbesondere die Zeit, die stets als absolut und voneinander verschieden angesehen worden waren, in Wirklichkeit von der Geschwindigkeit des Beobachters abhängen. Darüber hinaus stellte er fest, dass die Lorentz-Transformation eine physikalische Transformation der Raumzeit ist und keinesfalls nur ein mathematischer Trick, der die Maxwell-Gleichungen konsistent macht. Dieser Gedanke stieß anfänglich auf einigen Widerstand unter Physikern, wurde aber inzwischen unwiderlegbar bestätigt. Einsteins spezielle Relativitätstheorie enthielt lineare Transformationen für den Wechsel von einem Inertialsystem zu einem anderen. Insofern war die spezielle Relativitätstheorie mathematisch recht einfach und vielleicht für den Geschmack mancher Physiker – zumindest was ihre mathematische Komplexität betraf – sogar ein wenig langweilig, da sie nur elementare lineare Algebra verwendete. Dies veranschaulicht die Tatsache, dass tiefe physikalische Ideen nicht notwendigerweise mit einem tiefen oder komplizierten mathematischen Formalismus einhergehen müssen; sie müssen nur auf einer *selbstkonsistenten* Mathematik beruhen.

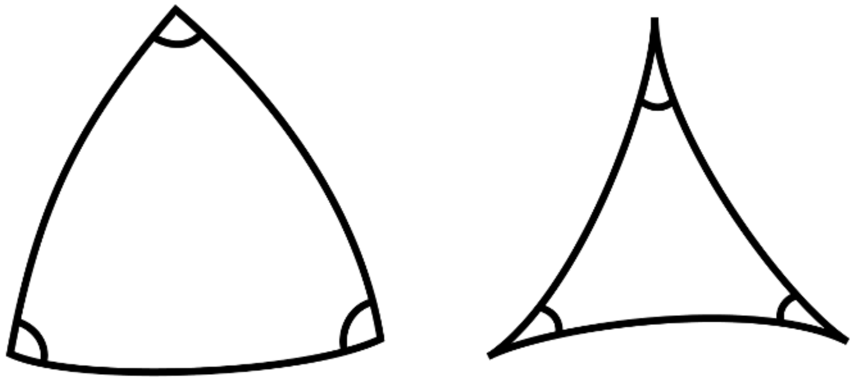

Abb. 1.4 Nichteuklidische Geometrie: Wenn man Euklids Parallelenaxiom nicht voraussetzt, müssen sich die Innenwinkel von Dreiecken nicht unbedingt zu 180° addieren.

Einstein ging dann noch weiter und begann mit einer erneuten Untersuchung der newtonschen Gravitationstheorie. Georg Friedrich Bernhard Riemann hatte bereits einige Jahrzehnte zuvor eine neue, nach ihm benannte Form der Geometrie eingeführt. Die riemannsche Geometrie, wie der Ansatz genannt wurde, baut nicht auf Euklids fünftem Postulat (dem Parallelenaxiom) auf und lässt dadurch beispielsweise Dreiecke zu, deren Winkelsumme nicht 180° beträgt, sofern nur der Raum, in dem sie sich befinden, gekrümmt ist (siehe Abb. 1.4). Riemanns Doktorvater Johann Carl Friedrich Gauß hatte schon zuvor vermutet, dass solche Phänomene in der realen Welt auftreten und messbar sein könnten. Interessanterweise soll Gauß vorgeschlagen haben, dass unser Universum gekrümmt sei. Einer Legende (deren Wahrheitsgehalt unklar ist) zufolge versuchte er in seiner Zeit als Leiter der Hannoverschen Landesvermessung, die Krümmung des Raums zu messen, indem er drei Winkel eines Dreiecks bestimmte, dessen Scheitelpunkte die Gipfel dreier Berge waren (siehe Abb. 1.5). Er nahm dabei an, dass die Lichtstrahlen, die die Kanten des Dreiecks bildeten, gerade Linien waren, und untersuchte, ob die Winkel zwischen ihnen sich zu 180° addierten. Seine Messungen – falls sie wirklich stattfanden – zeigten, dass die Summe der drei Winkel innerhalb der Fehlergrenzen des Experiments 180° betrug, was darauf hindeutet, dass die Krümmung des Universums, wenn sie denn existierte, zu klein war, als dass er dies erkennen konnte.

Es ist kaum überraschend, dass Riemann auch über physikalische Anwendungen seiner Geometrie spekulierte. Zum Beispiel hoffte er, dass sie dazu dienen könnte, die Theorien der Elektrizität und des Magnetismus mit der Theorie der Schwerkraft zu vereinen. Eine Anwendung der riemannschen Geometrie auf die Physik musste jedoch auf Einsteins Neuformulierung der newtonschen Gravitation und seine Entdeckung eines Analogons der maxwellschen Gleichungen für die Gravitation warten – die allgemeine Relativitätstheorie. Die allgemeine Relativitätstheorie ist eine vollständig geometrische Gravitationstheorie, in der die Bahnen frei fallender Objekte in einem Gravitationsfeld einfach gerade Linien (oder Geodäten) in der gekrümmten Geometrie von Raum und Zeit sind. Sie erscheinen uns „gekrümmt“ (als ob die Objekte beschleunigen würden), weil der Raum selbst gekrümmt ist, so wie

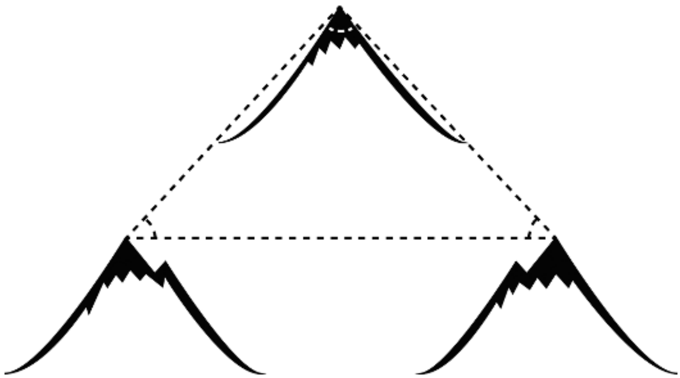

Abb. 1.5 Nach einer (unbestätigten) Legende soll Carl Friedrich Gauß versucht haben, die Krümmung des Raums zu messen, indem er die Winkel in einem Dreieck bestimmte, dessen Ecken durch den Brocken im Harz, den Inselsberg im Thüringer Wald und den Hohen Hagen bei Göttingen gebildet wurden. Der Gedanke war sicherlich einen Versuch wert, auch wenn er dabei keine Abweichung von den nach der euklidischen Geometrie erwarteten 180° beobachten konnte.

die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten auf der Oberfläche einer Orange – das Analogon einer geraden Linie – auch gekrümmt ist.

Dank Einsteins gut geprüfter Theorie wissen wir heute, dass das Universum tatsächlich gekrümmt ist. Wir wissen auch, dass Gauß zwar auf dem richtigen Weg war, dass aber die Krümmung, die er zu messen versuchte, für die ihm zur Verfügung stehenden experimentellen Mittel zu klein war. Riemann und Gauß waren Mathematiker, aber einige ihrer interessanten mathematischen Erkenntnisse fanden später über Einsteins allgemeine Relativitätstheorie ihren Weg in die Physik. Wir sehen hier ein weiteres Beispiel für die gegenseitige Unterstützung zwischen Physik und Mathematik, die beide Bereiche vorangebracht haben. Im Gegensatz zur speziellen Relativitätstheorie, bei der es um nahezu triviale Mathematik ging, war die Mathematik der allgemeinen Relativitätstheorie ausgesprochen komplex und anspruchsvoll. So radikal diese Ideen jedoch auch waren, die fast gleichzeitig aufkommende Quantenmechanik erschien vielen Wissenschaftlern noch weitaus rätselhafter und verwirrender. Das galt auch für Einstein, der mit dieser Theorie, für die er Pionierarbeit leistete, nie wirklich glücklich war.

1.6 Die Entdeckung des Zufalls: Quantenmechanik

Die Quantenmechanik war insofern eine Revolution, als sie die Physik auf *Wahrscheinlichkeiten* gründete. Viele Physiker fassten das als Rückschritt auf, da es implizierte, dass keine sicheren Vorhersagen mehr möglich waren, wie sich die Natur verhalten würde. Physikalische Systeme waren plötzlich zufälligen Schwankungen oder *Fluktuationen* unterworfen, was bedeutete, dass der Zufall und nicht die Gewissheit die Regel war. Hiergegen erhob Einstein seinen oft zitierten Einwand „Gott würfelt nicht." Die Quantenmechanik ist in der Tat in vielerlei Hinsicht kontraintuitiv, selbst für moderne Physiker. Das veranlasste Richard Feynman zu seiner ebenfalls berühmten Aussage: „Ich glaube sicher sagen zu können, dass niemand die Quantenmechanik versteht." Trotzdem ist die Quantenmechanik schon seit Langem ein unverrückbarer Grundpfeiler der Physik – aus dem einfachen Grund, weil sie mit den Experimenten außerordentlich gut übereinstimmt.

Das Aufeinandertreffen der Quantenmechanik mit den bis dahin etablierten Grundlagen der Physik führte zu einigen interessanten Rätseln. In den 1920er-Jahren stellten Physiker in Experimenten fest, dass Elektronen einen zusätzlichen „Freiheitsgrad" – ein unabhängiges, bestimmendes Merkmal – zu besitzen schienen, das sie *Spin* nannten. Obwohl dieser Begriff einen Bezug zu der üblichen Bedeutung des Wortes (engl. *to spin* = sich drehen, rotieren) hatte, hatte er in diesem Fall doch eine viel grundlegendere Bedeutung.

Erwin Schrödinger hatte bereits eine Gleichung aufgestellt, die die Quantenmechanik von Teilchen bei Geschwindigkeiten beschrieb, die wesentlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit waren (die Schrödinger-Gleichung). Paul Dirac versuchte nun, die spezielle Relativitätstheorie mit der Quantenmechanik zu kombinieren, um auch Teilchen mit Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit beschreiben zu können. Dabei stellte er fest, dass er hierfür einen zusätzlichen Freiheitsgrad *benötigte* und lieferte so eine Erklärung für den Ursprung dieser neuen Eigenschaft. Wieder griff die Mathematik ein, um zwei Gebiete der Physik miteinander in Einklang zu bringen, und dies eröffnete, wie wir im Folgenden sehen werden, neue Wege in der Physik.

Um die Situation besser verstehen zu können, wollen wir zunächst einen Blick auf die nichtrelativistische Schrödinger-Gleichung werfen[4)]:

$$\hat{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} \, .$$

Diracs Ziel war jedoch eine Gleichung, die in Einklang mit Einsteins bekannter Gleichung aus der speziellen Relativitätstheorie stehen und dieselbe Form wie diese haben sollte:

$$\hat{E}^2 = \hat{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \, .$$

Damit seine Gleichung außerdem auch die Form der Schrödinger-Gleichung hatte, wollte Dirac die Potenz von E in der obigen Gleichung von E^2 auf E reduzieren, ohne dabei aber die Quadratwurzel zu ziehen. Er erkannte, dass er dies erreichen konnte, indem er 4×4-Matrizen für seine Gleichung verwendete, weshalb er vier Matrizen α_k und β einführte, sodass die Gleichung

$$\hat{E} = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k p_k c + \beta m c^2$$

4) Die Ausdrücke in dieser Gleichung sind Operatoren. $\hat{E} = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ ist der Operator der Gesamtenergie, $\hat{p} = -\mathrm{i}\hbar\nabla$ der Impulsoperator und $\hat{V}$ der Operator der potentiellen Energie. Die Masse m ist wie in der klassischen Mechanik ein einfacher Skalar.

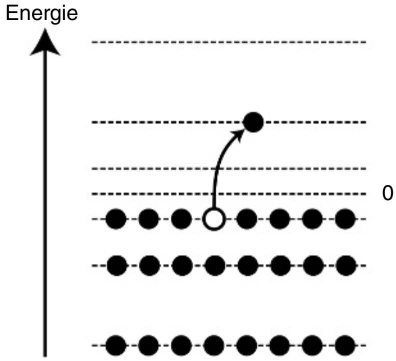

Abb. 1.6 Die Dirac-Gleichung lieferte Lösungen mit sowohl positiven als auch negativen Energien. Dirac versuchte dies zu erklären, indem er argumentierte, dass die negativen Energiezustände mit einem „Dirac-See" von Elektronen gefüllt seien. Wenn eines der Elektronen aus dem „See" in einen positiven Energiezustand springt, hinterlässt es ein Loch – ein Teilchen mit positiver Ladung, das ansonsten mit dem Elektron identisch ist.

erfüllt war. Es zeigte sich, dass aus dem Quadrat dieser Beziehung bei geeigneter Wahl der Matrizen die einsteinsche Relation entstand. Außerdem lieferten dieselben Matrizen auch den zusätzlichen Freiheitsgrad des Elektronenspins. So führte eine mathematische Idee Dirac zu einer erfolgreichen Erklärung für den Ursprung des Elektronenspins, was wiederum veranschaulicht, wie abstrakte Mathematik zu konkreten physikalischen Erkenntnissen führen kann. Die Dirac-Gleichung ist eine der berühmtesten Aussagen nicht nur der Physik, sondern auch der Mathematik und wird seither von Wissenschaftlern beider Disziplinen untersucht.

Wolfgang Pauli wies jedoch bald darauf hin, dass Diracs Gleichung beliebige *negative* Energiezustände zulässt. Dirac akzeptierte dies als gravierendes Problem, das es zu lösen galt.[5] Er versuchte eine Lösung zu finden, indem er Paulis Ausschlussprinzip anwendete, welches besagt, dass keine zwei Elektronen dieselbe Umlaufbahn teilen können. Dirac schlug vor, dass die Bahnen, die negativen Energien entsprechen, bereits besetzt seien (siehe Abb. 1.6). Die Gruppe dieser Teilchen mit negativer Energie wurde als „Dirac-See"[6] bezeichnet. Wenn diese Zustände alle besetzt waren, konnte folglich kein anderes Elektron auf die Bahnen negativer Energie geraten, womit das Problem gelöst war!

Die Physiker stellten jedoch fest, dass diese Idee die seltsame Möglichkeit aufwarf, dass Teilchen aus dem See in einen höheren Energiezustand angeregt werden könnten, wodurch ein Loch mit einer positiven Ladung desselben Betrags wie die Ladung des Elektrons zurückbliebe, das sich wie ein neues Teilchen mit einer Ladung entgegengesetzt zu der des Elektrons verhielte. Dirac versuchte zunächst, dieses neue

5) Eine gut lesbare Darstellung dieses Problems findet sich in *Der seltsamste Mensch: Das verborgene Leben des Quantengenies Paul Dirac* von Graham Farmelo (Springer-Verlag 2018).

6) Die korrekte – und physikalisch treffendere – Übersetzung des englischen Begriffs *Dirac sea* wäre eigentlich *Dirac-Meer*, allerdings hat sich der „Dirac-See" im Deutschen fest etabliert. Sprache ist nicht immer logisch.

Problem zu ignorieren, indem er behauptete, das neue Teilchen mit positiver Ladung sei nichts anderes als ein Proton. Andere Physiker wiesen jedoch bald darauf hin, dass das positiv geladene Teilchen nach der Dirac-Gleichung dieselbe Masse wie das Elektron haben müsse, das Proton aber etwa 2000-mal schwerer als das Elektron sei. Schließlich musste Dirac akzeptieren, dass seine Gleichung die Existenz eines positiv geladenen Teilchens mit der Masse eines Elektrons implizierte, das später als *Antiteilchen* des Elektrons bezeichnet wurde. Da von der Existenz eines solchen Teilchens nichts bekannt war, geriet Diracs Theorie ernsthaft in Zweifel. Selbst Dirac wurde im Hinblick auf diesen Aspekt seiner Gleichung immer schweigsamer. Es dauerte jedoch nicht lange, bis Carl Anderson bei einer Untersuchung der kosmischen Strahlung in seiner Teilchenkammer experimentelle Beweise für dieses Teilchen entdeckte, das daraufhin als Positron bezeichnet wurde. Tatsächlich hatte das Positron bis auf das Vorzeichen seiner Ladung genau dieselben Eigenschaften wie das Elektron. Wieder führte mathematische Eleganz zur Vorhersage neuer physikalischer Erkenntnisse, die zunächst unglaublich erschienen, sich aber schließlich doch als zutreffend erwiesen.

Die Quantenmechanik hatte anfangs nur einen begrenzten Anwendungsbereich. Er erforderte eine Neuformulierung, um sie in Einklang mit Maxwells Feldtheorie der elektrischen und magnetischen Kräfte zu bringen. Diese Neuformulierung war das Werk von Richard Feynman und anderen, die sich dabei an dem Ansatz orientierten, den schon Euler und Lagrange bei ihren Neuformulierungen der newtonschen Mechanik verfolgt hatten und dem wir nun ebenfalls folgen wollen.

1.7 Die seltsame Theorie: Quantenfeldtheorie

In der klassischen Mechanik folgen Teilchen wie beschrieben denjenigen Wegen, für die die Wirkung minimal wird. Die Quantenfeldtheorie präsentiert eine kompliziertere Sichtweise – hier folgt ein Teilchen nicht nur einem einzigen Weg, sondern es nimmt alle denkbaren Wege, wobei jedem dieser Wege eine *Phase* (eine komplexe Zahl mit dem Betrag eins) zugeordnet ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen von einem beliebigen Anfangspunkt zu einem beliebigen Endpunkt gelangt, ist proportional zur Summe der Phasen aller möglichen Wege. Im Folgenden werden wir dies etwas formeller ausdrücken. (Sie können diesen Abschnitt gerne auch überspringen.)

Richard Feynmans Neuformulierung der Quantenmechanik mithilfe von *Pfadintegralen* postuliert, dass ein Teilchen zwischen den Punkten (x_1, t_1) und (x_2, t_2) verschiedenen Wegen folgt, die mit einem Exponentialterm mit der *Wirkung* im Exponenten gewichtet sind,

$$\int \mathcal{D}[X(t)]\, \mathrm{e}^{\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int (K-V)\,\mathrm{d}t\right]}\,,$$

wobei $\hbar$ die plancksche Konstante ist und die Integration über den Raum aller möglichen Wege zwischen (x_1, t_1) und (x_2, t_2) erfolgt. Das Integral ist eine komplexe Zahl, deren Betragsquadrat die Wahrscheinlichkeit angibt, dass ein Teilchen sich vom Ort

x_1 zur Zeit t_1 an den Ort x_2 zur Zeit t_2 bewegt. Die klassischen Bahnen entsprechen dem Grenzfall $\hbar \to 0$. In diesem Grenzfall liefert die Methode der stationären Phase zur Bestimmung des Integrals in guter Näherung diejenigen Wege, die bezüglich einer Variation des Wegs einem Extremum entsprechen – d. h., man erhält die klassischen Bahnen. Feynmans Neuformulierung der schrödingerschen Quantenmechanik ergab eine Theorie, die der Euler-Lagrange-Neuformulierung der newtonschen Mechanik im Sinn des Wirkungsprinzips ähnelt. Die Euler-Lagrange-Form der Mechanik passte von ihrer Struktur her gut zur Quantenmechanik (im Gegensatz zu Newtons ursprünglicher Formulierung), weshalb sie heute als grundlegender angesehen wird.

Die mathematische Formulierung der Quantenmechanik anhand von Pfadintegralen enthält ein unendlichdimensionales Integral, da der Raum aller möglichen Wege unendlich viele Dimensionen hat. Dennoch lässt sich dies mathematisch präzise formulieren. Denselben Pfadintegralansatz wandte Feynman auch auf Maxwells Theorie des Elektromagnetismus an, indem er über alle elektrischen und magnetischen Felder integrierte. Hierzu war eine Integration über den unendlichdimensionalen Raum der Funktionen auf $\mathbb{R}^4$ erforderlich, was in seiner mathematischen Komplexität noch weit über die (ebenfalls nicht ganz triviale) Integration über den unendlichdimensionalen Raum der Wege hinausgeht.

Dies ist ein zentrales Thema der Quantenfeldtheorie, deren mathematische Untermauerung rund 70 Jahre nach ihrer ursprünglichen Formulierung immer noch im Gang ist! Obwohl es immer noch keine mathematisch strenge Formulierung einer Quantenfeldtheorie gibt, haben Physiker eine Reihe von Rechenwerkzeugen (darunter verschiedene Näherungsverfahren) entwickelt, deren Ergebnisse mit fantastischer Genauigkeit mit den verfügbaren Experimenten übereinstimmen.

1.8 Der Weg in die Zukunft: Quantengravitation

Frühe Versuche, die allgemeine Relativitätstheorie aufbauend auf Feynmans Theorie mit der Quantenfeldtheorie zu einer vereinheitlichten Theorie der *Quantengravitation* zusammenzuführen, die die Gravitation auf der Ebene einzelner Teilchen beschreiben konnte, waren nicht von Erfolg gekrönt. Rechenverfahren, die für die Quantenfeldtheorie entwickelt worden waren, liefern für Wahrscheinlichkeitsamplituden, bei denen Quantenaspekte der Gravitation eine Rolle spielen – wie die Streuung zweier Quanten von Gravitationswellen (zweier „Gravitonen"), die aufeinandertreffen – unter bestimmten Umständen unendlich große Zahlen. Das ist ein ernstes Problem, denn eine Wahrscheinlichkeit, die größer als eins werden kann – geschweige denn unendlich groß –, ist als Konzept bedeutungslos.

Selbst wenn wir eine konsistente Quantentheorie der Schwerkraft hätten, würde die Bestätigung (oder Widerlegung) einer solchen Theorie unsere derzeitigen experimentellen Mittel bei Weitem übersteigen, da dies Kollisionsenergien erfordern würde, die alles, was in Labors auch nur annähernd realisierbar wäre, um viele Größenordnungen übersteigen würde. Manche Physiker zögerten daher, überhaupt an Theorien der Quantengravitation zu arbeiten, weil deren experimentelle Überprü-

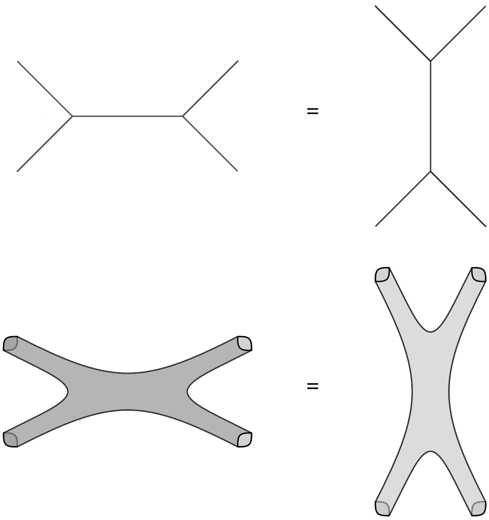

Abb. 1.7 Die String-Streudiagramme der beiden ungleichen Streuprozesse besitzen dieselbe Topologie.

fung so unwahrscheinlich war und alle Versuche, die Quantenmechanik mit der allgemeinen Relativitätstheorie zu vereinen, zu unsinnigen Ergebnissen zu führen schienen. Andererseits wissen Physiker aus der Erfahrung der Entdeckungen von Maxwell, Dirac und anderen aber auch, dass ein scheinbarer Widerspruch nicht nur ein Grund für Kopfschmerzen, sondern auch ein Geschenk sein kann – eine Chance für einen Durchbruch – und dass die Überwindung eines solchen Widerspruchs die Physik schon oft entscheidend vorangebracht hat. Aus diesem Grund werden Physiker nicht müde, diese Inkonsistenz aufzulösen – immer in der Hoffnung, am Ende zu einer tragfähigen, einheitlichen Theorie zu gelangen.

Eine mögliche Lösung kam aus einer ganz unerwarteten Richtung. In den späten 1960er-Jahren grübelten die Physiker verwirrt über die Ergebnisse von Experimenten zur Streuung subatomarer Teilchen, der sogenannten Hadronen. Sie betrachteten zwei Arten von Prozessen. Im ersten Fall gab ein Teilchen etwas ab, das von einem zweiten Teilchen absorbiert wurde. Im zweiten Fall verschmolzen zwei Teilchen zu einem einzigen, bevor sie sich wieder in zwei Teilchen teilten (siehe Abb. 1.7). Obwohl beide Prozesse recht unterschiedlich zu sein schienen, führten sie zu denselben Ergebnissen. Die Physiker verstanden nicht, warum dies der Fall war, vermuteten aber, dass sie einer neuen Art von Symmetrie auf der Spur waren.

Später stellte sich heraus, dass diese Symmetrie offengelegt werden konnte – sodass die beiden scheinbar unterschiedlichen physikalischen Prozesse als identisch aufgefasst werden konnten –, wenn man die punktförmigen Teilchen in den ursprünglichen Modellen durch gestreckte, vibrierende Objekte ersetzte, die man als *Strings* bezeichnete. Ursprünglich wurden Strings als mathematische Objekte ohne tiefere physikalische Begründung eingeführt, aber die Vorstellung hat sich inzwischen durchgesetzt und erwies sich als recht fruchtbar. Dies war die Geburtsstunde der *Stringtheorie* – einer Theorie, in der Teilchen (Hadronen) als Grundbausteine der Natur durch Strings ersetzt wurden. Auf diese Weise erhielt die obige Symmetrie eine geometrische Interpretation: Wenn Strings sich bewegen, bilden sie Röhren, und wenn sie sich verbinden oder aufspalten, bilden sie Flächen. Die beiden Streukanäle entsprechen für Strings dem gleichen Diagramm, wodurch sich diese Symmetrie erklärt (siehe Abb. 1.7).

Es zeigte sich bald, dass Strings keine sonderlich gute Beschreibung von Hadronen sind, obwohl sie sich ausgezeichnet zur Beschreibung von Quantenaspekten der Gravitation eigneten. Die Stringtheorie sagt für den Zustand mit der niedrigsten Energie Eigenschaften voraus (ein masseloses Teilchen mit Spin zwei), die genau denen des Gravitons entsprechen, des Quants der Gravitation (so wie das Photon das Quant des Elektromagnetismus ist), was sie zu einem erstklassigen Kandidaten für eine Quantentheorie der Gravitation macht. Wenn wir Gravitonen als winzige Strings statt als Punktteilchen auffassen, verschwinden viele der Unendlichkeiten, unter denen frühere Theorien litten.

Die Stringtheorie ist eine stark mathematisch geprägte Theorie. Sie wurde enorm von der Mathematik beeinflusst und sogar geformt; im Gegenzug hatte die Physik in Form der Stringtheorie ebenfalls einen großen Einfluss auf die reine Mathematik. Die Stringtheorie wird derzeit als der heißeste Kandidat für die Beschreibung einer Quantentheorie der Gravitation gehandelt. Darüber hinaus könnte sie – quasi als Nebenprodukt – auch alle anderen Kräfte in einem einzigen Ansatz vereinen, indem sie sie als Manifestationen von Strings und deren Aufspaltung und Vereinigung beschreibt. An diesem Punkt befindet sich die Grundlagenphysik zur Zeit: Wir haben eine Theorie, die mathematisch sehr tiefgehend und umfassend ist (wie wir später noch sehen werden), die aber experimentell noch nicht bestätigt wurde – und dies aufgrund der extremen Kleinheit der Strings in naher Zukunft vermutlich auch nicht werden wird.