EUROPA-FACHBUCHREIHE
für Chemieberufe

Technische Mathematik und Datenauswertung für Laborberufe

Eckhard Ignatowitz, Henrik Althaus, Ernst Bartels, Holger Rapp

8. Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr. 71713

Autoren in alphabetischer Reihenfolge

Dr. Henrik Althaus, OStR	Stade
Dr. Ernst Bartels, StD a. D.	Winsen/Aller
Dr. Eckhard Ignatowitz, StR a. D.	Waldbronn
Holger Rapp, Dipl.-Ing., Dipl.-Wirt.-Ing	Waldbronn

Autoren bis zur 6. Auflage:

Dr. Klaus Brink, OStR †	Leverkusen
Gew.-Lehrer Gerhard Fastert, OStR †	Stade

Leitung des Arbeitskreises und Lektorat:
Dr. Eckhard Ignatowitz

Bildentwürfe: Die Autoren

Bildbearbeitung:
Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel, Ostfildern

8. Auflage 2021
Druck 5 4 3 2 1
Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Korrektur von Druckfehlern identisch sind.

ISBN 978-3-8085-8383-8

Satz: Satz+Layout Werkstatt Kluth GmbH, 50374 Erftstadt
Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, Radevormwald
Umschlagfoto: © angellodeco – stock.adobe.com
Druck: Plump Druck & Medien GmbH, 53619 Rheinbreitbach

Vorwort

Das Buch **TECHNISCHE MATHEMATIK UND DATENAUSWERTUNG FÜR LABORBERUFE** ist ein Lehr- und Übungsbuch für die schulische und betriebliche Ausbildung im Bereich fachbezogener Berechnungen sowie der Labordaten- und Prozessdatenauswertung.

Dieses Lehrbuch ist geeignet für Auszubildende zum Chemielaborant/in, Lacklaborant/in und Biologielaborant/in. Auch in den Berufsfachschulen Chemisch-technischer Assistent/in, Biologisch-technischer Assistent/in, Pharmazeutisch-technischer Assistent/in und Umwelt-technischer Assistent/in, an Fachschulen für Biotechniker, Chemotechniker und Umweltschutztechniker sowie in der Fachoberschule Technik (Fachrichtung Chemie), der Berufsoberschule und in naturwissenschaftlich ausgerichteten Gymnasien ist es einsetzbar.

Die Auswahl der Inhalte orientiert sich an den Rahmenlehrplänen für die Ausbildungsberufe Chemielaborant/Chemielaborantin, Biologielaborant/Biologielaborantin und Lacklaborant/Lacklaborantin.

Dieses Buch vermittelt neben den mathematischen Grundkenntnissen die Vielfalt der berufsbezogenen mathematischen Kenntnisse aus den Bereichen Chemie, Physik, Statistik, Reaktionskinetik, Analytik, Qualitätssicherung, Beschichtungsstoffe und Informatik. Es ist ein kompetenter Begleiter während der Ausbildung und ein guter Vorbereiter auf die Prüfung.

Durch seinen modularen Aufbau ist das Buch uneingeschränkt für den Lernfeld-orientierten Unterricht geeignet. Den Beispielen und Übungsaufgaben liegen konsequent Problemstellungen aus dem Berufsalltag der Laborberufe zugrunde. Besonderer Wert wurde darauf gelegt, die zahlreichen Vorgänge und Geräte durch Abbildungen zu veranschaulichen. Wichtige Gesetzmäßigkeiten und Formeln sind optisch hervorgehoben.

Am Ende eines Kapitels folgen zahlreiche praxisorientierte Übungsaufgaben, die zur Festigung des Erlernten, zur Leistungskontrolle oder zur Prüfungsvorbereitung verwendet werden können.
Die Lösungen der Beispielaufgaben sind überwiegend mit Größengleichungen gerechnet. Wo es sinnvoll ist, wird alternativ auch die Schlussrechnung angewendet. Dabei wird das Runden der Ergebnisse auf die Anzahl signifikanter Ziffern oder Stellen konsequent berücksichtigt.

In einigen Kapiteln werden die Möglichkeiten zur Nutzung von Taschenrechnern mit Statistikfunktionen sowie eines Tabellenkalkulationsprogramms bei der rechnerischen oder grafischen Auswertung von Daten und Datenreihen vorgestellt.

Die im Rahmenlehrplan der Laborberufe geforderte Kompetenz zur Nutzung englischsprachlicher Informationsquellen wird durch die Angabe der Fachbegriffe in englischer Sprache (jeweils in Klammern hinter der deutschen Bezeichnung) im Text sowie im Sachwortverzeichnis unterstützt.

Bei den Bestimmungsmethoden physikalischer oder chemischer Größen sind im Text oder in den tabellarischen Übersichten die entsprechenden DIN-Normen angegeben. Die Bezeichnung von Stoffen folgt den Vorgaben der IUPAC, aber auch die in der Anlagen- und Laborpraxis üblichen technischen Namen werden aufgeführt, soweit sie von der IUPAC als weiterhin erlaubt gekennzeichnet sind.

Zum Lehrbuch **Technische Mathematik und Datenauswertung für Laborberufe** gibt es ein **Lösungsbuch** mit durchgerechneten Lösungswegen sowie methodischen Hinweisen (Europa-Nr. 71764).

In der **8. Auflage** des vorliegenden Buches wurde eine Vielzahl von Verbesserungen durchgeführt:
- Ein neues, vielfarbiges Layout wurde realisiert, das die schnelle Erfassung der Inhalte erleichtert.
- Die Aufgaben wurden durch präzise Formulierungen und Bilder anschaulicher gestaltet.

Neu aufgenommen wurden die Themen:
- Bestimmung von Abwasser-Kennwerten (Seiten 280 bis 285) und Bestimmung der Wasserhärte (Seiten 286 bis 289)
- Verdünnungsstrategien bei fotometrischen Bestimmungen (Seiten 307 bis 310)
- Moderne Analysegeräte, z. B. Biegeschwinger (Seite 444), Molare Masse (Seite 465).

Die Autoren und der Verlag freuen sich über kritisch-konstruktive Hinweise und Verbesserungsvorschläge zum Buch. Bitte richten Sie Ihre Zuschriften per e-mail an: Lektorat@europa-lehrmittel.de

Die Autoren Sommer 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundlagen, praktisches Rechnen

1

Basis des Rechnens in der Chemie sind die grundlegenden mathematischen Rechnungsarten sowie deren praktische Anwendung mit dem Taschenrechner oder dem Computer.

1.1 Zahlenarten

Beim Rechnen unterscheidet man die **bestimmten Zahlen** sowie die **allgemeinen Zahlen.**
Während die bestimmten Zahlen einen festen Wert haben, wie z.B. 3, 9, 5, $^1/_2$ usw., stehen die allgemeinen Zahlen, wie z.B. x, y, z, als Platzhalter für beliebige Zahlen.

Bestimmte Zahlen

Die bestimmten Zahlen kann man weiter in verschiedene Zahlenarten untergliedern.

Zahlenarten der bestimmten rationalen Zahlen	Beispiele
Natürliche Zahlen: Sie sind die zum Zählen benutzten Zahlen. Es sind **positive ganze Zahlen** sowie Null (0). Sie werden normalerweise ohne Pluszeichen (+) geschrieben.	0 , 1 , 2 , 3 , 4 , ..., 10 , 11 , 12 , ..., 37 , ..., 59 , 60 , 61 , ..., 107 , ...
Die **negativen ganzen Zahlen** erhält man durch Subtrahieren einer größeren natürlichen Zahl von einer kleineren natürlichen Zahl. Beispiel: 5 – 7 = –2 ; 15 – 29 = –14	–1 , –2 , –3 , ..., –18 , –19 , ...
Die **ganzen Zahlen** umfassen die natürlichen Zahlen (positive ganze Zahlen) und die negativen ganzen Zahlen.	0, 1, 2, 3, 4, ..., 71, 72, 73, ... –1 , –2 , –3 , –4 , ..., –21 , –22 , ...
Gebrochene Zahlen, auch **Bruchzahlen** genannt, sind Quotienten aus zwei ganzen Zahlen. Quotient ist der Name für einen Bruch, d.h. eine nicht ausgeführte Divisionsaufgabe ganzer Zahlen. Bruchzahlen können positiv und negativ sein.	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1\frac{1}{6}, \frac{7}{9}, \ldots$ $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -2\frac{1}{3}, -\frac{7}{9}, \ldots$
Dezimalzahlen sind Zahlen mit einem Komma. Es können positive und negative Dezimalzahlen sein.	1,748 , 0,250 , –8,32 , –2,0 , –0,5 , –7,8316 , 4,57 , 7,8

Die bislang genannten Zahlen bezeichnet man insgesamt als **rationale Zahlen.** Außerdem gibt es die Gruppe der **irrationalen Zahlen.** Es sind bestimmte Zahlen.

Zahlenarten der bestimmten irrationalen Zahlen	Beispiele
Wurzelzahlen	$\sqrt{2}$ = 1,4142136...; $\sqrt{3}$ = 1,7320508...
Transzendente Zahlen	π = 3,1415927...; e = 2,7182818...
Die irrationalen Zahlen sind nicht periodische Dezimalzahlen mit unendlich vielen Stellen.	

Zahlenstrahl

Die bestimmten Zahlen lassen sich außer durch Ziffern (siehe Beispiele oben) auch zeichnerisch auf einem Zahlenstrahl als Strecke darstellen **(Bild 1).** Vom Nullpunkt aus nach rechts liegen die positiven Zahlen, nach links die negativen Zahlen.

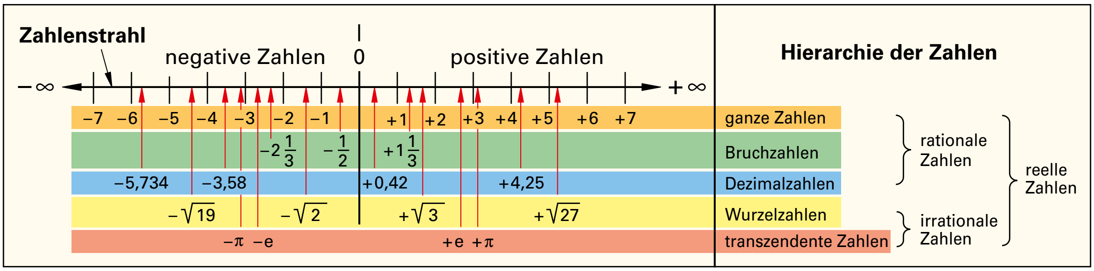

Bild 1: Zahlenarten und ihre Lage auf dem Zahlenstrahl, Hierarchie der Zahlen

Allgemeine Zahlen

Die allgemeinen Zahlen, auch Variable genannt, stehen als Platzhalter für eine beliebige Zahl.

In der Mathematik werden für die allgemeinen Zahlen die kleinen Buchstaben des Alphabets verwendet.

Beispiele
$a, b, c, \dots \quad u, v, w, \dots, \quad x, y, z$

In der technischen Mathematik benutzt man kleine oder große Buchstaben zur Benennung einer Variablen. Sie sind meist der Anfangsbuchstabe des deutschen oder englischen Namens der Variablen, wie z.B. l für Länge oder V für das Volumen.

$l, b, t, v, \dots, \quad A, V, U, T, \dots$
l Länge, b Breite, t Zeit (time), h Höhe, A Fläche (aerea), V Volumen, U Umfang, T thermodynamische Temperatur, ...

Aufgaben zu Zahlenarten

1. Zu welcher Zahlenart gehören folgende Zahlen: $0{,}7$, -18, $\sqrt{3}$, $1/7$, 0, -387, $-\pi$, $-0{,}32$?
2. Wo liegen auf dem Zahlenstrahl die Zahlen: $-3\frac{1}{3}$, $0{,}85$, e, $-0{,}25$, $\sqrt{9}$, $\frac{2}{4}$, $-3{,}50$? Zeichnen Sie die Zahlen in den Zahlenstrahl ein.

1.2 Größen, Einheiten, Zeichen, Formeln

In chemischen Berechnungen wird meist mit Größen und Einheiten gerechnet, die mit mathematischen Zeichen in Formeln verknüpft sind.

Größen, Einheiten

Mit einer Größe (engl. physical quantity) werden chemische oder physikalische Eigenschaften beschrieben. Zu ihrer Kurzschreibweise benutzt man ein Größenzeichen, z.B. l für die Länge.
Der Wert einer Größe besteht aus einem Zahlenwert und einem Einheitenzeichen, z.B. 5,8 kg.
Das Einheitenzeichen ist eine Kurzform des Einheitennamens, z.B. kg für Kilogramm.

Beispiel: Die Länge einer 3,40 Meter langen Rohrleitung beträgt: l = 3,40 m.

Es gibt 7 **Basisgrößen,** auf die sich alle Größen zurückführen lassen **(Tabelle 1)**.

Tabelle 1: Basisgrößen und ihre Einheiten (nach SI)

Physikalische Größen	Größenzeichen	Einheitenname	Einheitenzeichen
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Stoffmenge	n	Mol	mol
Zeit	t	Sekunde	s
Thermodynamische Temperatur	T	Kelvin	K
Stromstärke	I	Ampere	A
Lichtstärke	I_v	Candela	cd

Mathematische Zeichen

Die mathematischen Zeichen (engl. mathematical symbols) dienen zur Kurzbezeichnung einer mathematischen Operation **(Tabelle 2)**.

Beispiel: Sollen zwei Zahlen multipliziert werden, so setzt man zwischen die Zahlen einen Multiplikationspunkt, z.B. $3 \cdot 5$.

Für Flächenformate und räumliche Abmessungen ist auch das Multiplikationskreuz × zugelassen.

Beispiel: 3 m × 5 m

Tabelle 2: Mathematische Zeichen (DIN 1302)

Zeichen	Bedeutung	Zeichen	Bedeutung
$+, -$	plus, minus	$<, >$	kleiner, größer
$:, —, /$	geteilt durch, pro	$\leq$ $\geq$	kleiner gleich, größer gleich
$\cdot, \times$	mal	Δ	Differenz
$=, \neq$	ist gleich, ist ungleich	$\dots$	und so weiter
$\approx$	beträgt rund	∞	unendlich
$\equiv$	identisch gleich	$\pm$	plus/minus
$\sim$	proportional	$\lvert a \rvert$	Betrag von a
$\triangleq$	entspricht	$\sqrt{\ }$	Wurzel

Formeln, Größengleichungen

Die gesetzmäßigen Zusammenhänge zwischen Größen werden durch Größengleichungen (engl. equations) oder Formeln (engl. formula) ausgedrückt. Mithilfe von Größengleichungen lassen sich durch Umstellen und Auflösen die gesuchten Größen berechnen (Seite 23).

Beispiel für Größengleichungen:

Fläche $A = l \cdot b$ Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$
Volumen $V = l \cdot b \cdot h$ Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t}$

1.3 Grundrechnungsarten

1.3.1 Addieren und Subtrahieren

Diese beiden Rechnungsarten werden wegen ihrer aus Strichen bestehenden mathematischen Zeichen (+, –) auch als Strichrechnungen bezeichnet.

Beim **Addieren** (Zusammenzählen, engl. to add) werden die einzelnen Summanden zusammengezählt. Das Ergebnis heißt Summenwert oder kurz Summe.

Beim **Subtrahieren** (Abziehen, engl. to subtract) zieht man von einer Zahl eine andere Zahl ab. Das Ergebnis ist der Differenzwert, einfach auch Differenz genannt.

Addieren

Summe Summenwert

$\underbrace{a + b}_{\text{Summe}} = c$

Summanden

Subtrahieren

Differenz Differenzwert

$d - e = f$

Minuend Subtrahend

Rechenregeln und Klammern beim Addieren und Subtrahieren	
Rechenregeln	**Beispiele**
Nur gleichartige allgemeine Zahlen bzw. Größen können addiert bzw. subtrahiert werden.	$8\ m^2 + 72\ cm^2 + 7{,}5\ m^2 - 23\ cm^2$ $= 15{,}5\ m^2 + 49\ cm^2$
Die einzelnen Glieder in einer Strichrechnung können vertauscht werden (Kommutativgesetz).	$5 - 16 + 7 = -16 + 7 + 5 = -4$; $11x - 3x + 9x = 11x + 9x - 3x = 17x$
Einzelne Glieder können zu Teilsummen bzw. Teildifferenzen zusammengefasst werden (Assoziativgesetz).	$2 + 5 - 2 - 1 = 7 - 3 = 4$ $8u - 3v + 3u + 8v = 11u + 5v$
Klammern beim Addieren und Subtrahieren	
Klammern, () oder [], fassen Teilsummen bzw. Teildifferenzen zusammen. Das Vorzeichen der Glieder in der Klammer kann sich durch das Setzen oder Weglassen von Klammern ändern.	
Steht ein + Zeichen vor einer Klammer, so kann man sie weglassen, ohne dass sich die Vorzeichen der Glieder in der Klammer ändern.	$25 + (5 - 3) = 25 + 5 - 3 = 27$; $7a + (3a - 9a) = 7a + 3a - 9a = 1a = a$
Steht ein – Zeichen vor einer Klammer, so muss man beim Weglassen der Klammer das Vorzeichen aller Glieder in der Klammer umkehren. Setzt man eine Klammer, vor der ein – Zeichen steht, so muss man ebenfalls das Vorzeichen aller Glieder, die in der Klammer stehen, umkehren.	$16 - (3 - 2 + 8 - 5) = 16 - 3 + 2 - 8 + 5 = 12$ $5x - (2x + 9a - 7b) = 5x - 2x - 9a + 7b$

Aufgaben zum Addieren und Subtrahieren

1. Ermitteln Sie das Ergebnis:

   $59{,}30\,a - 27{,}53\,a + 7{,}83\,b - 21{,}04\,b$

2. Klammern Sie aus:

   $8{,}3\,x - 7{,}8\,a + 2{,}5\,x - 9{,}2\,a$

3. Lassen Sie die Klammer weg und berechnen Sie das Ergebnis:

   $25\,a - (36\,b - 19\,a - 11\,b - 12\,a)$

4. Ermitteln Sie die Maße l_1, l_2, l_{ges} der Rohrleitung in **Bild 1**. Die Maße in der Zeichnung sind in mm angegeben.

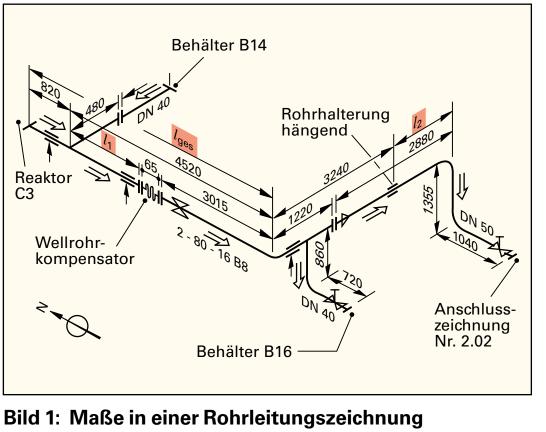

Bild 1: Maße in einer Rohrleitungszeichnung

1.3.2 Multiplizieren

Beim **Multiplizieren** (umgangssprachlich Malnehmen, engl. to multiply) werden die Faktoren miteinander malgenommen und ergeben den Produktwert, kurz auch Produkt genannt.

Das mathematische Zeichen für Multiplizieren ist · oder ×.

Bei allgemeinen Zahlen kann das Multiplikationszeichen weggelassen werden, z. B. $a\,b$ anstatt $a \cdot b$.

Die Ziffer 1 wird meist nicht mitgeschrieben. **Beispiel:** $1a = a$

Multiplikation

Produkt — Produktwert

$$\boldsymbol{a \cdot b = c}$$

Faktoren

Rechenregeln beim Multiplizieren	Formeln	Beispiele
Ist ein Faktor 0, so ist das ganze Produkt 0.	$a \cdot b \cdot c \cdot 0 = 0$	$387 \cdot 229 \cdot 712 \cdot 0 = 0$
Die Faktoren können vertauscht werden.	$a \cdot b \cdot c = c \cdot b \cdot a$	$15 \cdot 28 \cdot 77 = 77 \cdot 28 \cdot 15$
Teilprodukte lassen sich zusammenfassen.	$a \cdot a \cdot b = a^2 \cdot b$	$5\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} = 30\,\mathrm{m}^3$
Vorzeichen beim Multiplizieren		
Die Multiplikation von 2 Faktoren mit gleichen Vorzeichen ergibt ein positives Produkt.	$(+a) \cdot (+b) = a \cdot b = ab$ $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b = ab$	$2 \cdot 3 = 6;\quad (-7) \cdot (-3) = 21$ $(+a) \cdot (+b) = a \cdot b = ab$ $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b = ab$
Die Multiplikation von 2 Faktoren mit unterschiedlichen Vorzeichen ergibt ein negatives Produkt.	$(+a) \cdot (-b) = -a \cdot b$ $(-a) \cdot (+b) = -a \cdot b$	$5 \cdot (-2) = -10;\quad (-6) \cdot 3 = -18$ $a \cdot (-b) = -ab;\quad (-4) \cdot \mathrm{m} = -4\,\mathrm{m}$
Multiplizieren von Klammerausdrücken		
Ein Klammerausdruck wird mit einem Faktor multipliziert, indem man jedes Glied der Klammer mit dem Faktor multipliziert.	$a \cdot (b - c) = ab - ac$	$9 \cdot (7 - 3) = 9 \cdot 7 - 9 \cdot 3$ $= 63 - 27 = 36$ $5 \cdot (3 + 2) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 25$
Zwei Klammerausdrücke werden multipliziert, indem jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert wird.	$(a + b) \cdot (c - d)$ $= ac - ad + bc - bd$	$(12 - 7) \cdot (3 + 5)$ $= 12 \cdot 3 + 12 \cdot 5 - 7 \cdot 3 - 7 \cdot 5$ $= 36 + 60 - 21 - 35 = 40$
Bei Klammerausdrücken mit bestimmten Zahlen wird zuerst der Zahlenwert der Klammer ermittelt und dann das Produkt berechnet.		$9 \cdot (7 - 3) = 9 \cdot 4 = 36;$ $(12 - 7) \cdot (3 + 5) = 5 \cdot 8 = 40$
Ausklammern (Faktorisieren)		
Haben mehrere Glieder einer Summe einen gemeinsamen Faktor, so kann er ausgeklammert werden. Bei allgemeinen Zahlen wird dadurch die Summe in ein Produkt umgewandelt.	$ax + bx + cx$ $= x \cdot (a + b + c)$	$19 \cdot 7 - 19 \cdot 5 = 19 \cdot (7 - 5)$ $= 19 \cdot 2 = 38$ $3\pi x + 3\pi y = 3\pi(x + y)$ $L_0 + L_0\alpha \cdot \Delta\vartheta = L_0\,(1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$

Aufgaben zum Multiplizieren

1. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke
   a) $(+3) \cdot (-15)$ b) $(+9) \cdot (+7)$
   c) $(-7) \cdot (-12)$ d) $(+5) \cdot 0$
   e) $(0) \cdot (-16)$ f) $(-3a) \cdot (+8b) \cdot (+2c)$
   g) $(+9x) \cdot (-4y)$ h) $(+13\mathrm{m}) \cdot (+4\mathrm{m}) \cdot (+2\mathrm{m})$
2. Führen Sie die Multiplikationen aus:
   a) $3(3a - 2b)$ b) $9(7u + 8v)$
   c) $(-5) \cdot (-4x - 7y)$ d) $(+16) \cdot (0) \cdot (4 + 32)$
   e) $(6c - 3d) \cdot (+2a)$ f) $-x(y - z)$
   g) $4uv(9r - 5s)$ h) $-(4ab + 7xy) \cdot (-12)$
   i) $W = p \cdot (V_2 - V_1)$ j) $m_M = \varrho_M \cdot \left(\frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{m_2}{\varrho_2}\right)$
3. Multiplizieren Sie die Ausdrücke:
   a) $(7s + 5r) \cdot (3l - 6k)$
   b) $5(3u - 4v) \cdot 8 \cdot (2w - 9x)$
   c) $(-4) \cdot (9w + 3x) \cdot (-3) \cdot (8y - 5z)$
   d) $11a(-3b + 2x) \cdot (4c - 5y)$
4. Welche Zahl liefert der Ausdruck, wenn für $x = 3$ und $y = 4$ gesetzt wird?
   $7(5 - 2x) \cdot (-4) \cdot (-3 + 6y)$
5. Klammern Sie aus:
   a) $2ab + 2ac + 2ad$ b) $\pi n r_1 + \pi n r_2$
   c) $k \cdot A \cdot \vartheta_2 - k \cdot A \cdot \vartheta_1$ d) $\pi r_1^2 + \pi h^2$

1

1.3.3 Dividieren

Das Dividieren (umgangssprachlich Teilen; engl. to devide) ist die Umkehrung des Multiplizierens.

Das mathematische Zeichen für Dividieren ist der Doppelpunkt : oder der Bruchstrich — bzw. der Schrägstrich /.

Der Doppelpunkt : und der Bruchstrich — sind gleichbedeutend.

Zähler und Nenner dürfen **nicht** vertauscht werden.

Ist der Nenner null, so hat der Quotient keinen bestimmten Wert, er kann nicht bestimmt werden.

Division

Quotient Zähler

$$a : b = \frac{a}{b} = c$$

Dividend Nenner

Divisor Wert des Quotienten

Rechenregeln beim Dividieren	Formeln	Beispiele
Vorzeichen beim Dividieren Gleiche Vorzeichen bei Zähler und Nenner ergeben einen positiven Quotienten.	$\frac{+a}{+b} = \frac{a}{b}$; $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$;	$(+2) : (+3) = \frac{2}{3}$; $\frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}$
Ungleiche Vorzeichen von Zähler und Nenner ergeben einen negativen Quotienten.	$\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$; $\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$	$\frac{-4}{+7} = -\frac{4}{7}$; $\frac{+3}{-5} = -\frac{3}{5}$
Dividieren von Klammerausdrücken Ein Klammerausdruck wird dividiert, indem jedes Glied in der Klammer mit dem Nenner geteilt wird.	$(a-b) : x = a : x - b : x$	$\frac{36xyz - 24xuv}{6x}$ $= \frac{36xyz}{6x} - \frac{24xuv}{6x}$ $= 6yz - 4uv$
Der Bruchstrich fasst die Ausdrücke auf und unter dem Bruchstrich zusammen, als ob sie von einer Klammer umschlossen wären.	$\frac{a-b}{x} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x}$ $\frac{a+b}{c} \cdot d = \frac{a \cdot d}{c} + \frac{b \cdot d}{c}$	
Kürzen, Erweitern Beim **Kürzen** werden Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl geteilt.	$\frac{4ab}{6ac} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{a} \cdot b \cdot 2}{\cancel{6} \cdot \cancel{a} \cdot c \cdot 3} = \frac{2b}{3c}$	$\frac{-48xy}{36y} = \frac{-4 \cdot \cancel{12} \cdot x\cancel{y}}{3 \cdot \cancel{12} \cdot \cancel{y}}$ $= -\frac{4}{3}x$
Es können nur **Faktoren** gekürzt werden oder es müssen alle Summanden gekürzt werden.	$\frac{a(b+c)}{a} = b+c$ $\frac{ab+ac}{a} = b+c$	$\frac{9x-2y}{5z}$ erweitern mit (–3) ⇒ $\frac{(9x-2y)(-3)}{5z \cdot (-3)} = \frac{-27x+6y}{-15z}$
Beim **Erweitern** werden Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl (Erweiterungszahl) multipliziert.	$b+c = \frac{(b+c)a}{a}$	

Aufgaben zum Dividieren

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

1. a) $63 : (-7)$ b) $(-64) : (-4)$ c) $(-91) : 13$ d) $\frac{105}{15}$ e) $\frac{-96}{8}$ f) $\frac{-132}{-11}$

2. a) $\frac{(-7) \cdot (18)}{12}$ b) $\frac{(11) \cdot (-14)}{(-7)}$ c) $\frac{(-9) \cdot (-18)}{(-36)}$

3. a) $(156 - 72) : 14$ b) $(391 - 144) : (121 - 102)$

4. Kürzen Sie soweit wie möglich:
   a) $\frac{-12uv}{3v}$ b) $\frac{6a-3b}{3}$ c) $\frac{81xyz}{-9yz}$ d) $\frac{-187rs + 153rs + 34rs}{-17s}$ e) $\frac{21 \cdot (-9) \cdot 4x}{(-35) \cdot (-2)}$
   f) $\frac{-(x-5)}{(5-x)}$ g) $\frac{-(7x-y) \cdot 3 + 2b}{-2b-3}$

5. Erweitern Sie:
   a) $\frac{7a}{5b}$ mit (–3) b) $\frac{3x}{-8y}$ mit (–1)

1.4 Berechnen zusammengesetzter Ausdrücke

Bei der Berechnung von Ausdrücken, die sowohl Additionen und Substraktionen (Strichrechnungen + –) als auch Multiplikationen und Divisionen (Punktrechnungen · :) enthalten, werden die Rechenoperationen in einer bestimmten Reihenfolge durchgeführt:

1. Enthält der zu verrechnende Ausdruck nur Punktrechnungen und Strichrechnungen, so gilt:

Punkt vor Strich, d. h. Punktrechnungen müssen vor den Strichrechnungen ausgeführt werden.

Beispiele: $5 \cdot 7 + 65 : 13 = 35 + 5 = 40$; $\quad \frac{21}{7} - \frac{48}{6} + (-3) \cdot (-9) = 3 - 8 + 27 = 22$

$\frac{122 - 66}{8} \cdot 14 = \frac{56}{8} \cdot 14 = 98$; $\quad 125 : (+5) - (-80) : (-4) = +25 - 20 = \mathbf{5}$

2. Enthält ein Ausdruck neben Punktrechnungen und Strichrechnungen noch Klammern, so gilt:

Zuerst die Klammerausdrücke berechnen, dann die Punktrechnungen und anschließend die Strichrechnungen ausführen.

Beispiele: $3 \cdot (23 - 17) + 12 = 3 \cdot 6 + 12 = 18 + 12 = 30$

$5a \cdot (11b - 8b) - 2b \cdot (3a + 4a) = 5a \cdot 3b - 2b \cdot 7a = 15ab - 14ab = ab$

$\frac{7 \cdot (23{,}2 - 23{,}3)}{(2{,}4 + 4{,}6) \cdot (-0{,}5)} = \frac{\cancel{7} \cdot 0{,}1}{\cancel{7} \cdot 0{,}5} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = \frac{1}{5} = \mathbf{0{,}2}$

3. Enthält der Ausdruck ineinander verschachtelte Klammerausdrücke, so gilt:

Zuerst die innerste Klammer, dann die nächstäußere Klammer usw. zusammenfassen.

Beispiel: $4ac + [(3a + 7a) \cdot 5c + 5ac] = 4ac + [10a \cdot 5c + 5ac] = 4ac + 50ac + 5ac = \mathbf{59}ac$

4. Enthält ein Ausdruck verschachtelte Klammern sowie Punktrechnungen und Strichrechnungen, so gilt:

Es wird in der Reihenfolge – Klammerausdrücke – Punktrechnungen – Strichrechnungen – ausgerechnet. Innerhalb der Klammerausdrücke gilt ebenfalls: Punktrechnungen vor Strichrechnungen.

Aufgaben zum Berechnen zusammengesetzter Ausdrücke

1. a) $-4 \cdot (0{,}2 - 3{,}2) + (14{,}5 - 8{,}5) \cdot (-0{,}1)$ b) $12x \cdot (-3y) + (0{,}75x - 0{,}50x) \cdot (+80)$
2. a) $\frac{(-2{,}5) \cdot (86 - 82)}{(1{,}3 - 0{,}8) \cdot (42 - 38)}$ b) $\frac{222}{37} - \frac{0{,}125 \cdot (-85 + 117)}{(0{,}4) \cdot (-8) \cdot (2{,}5)}$ c) $24{,}7 \cdot \frac{(1 - 0{,}392)}{(1 - 0{,}065)}$
3. a) $(23{,}8 - 21{,}3) \cdot \frac{2{,}14 + 0{,}86}{4{,}52 - 4 \cdot 0{,}38}$ b) $\frac{18{,}06 - 17{,}56}{0{,}25} + \frac{27}{3{,}2 + 5{,}8} - \frac{(0{,}2 + 2{,}8) \cdot (5{,}4 - 3{,}4)}{2{,}4 \cdot 2{,}5}$
4. a) $2x - [5y - (3x - 4y) + 7x] - y$ b) $4{,}5a \cdot [(2b - c) - c] - 8a\,(c - b)$
   c) $[-0{,}2a - (1{,}7b - 1{,}9a)] : \left[\frac{5{,}5a}{10} - 0{,}85b + 0{,}3a\right]$
5. a) $2 \cdot [-2xy - (20a - 12xy)] + 5\,(2a - x - y)$ b) $(0{,}3a \cdot (5xy - (92x - 87y) - (84y - 82x))$
   c) $(-9{,}5x + [(1{,}5x - 4y) \cdot (0{,}5 + 6{,}5)] + 29y) \cdot \frac{1}{x + y}$

1.5 Bruchrechnen

Ein Bruch (engl. fraction) ist eine Divisionsaufgabe, die mit einem Bruchstrich geschrieben ist. Als Bruchrechnen bezeichnet man das Rechnen mit Brüchen.

Ein Bruch besteht aus dem Zähler und dem Nenner.

Jeden Bruch kann man in eine Dezimalzahl umrechnen, z. B.: $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{1}{3} = 0{,}333\ ...$

Mit Brüchen wird bevorzugt bei der Umwandlung von Formeln gerechnet.

Benennungen bei Brüchen

Zähler ⟶ $\boldsymbol{a}$
Nenner ⟶ $\boldsymbol{b}$

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{c}$$

Bruch — Wert des Bruchs

Es gibt verschiedene **Bruchraten**:

Brucharten	Beispiele	Merkmale
Echte Brüche	$\frac{1}{3}; \frac{5}{7}; \frac{2}{5}$	Zähler < Nenner
Unechte Brüche	$\frac{5}{3}; \frac{7}{3}; \frac{3}{2}$	Zähler ≥ Nenner Wert des Bruchs ≥ 1
Gemischte Zahlen	$1\frac{1}{2}; 3\frac{2}{3}$	Ganze Zahl und Bruch

Brucharten	Beispiele	Merkmale
Gleichnamige Brüche	$\frac{1}{7}; \frac{3}{7}; \frac{5}{7}$	Brüche mit gleichen Nennern
Ungleichnamige Brüche	$\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}$	Brüche mit ungleichen Nennern
Scheinbrüche	$\frac{3}{1}; \frac{6}{2}; \frac{10}{5}$	Der Wert des Bruchs ist eine ganze Zahl

Die Regeln des Kürzens und Erweiterns von Brüchen wurden bereits beim Dividieren genannt (Seite 12).

- Das Kürzen dient meist zur Vereinfachung der weiteren Rechnung oder des Ergebnisses.
- Durch Erweitern wird der Bruch so umgeformt, wie es für die weitere Rechnung vorteilhaft ist.

Beispiele zum Kürzen: $\frac{7}{21} = \frac{\cancel{7}\ 1}{\cancel{21}\ 3} = \frac{1}{3}$; $\frac{8ab}{14a} = \frac{\cancel{8}\ \cancel{a}b\ 4}{\cancel{14}\ \cancel{a}\ 7} = \frac{4b}{7}$; $\frac{32a+4ab}{6a} = \frac{\cancel{4}\cancel{a}(8+b)\cdot 2}{\cancel{6}\ \cancel{a}\cdot 3} = \frac{2(8+b)}{3}$

Beispiel zum Erweitern: $\frac{2a-3b}{2}$ erweitern auf den Nenner $10a \Rightarrow$ $\frac{(2a\cdot 3b)\cdot 5a}{2\cdot 5a} = \frac{5a(2a-3b)}{10a}$

1.5.1 Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Gleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die Zähler zusammenfasst und den gemeinsamen Nenner beibehält.

Beispiele: $\frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{6}{3}$; $\frac{3x}{5b} + \frac{7x}{5b} - \frac{4x}{5b} = \frac{3x+7x-4x}{5b} = \frac{6x}{5b}$

Addieren und Subtrahieren

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x} - \frac{c}{x} = \frac{a+b-c}{x}$$

Brüche mit ungleichen Nennern (ungleichnamige Brüche) müssen vor dem Addieren bzw. Subtrahieren in Brüche mit gleichen Nennern (gleichnamige Brüche) umgewandelt werden und können erst dann zusammengefasst werden. Den gemeinsamen Nenner mehrerer Brüche nennt man **Hauptnenner**. Es ist das kleinste gemeinsame Vielfache, kurz das **kgV,** der einzelnen Nenner.

Schema zur Ermittlung der Summe ungleichnamiger Brüche: Beispiel: $\frac{3}{8}-\frac{5}{6}-\frac{7}{10}$

1. Zerlegung in Primzahlfaktoren

Nenner		Primzahlfaktoren
8	=	$\boxed{2\cdot 2\cdot 2}$
6	=	$2\cdot\boxed{3}$
10	=	$2\cdot\boxed{5}$
kgV	=	$\boxed{2\cdot 2\cdot 2}\boxed{\cdot 3}\boxed{\cdot 5}$ = **120**

2. Hauptnenner (kgV) bestimmen
Das kgV ist das Produkt der größten Anzahl jeder vorkommenden Primzahl: $2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5 = 120$. (Primzahlen sind die kleinsten Faktoren, in die eine Zahl zerlegt werden kann.)

3. Erweiterungsfaktor der einzelnen Brüche bestimmen
120 : 8 = 15
120 : 6 = 20
120 : 10 = 12

4. Gleichnamigmachen der einzelnen Brüche durch Erweitern
$\frac{3\cdot 15}{8\cdot 15} + \frac{5\cdot 20}{6\cdot 20} - \frac{7\cdot 12}{10\cdot 12} =$

5. Addieren bzw. Subtrahieren der jetzt gleichnamigen Brüche
$\frac{45}{120} + \frac{100}{120} - \frac{84}{120} = \frac{61}{120}$

1

Zusammenfassen mehrerer Brüche mit bestimmten und allgemeinen Zahlen

Beispiel: $\frac{3x}{2a} - \frac{2x}{9ab} + \frac{5x}{18b}$

1. Hauptnenner bestimmen:

$$\begin{aligned} 2a &= 2 \cdot a \\ 9ab &= 3 \cdot 3 \cdot a \cdot b \\ 18b &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot b \\ \hline \text{kgV} &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot b = 18ab \end{aligned}$$

2. Erweiterungsfaktoren bestimmen:

$$\begin{aligned} 18ab : 2a &= 9b \\ 18ab : 9ab &= 2 \\ 18ab : 18b &= a \end{aligned}$$

3. Erweitern und zusammenfassen:

$$\frac{3x \cdot 9b}{2a \cdot 9b} - \frac{2x \cdot 2}{9ab \cdot 2} + \frac{5x \cdot a}{18b \cdot a} = \frac{27bx}{18ab} - \frac{4x}{18ab} + \frac{5ax}{18ab} = \frac{x(27b - 4 + 5a)}{18ab} = \frac{x(5a + 27b - 4)}{18ab}$$

Aufgaben: Fassen Sie die folgenden Brüche zusammen

1. a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{24}$ b) $\frac{14}{25} + \frac{23}{15} - \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$ 2. a) $\frac{7x}{4a} + \frac{5x}{12b}$ b) $\frac{5u}{3bc} + \frac{7u}{12c} - \frac{5u}{18b}$

1.5.2 Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

Rechenregeln	Formeln	Beispiele
Multiplizieren **Brüche** werden multipliziert, indem jeweils die Zähler miteinander und die Nenner miteinander multipliziert werden. **Gemischte Zahlen** werden miteinander multipliziert, indem sie zuerst in unechte Brüche umgewandelt und diese dann miteinander multipliziert werden.	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot f = \frac{a \cdot c \cdot f}{b \cdot d}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$; $\frac{3y}{x} \cdot \frac{4x}{y} = \frac{3\cancel{y} \cdot 4\cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{y}} = 12$ $3\frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{3} = \frac{7}{2} \cdot \frac{16}{3} = \frac{112}{6} = \frac{56}{3}$
Dividieren Ein Bruch wird durch einen 2. Bruch dividiert, indem der 1. Bruch mit dem Kehrwert des 2. Bruchs multipliziert wird. **Ganze Zahlen** können als Bruch mit dem Nenner 1 geschrieben werden.	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ $a = \frac{a}{1}$	$\frac{3}{8} : \frac{5}{4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$; $\frac{1}{3} : 5 = \frac{1}{3} : \frac{5}{1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$; $7 : \frac{7}{4} = \frac{7}{1} \cdot \frac{4}{7} = \frac{7 \cdot 4}{1 \cdot 7} = 4$

Aufgaben zum Bruchrechnen

1. Fassen Sie zusammen

   a) $\frac{8}{49} + \frac{6}{56} - \frac{3}{8}$ b) $3\frac{6}{25} - 18\frac{7}{10} + 24\frac{3}{5}$ c) $\frac{8x + 4y}{4a + 6b} + \frac{9x}{9b + 6a} - \frac{5}{3}$

2. Multiplizieren Sie

   a) $\frac{7}{6} \cdot \frac{3}{14}$ b) $\frac{11}{8} \cdot \frac{4}{22}$ c) $5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$ d) $1\frac{5}{6} \cdot 3\frac{6}{15}$ e) $\frac{9ab}{5y} \cdot \frac{15x}{12a}$

3. Dividieren Sie

   a) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{2} : \frac{16}{7}$ c) $\frac{9}{5} : \frac{12}{15}$ d) $3xy : \frac{1}{2}z$ e) $\frac{2x}{9y} : \frac{4x}{3y}$ f) $\frac{26ab}{33u} : \frac{13a}{22v}$

4. Berechnen Sie bzw. fassen Sie soweit wie möglich zusammen

   a) $14 \cdot \left(\frac{7}{12} + \frac{5}{8}\right)$ b) $42 \cdot \frac{7}{6} + \frac{9}{22}$ c) $\frac{8x + 8y}{3r - 3s} : \frac{4x + 4y}{9r - 9s}$ d) $\left(\frac{11}{15} - \frac{6}{10}\right) \cdot 8$ e) $\frac{5a - 3b}{6n} + \frac{5a - 3b}{3m}$

   f) $5\frac{1}{2} - \left(\frac{6}{5} - \frac{2}{10}\right) \cdot \left[5 : \left(\frac{21}{3} - \frac{10}{2}\right)\right]$ g) $4\frac{2}{3} \cdot 3\frac{8}{5}$ h) $\left(12 : 2\frac{2}{3}\right) : \frac{7}{9}$ i) $\left(\frac{u + v}{l + k} + \frac{3(u + v)}{2(k + l)} - \frac{5(u - v)}{3(k + l)}\right) \cdot \frac{1}{2}$

1.6 Rechnen mit Potenzen

Definition des Potenzbegriffs

Besteht ein Produkt aus mehreren gleichen Faktoren, so kann es abgekürzt als Potenz (engl. power) geschrieben werden.
Der Exponent (Hochzahl) gibt an, wie viel Mal die Basis (Grundzahl) mit sich selbst multipliziert wird.

Beispiele: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ (gesprochen: 2 hoch 5)
$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

Potenz

gleiche Faktoren, Basis, Exponent

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots}_{\text{Produkt}} = \underbrace{a^n}_{\text{Potenz}} = \underbrace{c}_{\text{Potenzwert}}$$

Die Potenzwerte von Potenzzahlen werden mit dem **Taschenrechner** berechnet. Dazu haben die Taschenrechner eine Potenziertaste, z. B. $\boxed{y^x}$ oder $\boxed{\wedge}$

Beispiel: Es ist zu berechnen: $3{,}25^3$

Eingabe	3,25	$\boxed{y^x}$ 3	$\boxed{=}$
Anzeige	3,25	$3{,}25^3$	34,328125

Das Vorzeichen beim Potenzieren

Beispiele: $(+2)^2 = (+2) \cdot (+2) = +4$; $(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +8$; $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$
$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$; $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$ usw.

Merke:
- Ist die Basis positiv, so ist der Potenzwert immer positiv.
- Ist die Basis negativ und der Exponent eine gerade Zahl, so ist der Potenzwert positiv.
- Ist die Basis negativ und der Exponent eine ungerade Zahl, so ist der Potenzwert negativ.

Potenzen mit negativem Exponenten

Eine Potenz mit negativem Exponenten (z. B. a^{-n}) kann auch als Kehrwert der gleichen Potenz mit positivem Exponenten geschrieben werden.
Umgekehrt kann eine Potenz mit positivem Exponenten im Zähler eines Bruchs als Potenz mit negativem Exponenten im Nenner des Bruchs gesetzt werden.

Potenzformeln

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\frac{a^x}{b^y} = \frac{b^{-y}}{a^{-x}}$$

Beispiele: $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} = 0{,}008$; $\frac{3^{-4}}{4^{-2}} = \frac{4^2}{3^4} = \frac{16}{81} = 0{,}1975$; $\frac{1}{\text{min}} = \text{min}^{-1}$

Sonderfälle bei Potenzen

Potenzen mit Basis 1. **Beispiel:** $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$; $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
Merke: Jede Potenz mit der Basis 1 hat immer den Potenzwert 1.

$$1^n = 1$$

Potenzen mit dem Exponent 0. **Beispiel:** $\frac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0 = 1$, da $\frac{2^3}{2^3} = \frac{8}{8} = 1$
Merke: Jede Potenz mit dem Exponent 0 hat den Wert 1.

$$a^0 = 1$$

Potenzen mit der Basis 10 (Zehnerpotenzen)

Sehr große und sehr kleine Zahlen können als Vielfaches der Potenzen der Basis 10 (Zehnerpotenzen) geschrieben werden.
Große positive Zahlen werden als Zehnerpotenzen mit positivem Exponenten ausgedrückt.

Beispiele: $100\,000\,000 = 1{,}0 \cdot 10^8 = 10^8$; $7\,200\,000 = 7{,}2 \cdot 1\,000\,000 = 7{,}2 \cdot 10^6$

Sehr kleine Zahlen werden als Zehnerpotenzen mit negativem Exponenten geschrieben.

Beispiele: $0{,}0085 = 85 \cdot 10^{-4}$; $0{,}0002938 = 2938 \cdot 10^{-7} = 2{,}938 \cdot 10^{-4}$

Aufgaben

1. Schreiben Sie in Potenzform:
   a) $2\,L \cdot 4\,L \cdot 8\,L$ b) $2a \cdot 3b \cdot 2a \cdot 3b$
   c) $1{,}5\text{ cm} \cdot 2{,}3\text{ cm} \cdot 1{,}4\text{ cm}$
2. Berechnen Sie den Potenzwert:
   a) $21^{2,5}$ b) $(-6{,}3)^3$
   c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}$ d) $2{,}4^{3,5}$
3. Schreiben Sie als Zehnerpotenz:
   a) 5 000 000 b) 0,0023
   c) 96485 d) 0,000082

1

Rechenregeln beim Potenzieren	Formeln	Beispiele
Addieren und Subtrahieren von Potenzen Potenzen können addiert oder subtrahiert werden, wenn sie sowohl dieselbe Basis als auch denselben Exponenten haben. Potenzausdrücke zuerst ordnen und dann die gleichnamigen Glieder zusammenfassen.	$\boxed{x \cdot a^n + y \cdot a^n = (x + y) \cdot a^n}$	$9 \cdot 3^4 - 6 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3$ $= (9-6) \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3$ $= 3 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3$ $4{,}2\ \text{cm}^2 + 5{,}8\ \text{cm}^2$ $= (4{,}2 + 5{,}8) \cdot \text{cm}^2 = 10{,}0\ \text{cm}^2$
Multiplizieren von Potenzen **Potenzen mit gleicher Basis** werden multipliziert, indem die Basis beibehalten und mit der Summe der Exponenten potenziert wird. **Potenzen mit gleichen Exponenten** werden multipliziert, indem ihre Basen multipliziert und der Exponent beibehalten wird.	$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$ $\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$	$2^2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ oder $2^2 \cdot 2^3 = 2^{(2+3)} = 2^5$ $10^{-3} \cdot 10^6 = 10^{(-3+6)} = 10^3$ $\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-2} = \text{m}^{(3-2)} = \text{m}^1 = \text{m}$ $5^3 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$ $4{,}0^3 \cdot \text{cm}^3 = (4{,}0 \cdot \text{cm})^3 = 64\ \text{cm}^3$
Dividieren von Potenzen **Potenzen mit gleicher Basis** werden dividiert, indem die gemeinsame Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert wird. **Potenzen mit gleichen Exponenten** werden dividiert, indem aus den Basen ein Bruch gebildet wird, der mit dem gemeinsamen Exponent potenziert wird.	$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$ $\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$	$\frac{2^6}{2^2} = 2^{6-2} = 2^4$ $\frac{\text{m}^5}{\text{m}^2} = \text{m}^{5-2} = \text{m}^3$ $\frac{12^3}{10^3} = \left(\frac{12}{10}\right)^3 = \left(\frac{6}{5}\right)^3 = 1{,}728$
Potenzieren von Potenzen Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.	$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$	$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729$ $(r^2)^x = r^{2 \cdot x} = r^{2x}$
Potenzieren von Summen aus Zahlen Eine Summe oder eine Differenz aus Zahlen wird zuerst ausgerechnet und dann potenziert.		$(2+5)^2 = 7^2 = 49$ $(9-3)^3 = 6^3 = 216$

Aufgaben zum Rechnen mit Potenzen

1. Addieren und Subtrahieren von Potenzen
   a) $4r^3 + 12r^2 - 2r^3 + 3r^3 + 3r^2$ b) $12\ \text{m}^2 + 7\ \text{m}^3 - 7\ \text{m}^2 + 5\ \text{m}^3$ c) $6{,}2x^4 + 3{,}4y^2 + 7{,}5x^4 - 3{,}4y^2$
   d) $2{,}8\pi r^2 h + \frac{4}{5}\pi r^3 - 1{,}75\pi r^3 + 2{,}2 h r^2 \pi$ e) $-14{,}3 \cdot 7^3 + 6{,}9 \cdot 11^4 + 1715 \cdot 7^{-3} + 1{,}1 \cdot 11^4 + 8{,}7 \cdot 7^3$
2. Multiplizieren von Potenzen
   a) $10^7 \cdot 10^2 \cdot 10^{-5}$ b) $0{,}4a^4 \cdot 0{,}5a^5$ c) $2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ d) $(r^3 - 2{,}5r^2) \cdot 2r^2$
   e) $d^{0{,}5x} \cdot d^{7x+3}$ f) $x^{a-n} \cdot x^{a+n}$ g) $(r+s)^2 \cdot (r+s)^3$ h) $(x+y)^a \cdot (x+y)^b$
3. Dividieren von Potenzen
   a) $\frac{10^3}{10^2}$ b) $\frac{10^3 \cdot 10^2}{10 \cdot 10^3}$ c) $\frac{225^3}{15^3}$ d) $\frac{780x^5}{39y^5}$ e) $\frac{2r^3}{3a^2} \cdot \frac{12a^2}{16r^3}$ f) $\frac{n^3}{x^4} : \frac{n^3 \cdot x^4}{a}$
4. Potenzieren von Potenzen
   a) $(5^3)^2$ b) $(10^3)^{-2}$ c) $(4^2 \cdot axy^2)^3$ d) $5 \cdot (u^2 v^3)^5$ e) $(1^7)^2 \cdot (3^0)^3$ f) $(7^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3$
5. Potenzieren von Summen a) $(3+7)^3$ b) $(22-17)^5$ c) $(23-14)^5$ d) $(5+9)^4$

1

1.7 Rechnen mit Wurzeln

Definition des Wurzelbegriffs

Das Wurzelziehen, auch Radizieren genannt, ist die Umkehrung des Potenzierens.

Durch Wurzelziehen (engl. extraction) soll ermittelt werden, welche Zahl (x) z. B. ins Quadrat (Exponent 2) erhoben werden muss, um den Potenzwert (25) zu erhalten. Als Operatorzeichen für das Wurzelziehen verwendet man das Wurzelzeichen $\sqrt[2]{}$, kurz Wurzel genannt.

Beispiele: $\sqrt[2]{16} = ?$; *Lösung:* $\sqrt[2]{16} = 4$, da $4^2 = \mathbf{16}$
$\sqrt[2]{9} = ?$; *Lösung:* $\sqrt[2]{9} = 3$, da $3^2 = \mathbf{9}$

Ein Wurzelausdruck besteht aus dem Wurzelzeichen mit Wurzelexponent und der darunter stehenden Basis. Das Ergebnis ist der Wurzelwert (siehe rechts).

Einschränkung auf bestimmte Zahlen: Um Probleme beim Rechnen zu vermeiden, sollten die Basis a und der Wurzelwert c positive Zahlen und der Wurzelexponent n eine natürliche Zahl sein.

Beispiel: Potenzieren
$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

Beispiel: Wurzelziehen
$x^2 = 25$; $x = ?$
Schreibweise mit Wurzelzeichen:
$\sqrt[2]{25} = ?$
Lösung: $\sqrt[2]{25} = 5$, da $5^2 = 25$

Wurzelausdruck

Wurzel-exponent Wurzel-zeichen

$$\sqrt[n]{a} = c$$

Basis Wurzelwert

a, c sind positive Zahlen
n ist eine natürliche Zahl (1, 2, 3, …)

Verschiedene Wurzelexponenten

Da es bei Potenzen verschiedene Exponenten gibt (2, 3, 4, …), gibt es auch Wurzeln mit verschiedenen Wurzelexponenten (2, 3, 4, …).

Die einfachste Wurzel hat den Wurzelexponenten 2. Sie heißt Quadratwurzel oder einfach Wurzel. Beim Schreiben wird der Wurzelexponent 2 im Wurzelzeichen meist weggelassen: $\sqrt{}$

Die Wurzel mit dem Wurzelexponenten 3 heißt Kubikwurzel oder 3. Wurzel.

Ab dem Wurzelexponent 4 wird der Wurzelname nur noch mit dem Wurzelexponent gebildet, also 4. Wurzel ($\sqrt[4]{}$), 5. Wurzel ($\sqrt[5]{}$) usw.

Außer beim Wurzelexponenten 2 muss der Wurzelexponent immer geschrieben werden.

Beispiel: Quadratwurzel
$\sqrt[2]{36} = \sqrt{36} = 6$
(sprich: Wurzel aus 36 ist 6)

Beispiel: Kubikwurzel
$\sqrt[3]{64} = 4$ (da $4^3 = 64$)
(sprich: Kubikwurzel oder 3. Wurzel aus 64 ist 4

Beispiel: 4. Wurzel
$\sqrt[4]{16} = 2$ (da $2^4 = 16$)

Wurzeln in Potenzschreibweise

Ein Wurzelausdruck kann auch in Potenzschreibweise geschrieben werden. Dem Wurzeloperator entspricht ein Potenzbruch.

Der Zähler des Potenzbruchs ist der Exponent der Basis und sein Nenner ist der Wurzelexponent.

Da das Wurzelzeichen die Umkehrung des Potenzierens ist, heben sich Radizieren und Potenzieren mit demselben Exponenten auf.

In umgekehrter Reihenfolge gilt das bei negativen Zahlen nicht immer!

Wurzel als Potenzausdruck

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^1} = a^{\frac{1}{n}}$$

Beispiel: $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^3 = 3$

Aufheben des Wurzelziehens

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Beispiel: $\left(\sqrt[3]{64}\right)^3 = 64$

Berechnen von Wurzelzahlen

Der Wurzelwert von Wurzelzahlen wird mit dem Taschenrechner berechnet.

Zur Berechnung von Quadratwurzeln haben die Taschenrechner eine Quadratwurzeltaste, z. B. $\boxed{\sqrt{}}$ oder $\boxed{\sqrt{x}}$.

Wurzeln mit höheren Wurzelexponenten werden mit den entsprechenden Rechnertasten berechnet, z. B. $\boxed{\sqrt[x]{}}$, $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ oder $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{y^x}$.

Beispiele: Es sind zu berechnen:
a) $\sqrt{529}$; b) $\sqrt[4]{39{,}0625}$

a)			
Eingabe	$\boxed{\sqrt{x}}$	529	$\boxed{=}$
Anzeige	$\sqrt{}$	$\sqrt{529}$	23,00000

b)				
Eingabe	4	$\boxed{\sqrt{x}}$	39,0625	$\boxed{=}$
Anzeige	4	$\sqrt[4]{}$	$\sqrt[4]{39.0625}$	2.500016

Rechenregeln beim Wurzelziehen	Formeln	Beispiele
Addieren und Subtrahieren von Wurzeln Es können nur Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten und gleicher Basis (sogenannte gleichnamige Wurzeln) addiert oder subtrahiert werden. Man klammert die gleichnamige Wurzel aus und addiert bzw. subtrahiert die Beizahlen (Koeffizienten).	$x \cdot \sqrt[n]{a} + y \cdot \sqrt[n]{a} = (x + y) \cdot \sqrt[n]{a}$	$5 \cdot \sqrt[3]{125} + 12 \cdot \sqrt[3]{125} - 14 \cdot \sqrt[3]{125}$ $= (5 + 12 \ldots 14) \cdot \sqrt[3]{125}$ $3 \cdot \sqrt[3]{125} = 3 \cdot 5 = 15$
Radizieren von Produkten Ein Produkt wird radiziert, indem • entweder der Produktwert radiziert wird oder • jeder einzelne Faktor des Produkts radiziert wird.	$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$	$\sqrt{36 \cdot 81} = \sqrt{2916} = 54$ oder $\sqrt{36 \cdot 81} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{81}$ $= 6 \cdot 9 = 54$
Radizieren von Quotienten (Brüchen) Ein Quotient wird radiziert, indem • entweder der Quotientenwert radiziert wird oder • Zähler und Nenner getrennt radiziert werden.	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt{\frac{64}{16}} = \sqrt{4} = 2$ oder $\sqrt{\frac{64}{16}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}} = \frac{8}{4} = 2$
Radizieren von Potenzen Eine Potenz wird radiziert, indem man • die Wurzel aus der Basis zieht und den Wurzelwert mit dem Exponenten der Basis potenziert oder • die Wurzel in Potenzschreibweise umwandelt.	$\sqrt[n]{a^x} = (\sqrt[n]{a})^x$ $\sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}$	$\sqrt{9^4} = (\sqrt{9})^4 = 3^4 = 81$ $\sqrt{9^4} = \sqrt[2]{9^4} = 9^{\frac{4}{2}} = 81$
Radizieren von Summen und Differenzen Eine Summe oder eine Differenz kann nur radiziert werden, wenn vorher der Summenwert zahlenmäßig ausgerechnet oder zu einem Produkt zusammengefasst wurde.	$\sqrt[n]{a + b} = \sqrt[n]{(a + b)}$	$\sqrt[3]{81 + 44} = \sqrt[3]{125} = 5$ $\sqrt{289 - 145} = \sqrt{144} = 12$ $\sqrt{39x^2\,y^2 + 25x^2\,y^2}$ $= \sqrt{64x^2\,y^2} = 8xy$

Aufgaben zum Rechnen mit Wurzeln

1. Berechnen Sie den Wurzelwert

a) $\sqrt{45796}$ b) $\sqrt{0{,}0065324}$ c) $\sqrt{1432{,}6225}$ d) $\sqrt[3]{39{,}785}$ e) $\sqrt[4]{42{,}424}$ f) $\sqrt{\pi}$

2. Berechnen Sie, nachdem Sie möglichst weit zusammengefasst haben

a) $2{,}8 \cdot \sqrt{3} + 1{,}9 \cdot \sqrt{5} - 2{,}1 \cdot \sqrt{5} - 1{,}6 \cdot \sqrt{3}$ b) $\frac{1}{5} \cdot \sqrt[3]{216} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{125} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{64}$ c) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{22{,}5}$

d) $(7 + \sqrt[4]{3}) \cdot (7 - \sqrt[4]{3})$ e) $\sqrt{\frac{1}{9}}$ f) $\frac{5}{\sqrt[3]{343}}$ g) $\frac{7x \cdot \sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$ h) $\sqrt[3]{27^4}$ i) $125^{\frac{2}{3}}$

3. Berechnen Sie

a) $\sqrt{1444 \cdot 729}$ b) $\sqrt[3]{125 \cdot 343 \cdot 27}$ c) $\sqrt{64^2}$ d) $3 \cdot \sqrt{\frac{1}{9}}$ e) $\frac{\sqrt[3]{2560}}{\sqrt[3]{5}}$ f) $\sqrt[4]{81^6}$ g) $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{7}\right)^6}$

h) $4{,}3 \cdot \sqrt[3]{343} - 3{,}8 \cdot \sqrt[3]{343}$ i) $1\frac{1}{3}\sqrt{3} + 2\frac{2}{3}\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$ j) $\sqrt{\left(\frac{3{,}9\text{ m} - 2{,}7\text{ m}}{3}\right)^2 + (0{,}3\text{ m})^2}$

1.8 Rechnen mit Logarithmen

1.8.1 Definition des Logarithmus

Soll in einem Potenzausdruck $a^n = c$ der unbekannte Exponent n bestimmt werden, so ist das dazu erforderliche Rechenverfahren das **Logarithmieren** (engl. logarithm).

> Der Logarithmus ist der Exponent n, mit dem die Basis a potenziert werden muss, um den Numerus c zu erhalten.

Logarithmus

Numerus

$$\boldsymbol{n = \log_a c}$$

Logarithmus Basis

Man schreibt: $n = \log_a c$. Man spricht: n ist gleich dem Logarithmus von c zur Basis a.
Es besteht folgender Zusammenhang zwischen der Potenzrechnung, der Wurzelrechnung und dem Logarithmieren:

Bei der **Potenzrechnung**:	Berechnet wird der Potenzwert c:	$c = a^n$	z. B.	$100 = 10^2$
Bei der **Wurzelrechnung**:	Berechnet wird die Basis a:	$a = \sqrt[n]{c}$	z. B.	$10 = \sqrt[2]{100}$
Beim **Logarithmieren**:	Berechnet wird der Exponent n:	$n = \log_a c$	z. B.	$2 = \log_{10} 100$

Beispiele für Logarithmen

$\log_2 8 = 3$	da $2^3 = 8$;	$\log_2 32 = 5$	da $2^5 = 32$
$\log_3 9 = 2$	da $3^2 = 9$;	$\log_3 27 = 3$	da $3^3 = 27$
$\log_5 25 = 2$	da $5^2 = 25$;	$\log_5 125 = 3$	da $5^3 = 125$
$\log_{10} 10 = 1$	da $10^1 = 10$;	$\log_{10} 100 = 2$	da $10^2 = 100$
$\log_{10} 1000 = 3$	da $10^3 = 1000$	$\log_{10} 10000 = 4$	da $10^4 = 10000$
$\log_{10} 0{,}1 = -1$	da $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = 0{,}1$	$\log_{10} 0{,}01 = -2$	da $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0{,}01$

Logarithmensysteme

Alle Logarithmen einer Basis bilden ein Logarithmensystem. Als Basis kann außer 0 und 1 jede positive Zahl verwendet werden.

In den Naturwissenschaften und der Technik sind zwei Logarithmensysteme in Gebrauch.

Das Logarithmensystem mit der Basis 10 ist rechnerisch am einfachsten zu handhaben und deshalb das in der Technik und den Naturwissenschaften übliche Logarithmensystem.

Logarithmen der Basis 10 werden **dekadische Logarithmen** oder **Brigg'sche Logarithmen** genannt. Man schreibt sie entweder $\log_{10}$ oder vereinfacht nur **log** oder **lg.**

Auf der Taschenrechnertastatur berechnet man dekadische Logarithmen mit der Taste $\boxed{\text{log}}$ oder $\boxed{\text{LOG}}$.

In den Naturwissenschaften, wie z. B. der Chemie oder Physik, wird außerdem ein Logarithmensystem mit der Basis e angewandt: $\log_e$. Es wird **natürlicher Logarithmus** genannt und abgekürzt **ln** geschrieben.

(e, die sogenannte Euler-Zahl, ist eine Zahl, die zur Beschreibung natürlicher Wachstumsvorgänge benutzt wird. Sie beträgt e = 2,7182818...; mit unendlich vielen Stellen.)

Auf dem Taschenrechner berechnet man natürliche Logarithmenwerte mit der Taste $\boxed{\text{lnx}}$ oder $\boxed{\text{LN}}$.

Die Logarithmen der beiden Systeme können mit einem Faktor ineinander umgerechnet werden (siehe rechts).

Umrechnen der Logarithmen

$$\lg x = 0{,}4342945 \cdot \ln x$$
$$\ln x = 2{,}3029851 \cdot \lg x$$

Beispiel: Es soll der natürliche Logarithmus (ln) der Zahl 126 mit einem Taschenrechner ermittelt werden, der nur eine $\boxed{\text{log}}$-Taste besitzt.

Lösung: Mit der $\boxed{\text{log}}$-Taste wird bestimmt: $\lg 126 = 2{,}1003705$
Mit der Umrechnungsgleichung folgt:
$\mathbf{\ln 126} = 2{,}3025851 \cdot \lg 126 = 2{,}3025851 \cdot 2{,}1003705 = \mathbf{4{,}8362819}$