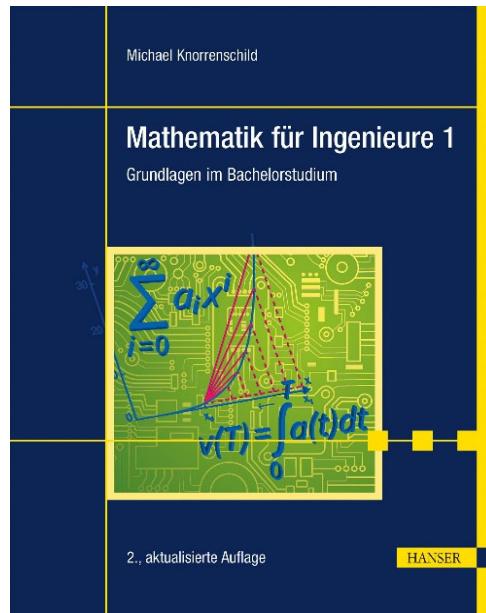


HANSER



Leseprobe

zu
„Mathematik für Ingenieure 1“
von Michael Knorrenchild

ISBN (Buch): 978-3-446-47190-0

ISBN (E-Book): 978-3-446-47207-5

Weitere Informationen und Bestellungen unter
<http://www.hanser-fachbuch.de/9783446471900>
sowie im Buchhandel

Vorwort

Schon wieder ein Mathematik-Buch für Ingenieurstudiengänge. Es gibt doch schon so viele. Richtig. Dieses hier ist anders. Die Zeiten haben sich geändert. Bachelor-Studiengänge bieten ein verkürztes Studium (und die Kürzungen fanden in manchen Fällen auf Kosten der Grundlagenfächer statt). Anwendungsorientiert soll gelehrt werden, mühselige Rechnerei werde ja vom Computer übernommen. Das ist einleuchtend. Ein Irrtum ist es jedoch, daraus zu schließen, es brauche weniger Mathematik-Kenntnisse. Rechnen ist nicht Mathematik. Um einen Computer für mathematische Fragestellungen zu verwenden, bedarf es nicht weniger Mathematik-Kenntnisse, sondern im Gegenteil mehr, im Sinne von vertiefte, Mathematik-Kenntnisse. Durch unsachgemäße Verwendung von Computern entsteht regelmäßig volkswirtschaftlicher Schaden (und manchmal auch an Leib und Leben). Ingenieure benötigen also ein Verständnis mathematischer Begriffe und Methoden, um Computer sinnvoll einzusetzen und Ergebnisse richtig interpretieren zu können. Und das gilt nicht nur für Ingenieure, sondern für alle Absolventen von technischen und naturwissenschaftlichen Studiengängen.

Dieses Buch versucht diese Philosophie umzusetzen, – Methodenwissen anstelle von Faktenwissen. Daher finden sich in diesem Buch nicht allzu viele Rechenaufgaben, sondern vielmehr Aufgaben, die das Verständnis der Begriffe und Methoden hinterfragen und festigen. An Vorwissen reichen Schulkenntnisse bzw. ein (ernsthaft!) besuchter Vorkurs, wie er an Fachhochschulen üblicherweise angeboten wird, aus.

Das Vorgehen fußt auf langjährigen Lehrerfahrungen im Bereich Mathematik für Anwender. Studierende aus drei Kontinenten und vielerlei Kulturen haben das Konzept durch ihr Feedback zu meinen Lehrveranstaltungen auf den richtigen Weg gebracht. Alle studentischen Fragen und Kommentare, egal auf welchem Niveau, haben mir ermöglicht, meine Lehrmethoden zu verfeinern. Dafür gebührt ihnen Dank an erster Stelle.

Besonderen Dank schulde ich den damaligen Ingenieurstudenten Christian Jelenowski, Christof Kaufmann und Arndt Steffen. Sie haben große Teile des Buches gegengelesen, dabei viele Fehler, Ungenauigkeiten und unbeholfene Erklärungen gefunden und zu meiner Aufmerksamkeit gebracht. Alle Fehler, die sich jetzt noch finden, gehen daher auf meine eigene Kappe.

Dem Team des Carl Hanser Verlags bin ich dankbar für die gewohnt angenehme Zusammenarbeit, besonders Frau Natalia Silakova für ihren Einsatz bei der Realisierung der Neuauflage.

Für diese Neuauflage wurden viele Kleinigkeiten verbessert und überarbeitet. Hinweise und Anregungen aus dem Leserkreis sind jederzeit willkommen.

Bochum, im Oktober 2021

Michael Knorrenschild

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|--|--|----|
| 1 Grundlagen (Steilkurs) | 1.1 Fakten zu Funktionen | 13 |
| | 1.2 Trigonometrische Funktionen | 20 |
| | 1.3 Hyperbelfunktionen | 27 |
| | 1.4 Erste Schritte in MATLAB | 29 |
| | 1.4.1 Einfache arithmetische Ausdrücke | 29 |
| | 1.4.2 Plotten von Funktionen | 31 |
| | 1.4.3 Selbst definierte Funktionen | 34 |
| | 1.5 Arbeitstechniken | 35 |
| | | |
| 2 Erste Begegnung mit dem Unendlichen | 2.1 Folgen und Grenzwerte | 39 |
| | 2.2 Grenzwerte bei Funktionen – Stetigkeit | 51 |
| | 2.3 Uneigentliche Grenzwerte | 61 |
| | | |
| 3 Polynome und rationale Funktionen | 3.1 Polynome | 66 |
| | 3.1.1 Das Horner-Schema | 67 |
| | 3.1.2 Multiplikation von Polynomen | 77 |
| | 3.2 Rationale Funktionen | 78 |
| | 3.2.1 Partialbruchzerlegung | 80 |
| | 3.2.2 Grenzwertverhalten von rationalen Funktionen | 85 |

| | | |
|------------------------------------|--|-----|
| 4 Vom Reellen zum Komplexen | 4.1 Komplexe Zahlen | 89 |
| | 4.2 Wurzelrechnung | 99 |
| 5 Differenzialrechnung | | |
| | 5.1 Differenzierbarkeit und Ableitung | 105 |
| | 5.2 Extremwerte | 116 |
| | 5.3 Numerische Bestimmung von Nullstellen: Newton- und Sekantenverfahren | 124 |
| | 5.4 Regeln von L'Hospital | 129 |
| | 5.5 Höhere Ableitungen | 132 |
| 6 Integralrechnung | | |
| | 6.1 Grundlagen | 144 |
| | 6.2 Berechnung von Stammfunktionen | 154 |
| | 6.2.1 Partielle Integration | 160 |
| | 6.2.2 Integration von rationalen Funktionen | 161 |
| | 6.2.3 Substitutionsregel | 165 |
| | 6.3 Mittelwertsatz der Integralrechnung | 173 |
| | 6.4 Uneigentliche Integrale | 174 |
| | 6.5 Berechnung von Längen von Kurven | 178 |
| | 6.6 Rotationskörper | 180 |
| | 6.7 Kurven in Parameterform | 183 |
| | 6.8 Integration von Funktionen über Polarkoordinaten | 187 |
| 7 Lineare Algebra | | |
| | 7.1 Vektorrechnung | 193 |
| | 7.1.1 Grundlagen | 193 |
| | 7.1.2 Geraden | 201 |

| | | |
|-----------------------------|---|-----|
| 7.1.3 | Ebenen | 205 |
| 7.1.4 | Abstandsberechnungen | 213 |
| 7.2 | Vektorräume und ihre Darstellung | 218 |
| 7.3 | Lineare Gleichungssysteme | 229 |
| 7.3.1 | Die Lösungsmenge von homogenen linearen Gleichungssystemen | 237 |
| 7.3.2 | Die Lösungsmenge von inhomogenen linea- ren Gleichungssystemen | 240 |
| 7.3.3 | Der Gauß-Algorithmus – Praktische Lösung von linearen Gleichungssystemen | 248 |
| 7.4 | Determinanten | 253 |
| 7.5 | Orthogonalbasen | 258 |
| 7.6 | Spezielle Matrizen | 267 |
| 7.7 | Lineare Abbildungen | 272 |
| 8 | Unendliche Reihen | |
| 8.1 | Grundlagen | 281 |
| 8.2 | Taylor-Reihen | 288 |
| Lösungen | | 300 |
| Literaturverzeichnis | | 335 |
| Sachwortverzeichnis | | 337 |

1 Grundlagen (Steilkurs)

Wir beginnen mit einer sehr gerafften Zusammenstellung von wichtigen Fakten. Dass Sie den Schulstoff beherrschen, wird vorausgesetzt. Ohne diese Voraarbeit werden Sie an diesem Buch – und an keinem anderen Mathematik-Buch, an keiner Vorlesung und Übungsstunde Freude haben. Und ohne Freude lernt es sich schlecht.

Die Mehrzahl der Begriffe in diesem Kapitel sollten Ihnen deshalb bekannt vorkommen, oder mehr als das: Sie sollten damit vertraut sein. Sie finden daher hier auch keine größeren Beispiele. Unabdingbar ist aber das Verständnis des Funktionsbegriffs, daher finden Sie hier nochmals die genauen Definitionen. Etwas ausführlicher wird es bei den hyperbolischen Funktionen, die nicht unbedingt in Schulen und Vorkurs behandelt werden.

Ein erster Einstieg in MATLAB gehört ebenfalls dazu. Weiter einige generelle Hinweise zum Herangehen an Aufgabenstellungen (nicht nur in der Mathematik), damit Sie, egal wie schwer oder leicht die Aufgabe ist, einen Einstieg finden. Mit diesen Hinweisen gehören Hindernisse wie „Ich wusste gar nicht, wie ich die Aufgabe anfangen sollte“ der Vergangenheit an. Für den Start in die Lösung einer Aufgabe ist also gesorgt, und wie's danach weitergeht, ist eine Übungssache.

1.1 Fakten zu Funktionen

Definition 1.1

Eine **Funktion** $f : X \rightarrow Y$ (auch **Abbildung** genannt) ordnet jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zu. Die Menge X heißt dabei **Definitionsbereich**, Y heißt **Wertebereich**. Die wirklich getroffenen Bildpunkte bezeichnet man als **Bildmenge** von f und schreibt:

$$f(X) := \{ f(x) \mid x \in X \} = \{ y \in Y \mid \text{es gibt } x \in X \text{ mit } f(x) = y \}.$$

Der Graph einer Funktion f ist die Menge

$$\text{Graph}(f) := \{ (x, f(x)) \mid x \in X \}$$

Eine Funktion kann man auch notieren als $f : x \mapsto f(x)$ und bezeichnet dabei x als die **Variable** (Veränderliche) und $f(x)$ als den **Funktionswert an der Stelle x** .

Es ist unbedingt nötig, die Funktion f vom Funktionswert $f(x)$ zu unterscheiden. Dies sind völlig verschiedene Objekte: f ist eine

Funktion, Abbildung

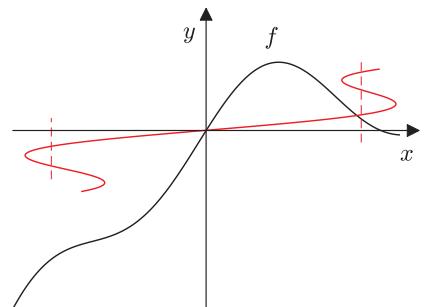


Bild 1.1 Die schwarze Linie ist der Graph einer Funktion f , denn jedem x wird genau ein $y = f(x)$ zugeordnet. Die rote Linie ist der Graph einer Zuordnung, die keine Funktion ist, denn manchen x sind mehrere y zugeordnet.

⚠ Immer schön Funktion f (eine Zuordnung) und Funktionswert $f(x)$ (meist eine Zahl) auseinanderhalten, um nicht unnötige Verwirrung zu schaffen.

Umkehrbarkeit von Funktionen

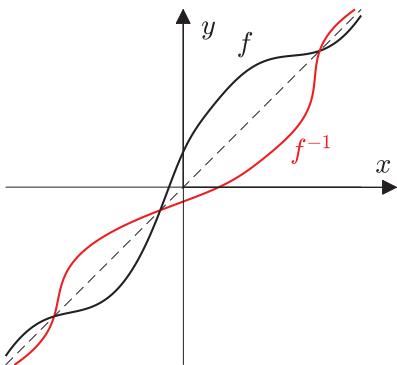


Bild 1.2 Die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion sind symmetrisch zur Winkelhalbierenden.

Zuordnung, $f(x)$ ist (meist) eine Zahl. In vielen Büchern findet man Formulierungen wie „... eine Funktion $f(x)\dots$ “, was, genau genommen, Unsinn ist. Diese saloppe Formulierung ist in Ordnung, wenn jeder weiß, was gemeint ist, führt aber in anderen Situationen zu Unklarheiten und Missverständnissen.

Definition 1.2

Sei $f : X \rightarrow f(X)$ und $M \subseteq X$. f heißt **umkehrbar** auf M , wenn jedes $y \in f(M)$ nur genau einmal getroffen wird, d. h.

$$\text{für alle } x_1, x_2 \in M \text{ gilt: } f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Die Abbildung, die jedem Bildpunkt $f(x)$ das dann eindeutige x zuordnet, heißt **Umkehrfunktion** $f^{-1} : f(M) \rightarrow M$.

Ob jedes y nur einmal getroffen wird, sieht man, indem man versucht, die Gleichung $y = f(x)$ nach x aufzulösen. Gelingt dies äquivalent und in eindeutiger Weise, so gibt es zu jedem y nur genau ein x , das y wird also nur einmal getroffen. Am Ende der Lösung nach x steht auf der anderen Seite der Gleichung $f^{-1}(y)$.

⚠ Umkehrfunktion f^{-1} nicht mit Kehrwert $\frac{1}{f}$ verwechseln. Bei Funktionswerten dagegen hilft genaues Lesen: $f^{-1}(x)$ ist der Wert der Umkehrfunktion an der Stelle x , während $(f(x))^{-1}$ der Kehrwert von $f(x)$ ist.

Beispiel 1.1

f gegeben durch $f(x) = 5x + 7$ soll auf Umkehrbarkeit geprüft werden. Umstellung ergibt:

$$y = 5x + 7 \iff x = \frac{1}{5}(y - 7)$$

also ist f umkehrbar und die Umkehrfunktion f^{-1} hat die Funktionsvorschrift $f^{-1}(x) = 0.2(x - 7)$. ■

Komposition von Funktionen

Definition 1.3

Hat man zwei Funktionen f und g , so bezeichnet man mit $f \circ g$ die **Komposition** (Hintereinanderausführung) der Funktionen.

Es ist dann

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Sind f und g umkehrbar, ist auch $f \circ g$ umkehrbar und es gilt:

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)).$$

Die Komposition $f \circ g$ kann nur gebildet werden, wenn die Bildmenge von g im Definitionsbereich von f liegt. Bei $f \circ g$ wird zuerst g angewandt und danach f . Entsprechend gilt bei den Umkehrfunktionen: Damit $(f \circ g)^{-1}$ existiert, muss die Bildmenge von f^{-1} im Definitionsbereich von g^{-1} liegen.

Beispiel 1.2

$f(x) = x^2$, $g(x) = x + 4$: Dann ist

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+4) = (x+4)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 4$$

f ist umkehrbar auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. g ist umkehrbar auf \mathbb{R} , $g^{-1}(x) = x - 4$, also gilt:

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \sqrt{x} - 4 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \sqrt{x-4} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{\geq 4} \quad \blacksquare$$

Definition 1.4

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- f heißt **streng monoton steigend**, wenn für alle x, y gilt
 $x < y \implies f(x) < f(y)$.
- f heißt **monoton steigend**, wenn für alle x, y gilt
 $x < y \implies f(x) \leq f(y)$.
- f heißt **streng monoton fallend** wenn für alle x, y gilt
 $x < y \implies f(x) > f(y)$.
- f heißt **monoton fallend**, wenn für alle x, y gilt
 $x < y \implies f(x) \geq f(y)$.

Monotonie von Funktionen

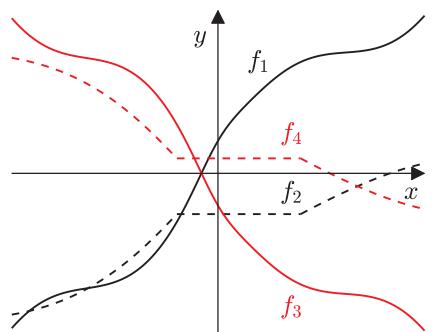


Bild 1.3 f_1 ist streng monoton steigend, f_2 monoton steigend, f_3 ist streng monoton fallend, f_4 monoton fallend.

Translation, Verschiebung

Definition 1.5

Die Abbildung $t_d : x \mapsto x + d$ heißt **Translation** (Verschiebung) um (die Konstante) d .

Translationen bewirken eine Verschiebung des Graphen von f in horizontaler oder vertikaler Richtung.

Die Abbildung t_d an sich ist simpel; interessant wird es, wenn sie mit anderen Funktionen zusammenkommt:

$f \circ t_d$: Hier wirkt sich die Translation in x -Richtung aus.

$$(f \circ t_d)(x) = f(x + d), \text{ siehe Bild 1.4(a).}$$

$t_d \circ f$: Hier wirkt sich die Translation in y -Richtung aus.

$$(t_d \circ f)(x) = f(x) + d, \text{ siehe Bild 1.4(d).}$$

Skalierung

Definition 1.6

Die Abbildung $s_c : x \mapsto cx$ heißt **Skalierung** um (den konstanten Faktor) c .

Skalierungen bewirken eine Stauchung oder Dehnung des Graphen von f um einen Faktor.

Auch eine Skalierung ist für sich selbst nicht sonderlich spannend und entfaltet erst ihre Wirkung im Zusammenspiel mit anderen Funktionen:

$f \circ s_c$: Hier wirkt sich die Skalierung in x -Richtung aus.

$$(f \circ s_c)(x) = f(cx), \text{ siehe Bild 1.4(b).}$$

$s_c \circ f$: Hier wirkt sich die Skalierung in y -Richtung aus.

$$(s_c \circ f)(x) = c f(x), \text{ siehe Bild 1.4(e).}$$

Spiegelung

Definition 1.7

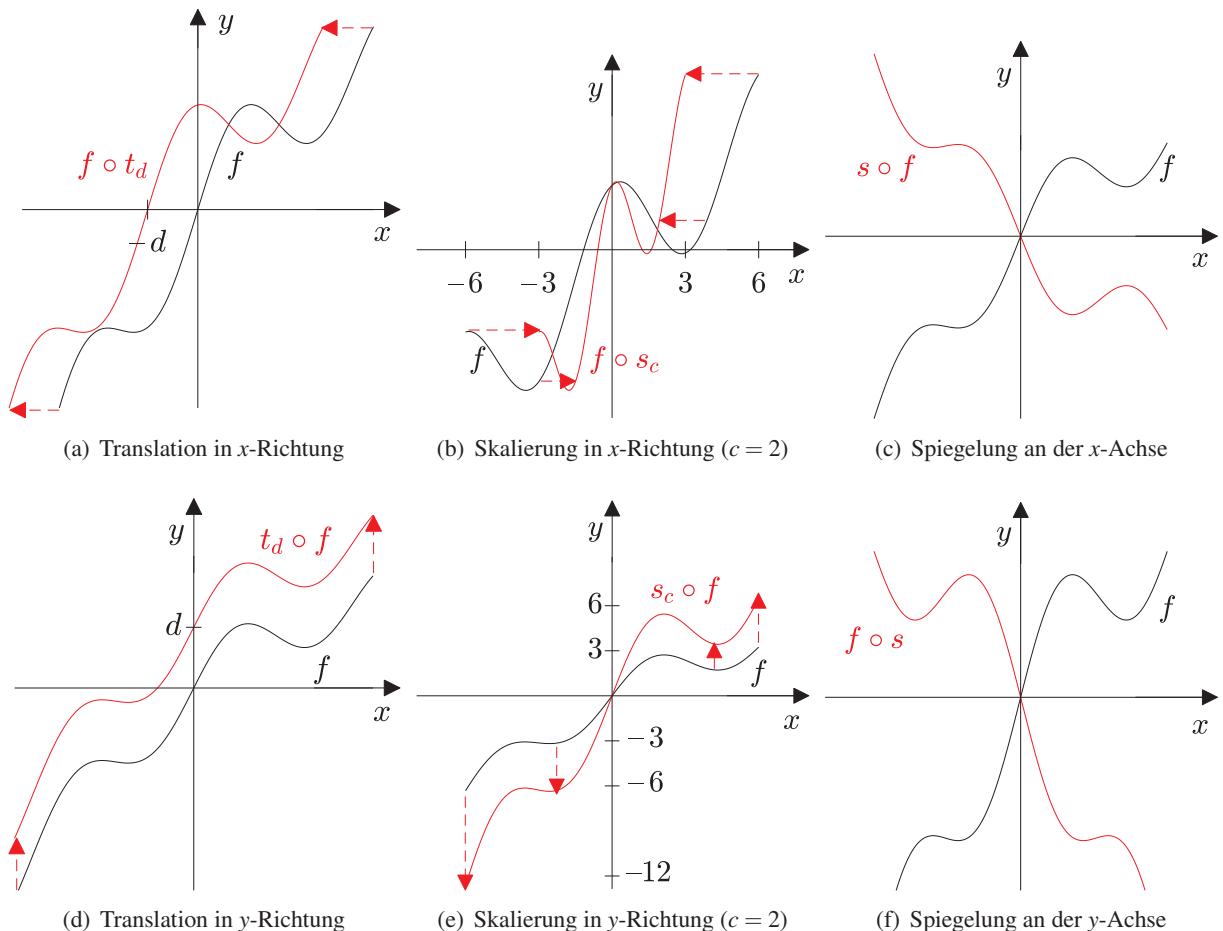
Die Skalierung $s : x \mapsto -x$ heißt **Spiegelung**.

Spiegelungen bewirken eine Spiegelung des Graphen von f an der x - bzw. y -Achse.

Eine Spiegelung ist also nichts anderes als eine Skalierung um den Faktor -1 . Sie heißt natürlich Spiegelung, weil etwas gespiegelt wird. In Kombination mit einer Funktion f wird nämlich der Graph von f gespiegelt und zwar

$f \circ s$: Spiegelung an y -Achse: $(f \circ s)(x) = f(-x)$, siehe Bild 1.4(f)

$s \circ f$: Spiegelung an x -Achse: $(s \circ f)(x) = -f(x)$, siehe Bild 1.4(c).

**Bild 1.4** Translation, Skalierung und Spiegelung: Auswirkungen am Graphen von f **Definition 1.8****Polynom vom Grad n**

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Dann heißt die Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

Polynom vom Grad n . Die a_i , $i = 0, \dots, n$ nennt man auch die **Koeffizienten** des Polynoms. Das Polynom $p(x) = 0$ konstant heißt **Nullpolynom**.

Beispiel 1.3

Konstante Funktionen sind auch Polynome, und zwar vom Grad 0: $p(x) = cx^0$.

$p(x) = 4x^3 - 2x^5 + 2x - 9$ ist ein Polynom vom Grad 5. Die Koeffizienten lauten $a_5 = -2, a_4 = 0, a_3 = 4, a_2 = 0, a_1 = 2, a_0 = -9$.

$p(x) = (x+3)^7(x^2 - 5x + 2)^3$ ist ein Polynom vom Grad $7 + 2 \cdot 3 = 13$.

$p(x) = x^2 + 2x^{0.5}$ ist kein Polynom (nur natürliche Zahlen sind als Exponent erlaubt). ■

Rationale Funktion

Definition 1.9

Rationale Funktionen sind Quotienten zweier Polynome.

Seien p, q Polynome, q sei nicht das Nullpolynom. Dann heißt die Funktion f , die gegeben ist durch

$$f(x) := \frac{p(x)}{q(x)}, \quad \text{rationale Funktion.}$$

Beispiel 1.4

Insbesondere sind auch Polynome rationale Funktionen (man kann das Nennerpolynom einfach konstant als $q(x) = 1$ wählen). Eine typische rationale Funktion sieht aber eher so aus: $f(x) := \frac{x^2 + 2x - 7}{5x^{13} - 6x^7 + 2}$. ■

Gerade und ungerade Funktionen

Definition 1.10

Der Graph einer geraden Funktion ist symmetrisch zur y -Achse. Der Graph einer ungeraden Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **gerade**, wenn

$$f(x) = f(-x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

gilt. f heißt **ungerade**, wenn gilt:

$$f(x) = -f(-x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 1.5

Die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ ist eine gerade Funktion.

Polynome in x , in denen nur Potenzen von x mit geradem Exponenten vorkommen, sind gerade Funktionen. 0 ist dabei auch als gerade Zahl anzusehen.

Polynome in x , in denen nur Potenzen von x mit ungeradem Exponenten vorkommen, sind ungerade Funktionen.

Der Quotient zweier gerader Funktionen ist eine gerade Funktion.

Der Quotient zweier ungerader Funktionen ist auch eine gerade Funktion (siehe Aufgabe 1.1).

Der Quotient einer geraden Funktion durch eine ungerade oder umgekehrt ist eine ungerade Funktion. Beispiele dazu:

$$p_1(x) = x^2: \text{gerade.}$$

$$p_2(x) = -5x^{14} + 3x^8 - x^2 + 7: \text{gerade.}$$

$$p_3(x) = 3x^7 + 2x^3 - x: \text{ungerade.}$$

$$r_1(x) = \frac{-7x^8 + 2x^4 - x^2 + 2}{2x^5 + x^3 - 3x}: \text{ungerade.}$$

$$r_2(x) = \frac{x^5 - 2x^3 - x}{2x^7 + 5x^3 - 2x}: \text{gerade.} \quad \blacksquare$$

Definition 1.11

Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\exp(x) := e^x$, wobei $e = 2.718281828\dots$ die Eulersche Zahl ist, wird **Exponentialfunktion** oder meist kurz **e-Funktion** genannt. Die e-Funktion ist streng monoton steigend auf ganz \mathbb{R} . Die Bildmenge ist $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

Die e-Funktion ist einfach eine Potenzfunktion; man rechnet mit ihr gemäß den bekannten Potenzrechenregeln.

Satz 1.1

Die e-Funktion ist umkehrbar; ihre Umkehrfunktion heißt **natürlicher Logarithmus**, $\ln : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Es gelten die folgenden Rechenregeln für alle $x, y > 0$:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \tag{1.1}$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \tag{1.2}$$

$$\ln(x^r) = r \cdot \ln x, \quad \text{für alle } r \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

$$\ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \cdot \ln x, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

Exponentialfunktion

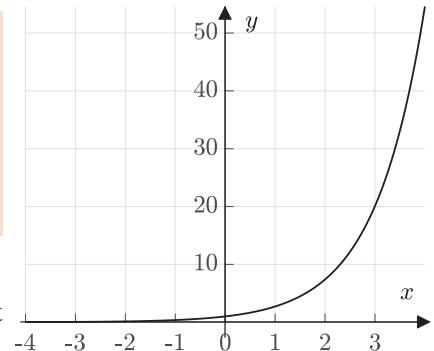


Bild 1.5 Der Graph von \exp

Logarithmusfunktion

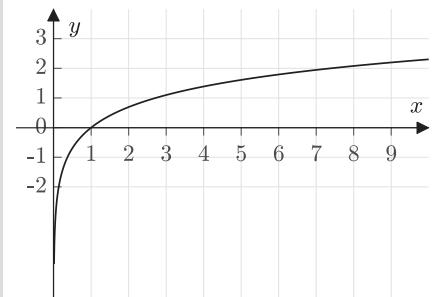


Bild 1.6 Der Graph von \ln

1.2 Trigonometrische Funktionen

Alle Winkel werden im Bogenmaß verwendet. Das bedeutet, dass wir anstelle des Winkels in Grad die Länge des zu diesem Winkel gehörenden Kreisbogen auf dem Einheitskreis verwenden¹. Der gesamte Einheitskreis wird durch einen Winkel von 360° beschrieben und hat einen Umfang von 2π , also entspricht 360° im Bogenmaß 2π . Die Umrechnung geschieht mit dem klassischen Dreisatz.

Die Winkelfunktionen sin, cos, tan, cot können durch Längen von Streckenabschnitten am Einheitskreis definiert werden, siehe Bild 1.7. Je nach Lage der Streckenabschnitte muss diese Länge noch ein Vorzeichen bekommen, z. B. liegt für $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ die ganze Geschichte im zweiten Quadranten (links oben) und damit wird $\sin x > 0$, $\cos x < 0$, $\tan x > 0$, $\cot x < 0$.

An diesem Bild können Sie viele wichtige Eigenschaften der Winkelfunktionen direkt ablesen. Es ist aber in den anderen drei Quadranten auf die Vorzeichen der Größen zu achten. Die Eigenschaften aus Formeln abzulesen ist oft etwas verwirrend, weil die Winkelfunktionen und auch die Formeln recht ähnlich aussehen. Wirkliche Einsicht bringt dagegen dieses Bild.

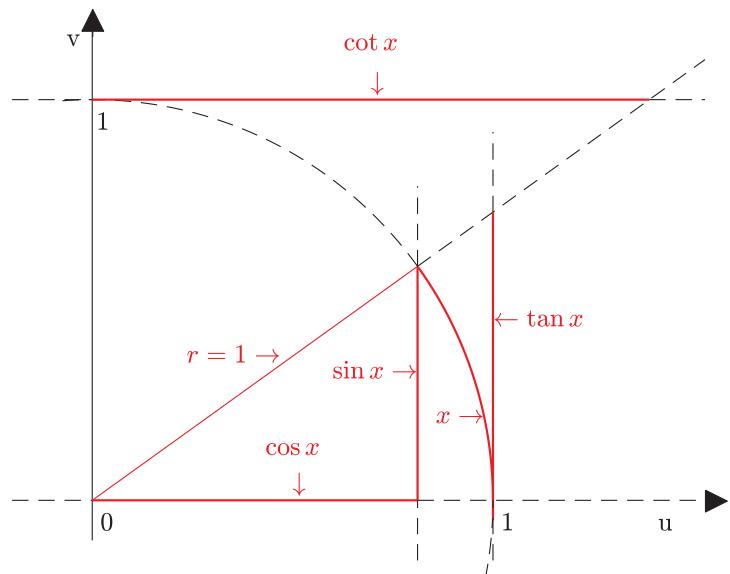


Bild 1.7 Definition von sin, cos, tan und cot am Einheitskreis: x ist der Winkel im Bogenmaß.

¹Sie werden schnell merken, dass in der Mathematik i. Allg. die Dinge genauso heißen wie sie sind: Bogenmaß heißt Bogenmaß, weil hier die Länge eines Kreisbogens gemessen wird.

Satz 1.2**Eigenschaften (I) von sin und cos**

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sin x \in [-1, 1], \quad \cos x \in [-1, 1] \quad (1.5)$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \quad (1.6)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (1.7)$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x \quad (1.8)$$

$$|\sin x| \leq |x| \quad (1.9)$$

Zur Festigung: Machen Sie sich alle diese Eigenschaften an Bild 1.7 klar.

Hierbei bedeutet $\sin^2 x := (\sin x)^2$ und $\cos^2 x := (\cos x)^2$.

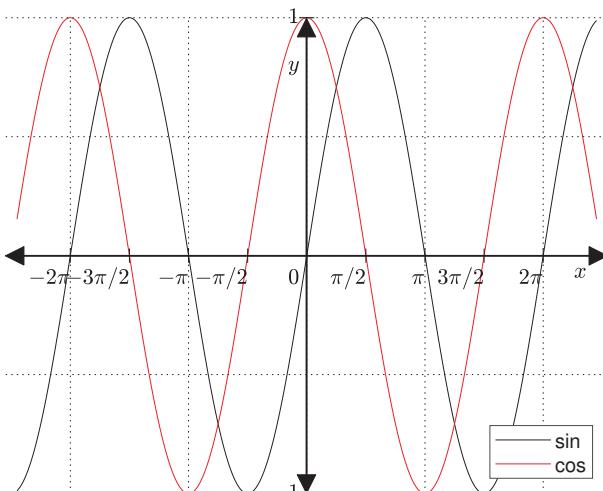


Bild 1.8 Die Graphen von sin und cos

Definition 1.12

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **p-periodisch**, wenn gilt:

$$f(x + p) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist p eine Konstante, die sog. **Periode** der Funktion f .

Man sieht: Der Graph von sin ist einfach der von cos, nur verschoben (und umgekehrt). cos ist also eine Translation (siehe Def. 1.5) von sin um $\frac{\pi}{2}$, wir können also schreiben: $\cos = \sin \circ t_{0.5\pi}$.

Periodische Funktion

sin und cos sind nach (1.6) also 2π -periodische Funktionen.

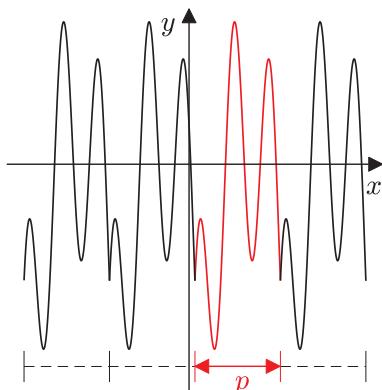


Bild 1.9 Der Graph einer p -periodischen Funktion: Ein Abschnitt der Länge p wiederholt sich.

Eigenschaften (II) von sin und cos

Zur Festigung: Formulieren Sie diese Eigenschaften als Kompositionen von sin, cos und geeigneten Translationen t_c .

Man sieht also: sin und cos sind Translationen voneinander.

Eine p -periodische Funktion ist eindeutig beschrieben durch Angabe der Funktionsvorschrift auf einem Intervall der Länge p . Außerhalb dieses Intervalls wird die Funktion „periodisch fortgesetzt“. Für den Graphen von f bedeutet das, dass der Graph über diesem Intervall rechts und links immer wieder angefügt wird. Dabei können natürlich Sprünge entstehen, wenn die Stücke an den Klebestellen nicht zusammenpassen. In Bild 1.9 passiert das aber nicht, da die Funktionswerte am linken und am rechten Rand des Intervalls übereinstimmen.

Satz 1.3

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x, & \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x \\ \sin(\pi - x) &= \sin x, & \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(x + \pi) &= -\sin x, & \cos(x + \pi) &= -\cos x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x, & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \end{aligned}$$

Additionstheoreme für sin und cos

Satz 1.4

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \end{aligned}$$

Schwingungen

Schwingungen entstehen durch zwei Skalierungen und eine Translation aus der sin-Funktion.

Definition 1.13

Sei $A > 0$, $\omega > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) := A \sin(\omega t + \varphi)$$

heißt **Schwingung** mit **Amplitude** A , **Kreisfrequenz** ω und

Sachwortverzeichnis

- Abbildung, 13
lineare, 272
- Ableitung, 106
höhere, 132
- absolut konvergent, 284
- Absolutbetrag, 91
- absolutes Extremum, 117
- Abstand
Gerade-Ebene, 214
Gerade-Gerade, 216
Punkt-Ebene, 213
Punkt-Gerade, 215
Punkt-Punkt, 213
- Additionstheorem
für sin und cos, 22, 96
für sinh und cosh, 28
für tan, 24
- Algorithmus, 46
- Amplitude, 22
- Arbeit, 171, 200
- Arbeitsintegral, 171
- \arccos , 24
- arccot , 25
- \arcsin , 24
- \arctan , 24
- Argument, 92
- Asymptote, 62
- Basis, 221
- Beschleunigung, 133
- beschränkt, 41, 58
- Bierdosenproblem, 122
- Bildmenge, 13
- Bisektion, 60
- Bogenlänge, 189
- Bogenlänge von Kurven, 179, 184
- $C^0(I)$, 133
- $C^n(I)$, 133
- $C^\infty(I)$, 133
- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 200
- Cauchyscher Hauptwert, 177
- \cosh , 27
- \coth , 27
- Cramersche Regel, 255
- Definitionsbereich, 13
- Definitionsfläche, 55
- Determinante, 254
- Dezimalzahl, 70
- Differenzenquotient, 105
- Differentialrechnung, 105
- differenzierbar, 106
- Dimension, 223
- direkte Verfahren, 248
- Drehmoment, 169, 210
- Drehung, 268
- Dreiecksungleichung, 92, 198
- Dualzahl, 70
- Ebene
Koordinatenform, 206
Normalenform, 206
Parameterdarstellung, 205
- Effektivwert, 174
- Einheitsmatrix, 224
- Einheitsvektor, 199, 222
- Einheitswurzel, 101
- Eintor, 230
- Ellipsensektor, 187
- Entwickelpunkt, 289
- Erzeugnis, 218
- Eulersche Formel, 93
- Eulersche Zahl, 50
- Extremum, 117
- Extremwerte, 116
- Faltung, 77
- Federkonstante, 171, 172
- Fehler, absoluter, 119
- Fehlerfortpflanzung, 119
- Fehlerintegral, Gaußsches, 297
- Folge, 39
monotone, 40
- freier Fall, 157
- Fußpunkt, 213, 214
- Fundamentalsatz der Algebra, 101
- Funktion, 13
gerade, 18
monoton fallende, 15
monoton steigende, 15
periodische, 21
rationale, 18
streng monoton fallende, 15
streng monoton steigende, 15
ungerade, 18
- Funktionswert, 13
- Gauß-Algorithmus, 252
- Gaußsche Glockenkurve, 63
- Gaußsche Zahlenebene, 91
- Gaußsches Fehlerintegral, 297
- geometrische Folge, 39
- geometrische Reihe, 282
- geometrische Summenformel, 48
- Gerade, Parameterdarstellung, 201
- Geschwindigkeit, 107, 119, 156
- Gleichungssystem
homogenes lineares, 237
inhomogenes lineares, 237
lineares, 229
- Gleichwert, 174
- Glockenkurve, Gaußsche, 63
- Gram-Schmidt-Verfahren, 262
- Gravitationsfeld, 172
- Grenzwert, 42
- harmonische Reihe, 283, 286
- Hauptsatz der Integralrechnung, 149
- Hauptwert, Cauchyscher, 177
- Hookesches Gesetz, 171

- Horner-Schema, 68
 vollständiges, 76, 134
 Householder-Matrix, 271
 Hülle, lineare, 218
 Hyperbel, 27
 Imaginärteil, 90
 Integral
 bestimmtes, 146
 unbestimmtes, 145
 uneigentliches, 174
 Integralkriterium, 288
 Integrationskonstante, 145
 integrierbar, 146
 Kettenregel, 114
 Knotenpotenzialmethode, 231
 Koeffizientenvergleich, 66
 komplexe Zahlen, 90
 konjugiert komplex, 91
 konkav, 137
 konvergent, 42
 Konvergenzradius, 292
 konvex, 137
 Koordinaten, 223
 Krümmungskreis, 138
 Kraft, 197
 Kreisfrequenz, 22
 Kreuzprodukt, 208
 Landau-Symbol, 45, 291
 Leibnizkriterium, 288
 Leibnizsche Sektorformel, 186
 linear unabhängig, 221
 Linearisierung, 124
 Linearkombination, 218
 linksgekrümmt, 137
 linksseitig differenzierbar, 109
 linksseitige Ableitung, 109
 Logarithmus
 natürlicher, 19
 Rechenregeln, 19
 Maclaurinsche Reihe, 289
 Mantelfläche, 182
 Matrix, 224
 inverse, 246
 orthogonale, 265
 reguläre, 237
 singuläre, 237
 symmetrische, 256
 transponierte, 256
 Maximum, 117
 Median, 273
 Minimum, 117
 Mittelwertsatz
 der Differenzialrechnung, 119
 der Integralrechnung, 173
 Moivresche Formel, 96
 Monotonie von Funktionen, 15
 Newton, 107
 Newton-Verfahren, 125
 Norm, 197
 Euklidische, 199
 Normalenvektor, 206
 Nullfolge, 42
 Nullmatrix, 224
 Nullpolynom, 17
 Nullstelle, mehrfache, 74, 135
 Nullvektor, 194
 $O(\dots)$, 45, 291
 Oberfläche, 182
 Obersumme, 146
 orthogonal, 200
 orthonormal, 261
 Ortsvektor, 195
 Parallelogramm
 Diagonalen, 204
 Flächeninhalt, 210
 Parallelotop, 211
 Parameterform, 183
 Partialbruchzerlegung, 80
 Partielle Integration, 160
 periodisch, 21
 Permutationsmatrix, 269
 Phasenwinkel, 23
 Pol, 86
 Polardarstellung, 92
 Polarkoordinaten, 25, 92
 Polstelle, 86
 Polynom, 17, 66ff.
 Koeffizienten, 17
 Potenzreihe, 292
 Produkt
 äußeres, 208
 inneres, 199
 Produktregel, 112
 Projektionsmatrix, 270
 Punktoperationen, 45
 Pythagoras, 200
 Quotientenkriterium, 284
 Quotientenregel, 112
 Rang, 227
 Realteil, 90
 Rechenregeln für Logarithmen, 19
 rechte-Hand-Regel, 209
 rechts-obere Dreiecksmatrix, 249
 rechtsgekrümmt, 137
 rechtsseitig differenzierbar, 109
 rechtsseitige Ableitung, 109
 Regeln von L'Hospital, 129
 Reihe
 alternierende, 288
 geometrische, 282
 harmonische, 283, 286
 Konvergenzkriterien, 284
 Maclaurinsche, 289
 rekursiv, 281
 unendliche, 281
 relatives Extremum, 117, 135
 Restglied, Taylorsches, 290
 Rotation, 268
 Rotationskörper, 180
 Rotationsmatrix, 268
 Rückwärtseinsetzen, 249
 Sarrussche Regel, 212
 Sattelpunkt, 136
 Satz
 des Pythagoras, 200
 v. Maximum u. Minimum, 59

- von Rolle, 118
von Taylor, 290
Schaltfunktion, 52, 148
schließlich alle, 42
Schnittwinkel, 111
Schwerpunkt, 171
Schwingung, 22, 96
Sekantenverfahren, 127
senkrecht, 200
sinc-Funktion, 130
sinh, 27
Skalarprodukt, 199
Skalierung, 16
Sortieren, 46
Spaltenraum, 227
Spat, 211
Spatprodukt, 211
Spiegelung, 16
Spirale
 archimedische, 187
 logarithmische, 189
stückweise stetig, 147
Stammfunktion, 144
Standardbasis, 222
stetig, 53
stetig ergänzbar, 55, 86, 295
Substitutionsregel, 165
Superpositionsprinzip, 241
Tangente, 106
Tangentenvektor, 197
tanh, 27
Taylor-Reihe, 289
Taylorpolynom, 289
Teilraum, *siehe* Unterraum
Translation, 16
Trapezregel, 151
Übertragungssatz, 241
umkehrbar, 14
Umkehrfunktion, 14, 61
Umrechnung, 70
uneigentlicher Grenzwert, 61
Ungleichung, Cauchy-Schwarzsche,
 200
Unterraum, 218
Untersumme, 146
Variable, 13
Vektor, 194
Vektorprodukt, 208
Vektorechnung, 193
Vergleichskriterium
 für uneigentliche Integrale, 178
 für unendliche Reihen, 284
Verschiebung, 16
Volumen, 181
Wechselspannung, 174
Wechselstrom, 174
Wendepunkt, 138
Wertebereich, 13
windschief, 217
Wirkleistung, 174
Wurzel, 99
Wurzelkriterium, 285
Zahl
 Eulersche, 19, 50
 komplexe, 90
Zeigerdarstellung, 97
Zerlegung
 äquidistante, 145
Zerlegung eines Intervalls, 145
Zweitor, 230, 247
Zwischenwertsatz, 59
Zykloide, 185