13.
Klasse

FOS·BOS
Abitur Bayern

Mathematik Nichttechnik

- Die ideale Prüfungsvorbereitung -

FOS·BOS 2022

BLICK
ins BUCH
inkl. Prüfung 2021

DIGITALES
COACHING

FOS·BOS 13

FOS·BOS 13. Klasse | Abitur | Bayern

LehrplanPLUS

lernverlag
www.lern-verlag.de

Abiturprüfung Mathematik
Nichttechnik
13. Klasse
FOS | BOS Bayern
2022

erstellt

für Schülerinnen und Schüler der
Beruflichen Oberschule
nichttechnischer Zweig
in Bayern

INKL.
Original-Prüfung
2021
mit Lösungen

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Vorwort

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler, liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,

in diesem Band **Abiturprüfung Mathematik Nichttechnik FOS/BOS Bayern 13. Klasse 2022** sind die letzten vier zentral gestellten Original-Prüfungen der Jahre 2018 bis **2021** und eine Musterprüfung nach LehrplanPLUS enthalten. Dazu gibt es schülergerechte, lehrplankonforme und ausführliche Lösungen, die für den Schüler leicht verständlich und nachvollziehbar erstellt worden sind.
Das Prüfungsvorbereitungsbuch ist eine ideale Unterstützung während der Abschlussklasse und dient zur Vorbereitung auf eine erfolgreiche Abschlussprüfung.

Hinweise

Die **Abschlussprüfung 2022** findet nach Vorgaben des *Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus* am **31.05.2022** statt und dauert **180 Minuten**. (Stand 01.09.2021)
Als **Hilfsmittel** ist ein nichtprogrammierbarer elektronischer Taschenrechner und die Merkhilfe zugelassen.

Neues - Lernplattform kommt

Wir haben eine neue **Lernplattform** eingerichtet und bauen diese sukzessive auf. Hier findet man im gesicherten Mitgliederbereich hilfreiche Erklär- und Lösungsvideos zu vielen Prüfungsthemen und zu den Lösungen der Original-Prüfungen dieses Buches. Jetzt bei **https://lern.de** oder **https://abitur.guru** einen Platz sichern.
Zeit- und ortsunabhängig online für einzelne Arbeiten in der Schule oder das Fachabitur 2022 an Beruflichen Oberschulen in Bayern lernen.

Tipps

Fangen Sie rechtzeitig mit den Vorbereitungen auf die Abschlussprüfung an und arbeiten Sie kontinuierlich alte Prüfungen durch. Wiederholen Sie die einzelnen Prüfungen mehrmals, um die notwendige Sicherheit zu erlangen. Zur Lernkontrolle können Sie den Prüfungsplaner im Innenteil dieses Prüfungsvorbereitungsbuch verwenden.
Üben Sie also, so oft Sie können.

Notenschlüssel

Der Notenschlüssel wird vom *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* festgelegt. In der folgenden Tabelle finden Sie den Notenschlüssel.

Notenschlüssel

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
−	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
−	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
−	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
−	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
−	1	26	20
6	0	19	0

Impressum

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
Geschäftsführer: Sascha Jankovic
Fürstenrieder Str. 52
80686 München
Amtsgericht München: HRB 205623
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de – https://www.lern-verlag.de
lernverlag, cleverlag und lern.de sind eingetragene Markenzeichen von Sascha Jankovic, Inhaber und Verleger.
Druck: Deutschland
Lösungen:
StD Dr. Michael Fuchs (Berufliche Oberschule Memmingen), Simon Rümmler, Sascha Jankovic und das Team der lern.de Bildungsgesellschaft mbH

Wir danken dem *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* für die freundliche Genehmigung, die Original-Prüfungen abdrucken zu dürfen. Die Lösungsvorschläge liegen nicht in der Verantwortung des Ministeriums.

7. ergänzte Auflage © 2021 1.Druck
ISBN-Nummer: 978-3-7430-0080-3
Artikelnummer:
EAN 9783743000803

Aktuelles Rund um die Prüfung 2022 und diesem Buch

Als kleiner Verlag schreiben wir für alle Schüler:innen nachvollziehbare, verständliche und ausführliche Lösungen zu den Original-Prüfungen und versuchen unsere Titel auch während des Schuljahres immer aktuell zu halten. Da wir seit über 20 Jahren individuelle Lernförderung durchführen, stehen bei uns alle Schüler:innen an erster Stelle, wenn es um Fragen rund um das Buch, Verständnisprobleme bei dem ein oder anderen Thema oder Wünsche geht.
Egal ob es um übersehene Rechtschreibfehler, Rechenfehler oder auch Wünsche von Lehrer:innen oder Schüler:innen geht, wir setzen uns sofort hin und versuchen Gewünschtes umzusetzen. Es kostet niemanden etwas, und alle profitieren davon, auch wenn wir Mehrarbeit durch diesen kostenlosen Service haben.

Wir erreichen Sie uns am besten?

Schreiben Sie uns eine E-Mail an **kontakt@lern-verlag.de**

Schreiben Sie uns eine Nachricht, schicken Sie ein Foto von der betroffenen Seite. Wir prüfen, ändern und veröffentlichen bei Bedarf im kostenlosen Downloadbereich des lernverlags die durchgeführten Änderungen.

WhatsApp-Business
+49 89 54 64 52 00

Sie können uns gerne unter der selben Nummer anrufen.

Digitales zu diesem Buch

Unter **https://lern.de** bauen wir gerade eine Lernplattform auf.
Du suchst ein Video über zur gebrochen-rationalen Funktion oder Lagebeziehungen und bekommst aktuell auf anderen Plattformen 50 Videos mit unterschiedlichen Erklärungen angezeigt? Das soll sich ändern. Ein Begriff und maximal 3 Videos, die zusammenhängen, sollen angezeigt werden.
Wir arbeiten unter Hochdruck daran, kurze animierte Erklärvideos, passend zum Unterrichtssoff und „**ON-TOP**“ Lösungsvideos zu den Original-Prüfungen zu erstellen.
Schau öfters einmal vorbei oder melde dich am besten zu unserem **Newsletter** an, der **maximal zweimal pro Monat** verschickt wird.

Änderungen/Hinweise in dieser Neuauflage 2021/2022 - ISBN: 978-3-7430-0080-3

- Aus pädagogischen Gründen und zu Übungszwecken die Prüfung 2018 im Buch gelassen
- Aktuelles erstellt; Downloadbereich Verlagsseite überarbeitet
- Einen Ableitungsfehler im Miniskript behoben
- Diese ergänzte Auflage mit 264 Seiten ist durch die Original-Prüfung 2021 mit Lösungen und ohne Kürzungen noch umfangreicher als die Vorauflage mit 224 Seiten
- **Original-Prüfung 2021 inkl. ausführlichen Lösungen eingefügt**

Unsere Autoren

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Nichttechnik Fachabitur**:
StR Verena Reffler (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Nichttechnik Abitur**:
StD Dr. Michael Fuchs (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Technik Fachabitur**:
StD Roland Wittmann (Neuburg a. d. Donau); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Technik Abitur**:
StD Roland Wittmann (Neuburg a. d. Donau); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Alle Prüfungsteile, die identisch in Nichttechnik und Technik abgeprüft werden, sind dementsprechend doppelt korrigiert.

Miniskript und Übungsaufgaben:
StD Dr. Michael Fuchs (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Musterprüfungen Fachabitur und Abitur:
Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Übungsaufgaben im Miniskript:
Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Die Autoren wünschen viel Erfolg bei der **Abschlussprüfung 2022**.

Inhaltsverzeichnis

Operatoren

Operatoren sind bestimmte Handlungsanweisungen, die sicherstellen, dass bei bestimmten Aufgabenstellungen stets das Gleiche verstanden und umgesetzt wird. In der folgenden Tabelle haben wir Ihnen die gängigsten Operatoren aufgelistet und die entsprechende Bedeutung dazu hingeschrieben.

Operator	Bedeutung für den Lösungsansatz
berechnen Sie	Sie berechnen das Ergebnis und die Lösungswege müssen nachvollziehbar und vollständig sein.
bestimmen bzw. ermitteln Sie	Sie berechnen das Ergebnis oder beschreiben das Ergebnis durch die in der Angabe vorhandenen Informationen.
begründen Sie	Sie begründen durch die Informationen in der Angabe ihr Ergebnis und bestätigen durch Herleitungen Ihre Schlussfolgerungen.
beweisen, zeigen Sie	Das Ergebnis wird im gegebenen Sachverhalt bewiesen, eventuell auch durch eine Herleitung.
entscheiden Sie	Es werden mehrere Alternativen angeben, und Sie entscheiden sich für eine.
erläutern Sie	Sie geben die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts anhand von Beispielen wieder.
interpretieren Sie	Sie analysieren die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts wieder und interpretieren diese.
nennen Sie, geben Sie an	Sie nennen Fakten oder Sachverhalten ohne diese wiederzugeben.
prüfen Sie	Sie prüfen den gegebenen Sachverhalt auf Wahrheit.
untersuchen Sie	Sie untersuchen den Sachverhalt, berechnen ein Ergebnis und arbeiten Merkmale heraus.
skizzieren Sie	Sie stellen den Sachverhalt vereinfacht und übersichtlich dar.
zeichnen Sie	Sie erstellen eine exakte grafische Darstellung des Sachverhaltes.

Hinweis zur Prüfung 2022

Sonderregelung für die Abiturprüfung 2022 an der FOSBOS:
Nicht prüfungsrelevant (Stand: 18.06.2021):

- Aus LB 2: bestimmen anhand ausreichend vieler Informationen über eine gebrochen-rationale Funktion bzw. ihres Graphen einen geeigneten Funktionsterm, um damit weitere Eigenschaften des Graphen der betrachteten Funktion zu ermitteln
- Aus LB 2: berechnen uneigentliche Integrale 1. und 2.Art gebrochen-rationaler Funktionen, um damit Maßzahlen der Flächeninhalte von Flächen zu ermitteln, die in x-oder y-Richtung unbegrenzt sind, sofern diese existieren
- Aus LB 4: ermitteln Stammfunktionen von Funktionen, die sich auf die Form $x \mapsto e^{ax+b}$ oder $x \mapsto \frac{f'(x)}{f(x)}$ zurückführen lassen
- Aus LB 4: bestimmen mithilfe der partiellen Integration Stammfunktionen von Funktionen, deren Terme sich als Produkte darstellen lassen, insbesondere $x \mapsto x \cdot e^x$, $x \mapsto 1 \cdot \ln(x)$, $x \mapsto x \cdot \ln(x)$
- Aus LB 7: Abstände zwischen zwei Objekten in $\mathbb{R}^3$ berechnen

Bitte fragen Sie bzgl. Änderungen bei Ihrer Lehrkraft nach!

Polynome

Liebe Schülerinnen und Schüler,
die nachfolgende Übersicht zu den ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen) ist eine enorm wichtige Grundlage für viele Themen der Abschlussprüfung.
Versuchen Sie deshalb bitte, die Übersicht auf „**Verständnis**“ zu lernen und in unterschiedlichen Abständen immer wieder zu wiederholen.

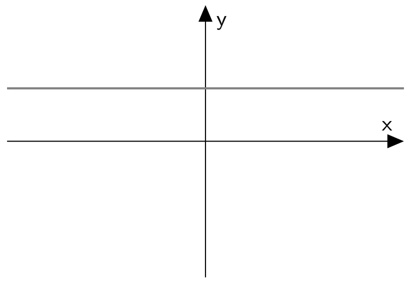
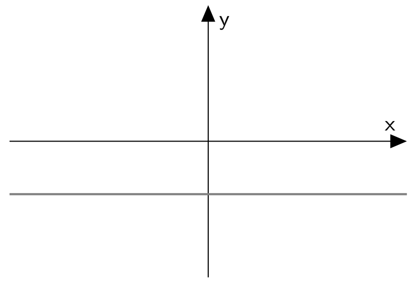
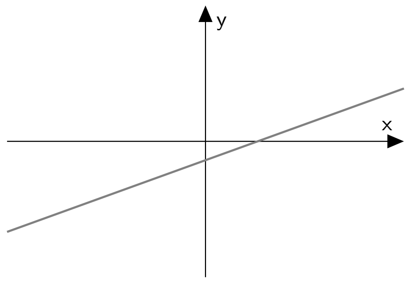
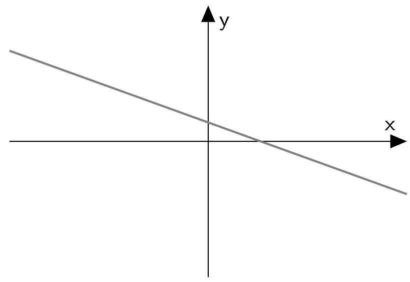
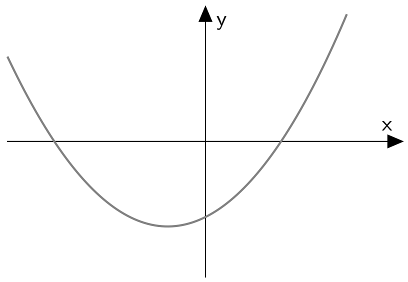
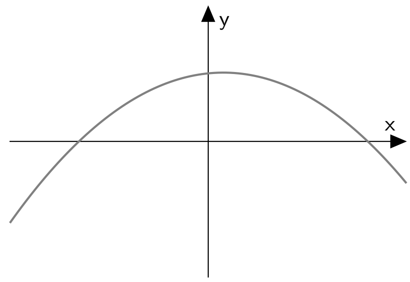
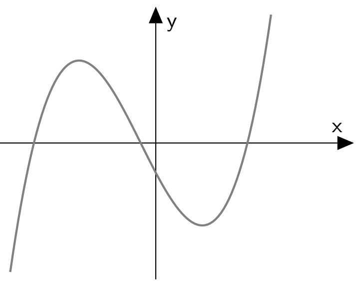
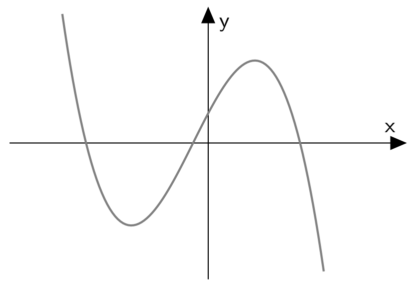
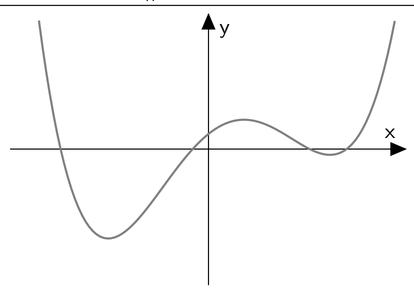
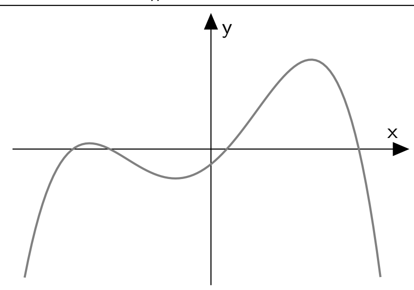
Nachfolgend ein kleiner „Fahrplan“ zum Lernen der Übersicht.

- **Prägen** Sie sich als erstes am besten die Spaltenüberschriften **ein**.
- **Lernen** Sie jetzt die „**Namen**“ der einzelnen Funktionstypen (diese sind übrigens identisch mit den dazugehörigen Gleichungstypen!). Hierzu sei angemerkt, dass es einen grundlegenden Unterschied zwischen Funktionen und dazugehörigen Gleichungen gibt!
    - Mit Funktionen werden die zu den Variablen (häufig x) gehörenden „y-Werte“, „Steigungswerte“ und „Krümmungswerte“ definiert bzw. berechnet.
    - Funktionen kann man ableiten.
    - Nur Gleichungen kann man LÖSEN. Hierzu benötigt man entsprechende „**Werkzeuge**“.
- **Beachten** Sie dabei die **Definition** der **Koeffizienten** $(a, b, c, ...)$. Auch hier ist auffallend, dass bis auf die konstanten Funktionen der sogenannte „Leitkoeffizient“ a niemals null sein darf. Dies ist „logisch“, da ja der „namensgebende“ Bestandteil des Funktionsterms nicht fehlen darf. Koeffizienten sind sogenannte „**Nebenwirker**“, die neben den Variablen (häufig x) für die entsprechenden Funktionswerte „mitverantwortlich“ sind.
- **Lernen** Sie jetzt die **Graphentypen**, die zu den verschiedenen Funktionstypen gehören.
    - Der Leitkoeffizient (a) gibt dabei an, wohin der dazugehörige Graph für große y-Werte verläuft. Ist der Leitkoeffizient positiv (> 0) verläuft der dazugehörige Graph nach rechts oben, ist er negativ (< 0) nach rechts unten. Einzig bei den konstanten Funktionen verlaufen die Graphen für positive Leitkoeffizienten „über“– bzw. „unterhalb der x-Achse“.
- Abschließend **lernen** Sie die **Gleichungstypen** und dazugehörigen „**Werkzeuge**“.

  Verlieren Sie hier bitte nicht die Geduld, es lohnt sich für viele spätere Themen. Und keine Angst, es sind **nur sechs** verschiedene „**Werkzeuge**“!

Die Autoren, V. Reffler, Dr. M. Fuchs, S. Rümmler, S. Jankovic und das Team von lern.de

Funktionstyp und allgemeine Funktionsgleichung	dazugehörige Gleichungen und „Werkzeuge“ zum Lösen
Konstante **Funktion** $f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ Funktionsgrad: 0	*Konstante* Funktions**gleichung** $a = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$ Keine „Werkzeuge“ notwendig
Lineare **Funktion** $f(x) = ax + b$ mit $a; b \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 1	*Lineare* Funktions**gleichung** $ax + b = 0$ mit $a; b \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Äquivalenzumformung
Quadratische **Funktion** $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a; b; c \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 2	*Quadratische* Funktions**gleichung** $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a; b; c \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Ausklammern ($c = 0$) - Radizieren ($b = 0$) - „Mitternachtsformel“ (vollständige Gleichung)
Kubische **Funktion** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a; b; c; d \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 3	*Kubische* Funktions**gleichung** $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit $a; b; c; d \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Ausklammern ($d = 0$) - Polynomdivision (zum Vereinfachen der Funktion)
(Polynom)**Funktion** *4. Grades* $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $a; b; c; d; e \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 4	Funktions**gleichung** *4. Grades* $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ mit $a; b; c; d; e \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Ausklammern ($e = 0$) - Polynomdivision (zum Vereinfachen der Funktion) - Substitution ($b = 0 \ \wedge \ d = 0$)

mögliche Graphentypen für a > 0	**mögliche** Graphentypen für a < 0
 Parallele **Gerade** über der x-Achse	 Parallele **Gerade** unter der x-Achse
 Steigende **Gerade**	 Fallende **Gerade**
 Nach oben geöffnete **Parabel**	 Nach unten geöffnete **Parabel**
 „N-Form“	 „S-Form“
 „W-Form“	 „M-Form“

Aufgaben - Polynome

1 Versuchen Sie diese Aufgabe ohne Zuhilfename der Übersicht, sondern mit dem Wissen was Sie gelernt haben zu bearbeiten.

a) Ordnen Sie jedem „Werkzeug“ alle zugehörigen Gleichungstypen mit jeweiligen Eigenschaften zu (siehe Beispiel). Die Zahl in Klammern gibt die Anzahl der verschiedenen Gleichungstypen zu jedem „Werkzeug“ wieder.
Äquivalenzumformung (1); Ausklammern (3); Mitternachtsformel (1); Radizieren (1); Polynomdivision (2); Substitution (1)

b) Geben Sie zu jedem Gleichungstyp eine mögliche Gleichung an.

Beispiel:
Mitternachtsformel: quadratische Gleichung (vollständige Gleichung); Bsp: $3x^2 - 4x + 1 = 0$

2 Um sicherer im Umgang mit den „Werkzeugen“ zu werden, finden Sie nachfolgend zu jedem „Werkzeug“ einige Gleichungen die entsprechend zu lösen sind.

a) Äquivalenzumformungen
I) $2x - 4 = 0$ II) $7x + 2 = 0$ III) $x - 3 = 0$ IV) $-5x - 4 = 0$

b) Radizieren
I) $x^2 - 4 = 0$ II) $4x^2 - 9 = 0$ III) $2x^2 + 2 = 0$ IV) $-x^2 + 3 = 0$

c) Mitternachtsformel
I) $2x^2 - 4x - 6 = 0$ II) $-3x^2 - 12x - 12 = 0$ III) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{27} = 0$
IV) $-x^2 + 2x - \frac{5}{2} = 0$

d) Substitution
I) $2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$ II) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ III) $0{,}5x^4 - 1{,}345x^2 + 0{,}845 = 0$

e) Ausklammern und Polynomdivision
Mithilfe beider „Werkzeuge“ kann die Gleichung zur quadratischen Gleichung vereinfacht werden, für welche die entsprechenden „Werkzeuge“ zur kompletten Lösung verwendet werden können. Um die Gleichung per Polynomdivision vereinfachen zu können ist es notwendig eine Nullstelle zu kennen, die „erraten“ werden muss. Geeignete Werte für das Erraten der Nullstelle sind dabei meist kleine ganze Zahlen wie $-5; -4; \ldots; 4; 5$ etc.
I) $2x^4 + 2x^3 - 4{,}5x^2 - 4{,}5x = 0$ II) $3x^4 - 7{,}5x^3 - 21x^2 + 12x = 0$
III) $x^4 - 3{,}7x^3 - 6{,}2x^2 - 1{,}5x = 0$

Lösungen - Polynome

1 Vollständige Lösung:

Werkzeug	**Gleichungstyp**	**Beispiel**
Äquivalenzumformung	lineare Gleichung	$x + 1 = 0$
Ausklammern	quadratische Gleichung ($c = 0$) kubische Gleichung ($d = 0$) Gleichung 4. Grades ($e = 0$)	$4x^2 - 2x = 0$ $3x^3 - 2x^2 + x = 0$ $x^4 - x^3 + 3x^2 + 4x = 0$
Mitternachtsformel	quadratische Gleichung (vollständige Gleichung)	$3x^2 - 4x + 1 = 0$
Radizieren	quadratische Gleichung ($b = 0$)	$4x^2 - 16 = 0$
Polynomdivision	kubische Gleichung (zum Vereinfachen) Gleichung 4. Grades (zum Vereinfachen)	$3x^3 + x^2 - 7x + 5 = 0$ $4x^4 - 3x^2 + 2x^2 + x - 1 = 0$
Substitution	Gleichung 4. Grades ($b = 0 \;\wedge\; d = 0$)	$4x^4 + 5x^2 - 7 = 0$

2 Für jede Teilaufgabe wird die Lösung einer Gleichung ausführlich angegeben und für die restlichen Gleichungen jeweils eine Kurzlösung.

a) Gleichung I): $2x - 4 = 0$; Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} & 2x - 4 = 0 && \mid +4 \\ \Longleftrightarrow\quad & 2x = 4 && \mid :2 \\ \Longleftrightarrow\quad & \underline{\underline{x_1 = 2}} \end{aligned}$$

Gleichung II): $\underline{\underline{x_1 = -\frac{2}{7}}}$

Gleichung III): $\underline{\underline{x_1 = 3}}$

Gleichung IV): $\underline{\underline{x_1 = -\frac{4}{5}}}$

b) Gleichung I): $x^2 - 4 = 0$; Radizieren:

$$\begin{aligned} & x^2 - 4 = 0 && \mid +4 \\ \Longleftrightarrow\quad & x^2 = 4 && \mid \pm\sqrt{\ } \\ \Longleftrightarrow\quad & \underline{\underline{x_1 = -2}} \;\vee\; \underline{\underline{x_2 = 2}} \end{aligned}$$

Gleichung II): $\underline{\underline{x_1 = -\frac{3}{2}}} \;\vee\; \underline{\underline{x_2 = \frac{3}{2}}}$

Gleichung III): keine Lösung, da die Quadratwurzel nicht aus negativen Zahlen gezogen werden darf

Gleichung IV): $\underline{\underline{x_1 = -\sqrt{3}}} \;\vee\; \underline{\underline{x_2 = \sqrt{3}}}$

$\Rightarrow$ Extrempunkte und Monotonieverhalten

Nullstellen und Vorzeichentabelle **zweite** Ableitung

$\Rightarrow$ Wendepunkte und Krümmungsverhalten

Für die Erstellung der Vorzeichentabelle ist es hilfreich, die jeweilige Ableitung in zwei Faktoren zu zerlegen, und dann für jeden einzeln und daraus resultierend für deren Produkt das Vorzeichenverhalten zu bestimmen.
In der nachfolgenden Box sind kompakt alle wichtigen Regeln für das Ableiten von e-Funktionen und verknüpfte Funktionen dargestellt.

Ableitungsregeln

e-Funktion allgemein: Die einfache e-Funktion abgeleitet ist die e-Funktion selbst:

$$(e^x)' = e^x$$

Summenregel: Ist die Funktion eine Summe, werden alle Summanden einzeln abgeleitet.

$$\begin{aligned} & f(x) = g(x) + h(x) && \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) + h'(x) \\ \text{Beispiel:}\quad & f(x) = e^x + 3x && \Rightarrow \quad f'(x) = (e^x)' + (3x)' = e^x + 3 \end{aligned}$$

Faktorregel: Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten erhalten.

$$\begin{aligned} & f(x) = C \cdot g(x) && \Rightarrow \quad f'(x) = C \cdot g'(x)) \\ \text{Beispiel:}\quad & f(x) = 4 \cdot e^x && \Rightarrow \quad f'(x) = 4 \cdot (e^x)' = 4 \cdot e^x \end{aligned}$$

Kettenregel: Für verkettete Funktionen ist die Ableitung der Gesamtfunktion die Ableitung der inneren mal die Ableitung der äußeren Funktion.

$$\begin{aligned} & f(x) = g(h(x)) && \Rightarrow \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) \\ \text{Beispiel:}\quad & f(x) = e^{-2x+4} && \Rightarrow \quad f'(x) = e^{-2x+4} \cdot (-2x+4)' = -2 \cdot e^{-2x+4} \end{aligned}$$

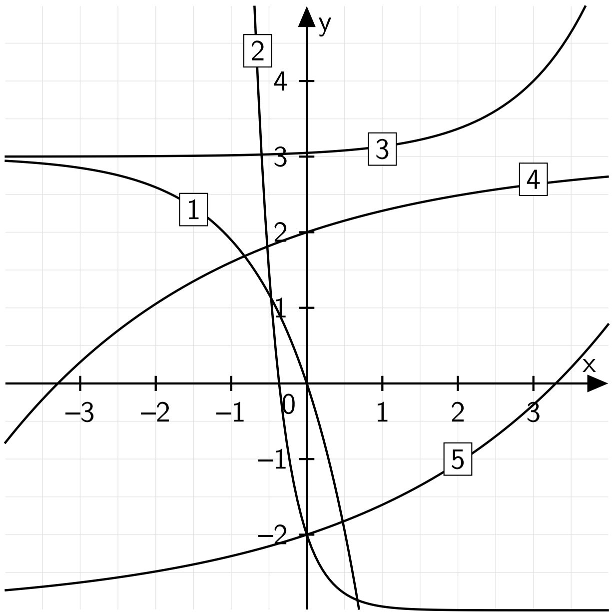
Produktregel: Ist die Funktion ein Produkt aus zwei einzelnen Funktionen, so gilt für deren Ableitung die Produktregel in der Form

$$\begin{aligned} & f(x) = g(x) \cdot h(x) && \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) \\ \text{Beispiel:}\quad & f(x) = (x^2+3) \cdot e^x && \Rightarrow \quad f'(x) = (x^2+3)' \cdot e^x + (x^2+3) \cdot (e^x)' \\ & && \qquad = 2x \cdot e^x + (x^2+3) \cdot e^x = (x^2+2x+3) \cdot e^x \end{aligned}$$

All diese Regeln kommen bei der Berechnung der Ableitung in folgendem Beispiel zum Einsatz.
Abgeleitet werden soll die Funktion $f(x) = 4 \cdot (x^2 + 3x - 7) \cdot e^{-2x-1} + 12$. Zuerst wird der Term als Summe betrachtet, wobei ein Summand die verkettete Funktion und der andere Summand die konstante Zahl 12 ist. Nach **Summenregel** gilt nun:

$$f'(x) = (4 \cdot (x^2+3x-7) \cdot e^{-2x-1} + 12)' = (4 \cdot (x^2+3x-7) \cdot e^{-2x-1})' + \overbrace{(12)'}^{=0}$$

Den gezeigten Funktionsgraphen soll jeweils einer der folgenden Funktionsgleichungen zugeordnet werden.



$f(x) = e^{x-3} + 3$ $\quad g(x) = e^{x/3} - 3$

$h(x) = e^{-3x} - 3$ $\quad k(x) = -e^{-x/3} + 3$

$m(x) = -3e^{3-x} - 3$ $\quad n(x) = -3e^{x} + 3$

Betrachtet man den Funktionsgraph „1“, so stellt man beispielsweise fest:

- streng monoton fallend
- Annäherung an 3 für $x \to -\infty$
- verläuft durch Ursprung $(0\,|\,0)$

Am schnellsten zu einem Ergebnis gelangt man durch charakteristische Punkte. Die passende Funktion muss also bei $x = 0$ den Funktionswert 0 haben. Durch Einsetzen kann man zeigen, dass es sich dabei nur um die Gleichung $n(x)$ handeln kann.

Aufgaben - Exponentialfunktionen

1. Weisen Sie auch den Funktionsgraphen „2“ bis „5“ der obigen Abbildung die passende Funktionsgleichung zu.

2. Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen:

   a) $f_1(x) = e^{2x+1}$ b) $f_2(x) = -4e^{-2x+5}$ c) $f_3(x) = 23 + e^{-4x-2} \cdot 7$

3. Berechnen Sie jeweils die erste und zweite Ableitung folgender verknüpfter Funktionen:

   a) $g_1(x) = e^{x} \cdot (25x + 7)$ b) $g_2(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-5x+7} + 8$

   c) $g_3(x) = (x + 1) \cdot 5 \cdot (e^{x+27} + 3)$

4. Bestimmen Sie für die nachfolgenden Funktionen jeweils exakte Werte für die Nullstelle, die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse, sowie Art und Koordinaten der Extrempunkte.

   $h(x) = 5x \cdot e^{5x}$ $\quad k(x) = (-x^2 + x + 1) \cdot e^{-x+1}$

Kurzlösungen:
(ausführliche Lösungen finden Sie auf unserer Verlagsseite - Download)

1. Graph 2: h(x); Graph 3: f(x); Graph 4: k(x); Graph 5: g(x)
2. $f_1'(x) = 2e^{2x+1}$ $\quad f_2'(x) = 8e^{-2x+5}$ $\quad f_3'(x) = -28e^{-4x-2}$
3. $g_1'(x) = (25x + 32) \cdot e^{x}$ $\quad g_1''(x) = (25x + 57) \cdot e^{x}$
   $g_2'(x) = (-5x^2 + 2x + 5) \cdot e^{-5x+7}$ $\quad g_2''(x) = (25x^2 - 20x - 23) \cdot e^{-5x+7}$
   $g_3'(x) = (5x + 10)e^{x+27} + 15$ $\quad g_3''(x) = (5x + 15)e^{x+27}$
4. h(x): **NST:** $x_1 = 0$ **Schnitt y-Achse:** $S_y\,(0\,|\,0)$ **Extrema:** TIP $\left(-\frac{1}{5}\,\middle|\,-e^{-1}\right)$
   k(x): **NST:** $x_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ **Schnitt y-Achse:** $S_y\,(0\,|\,e)$ **Extrema:** HOP $(0\,|\,e)$; TIP $\left(3\,\middle|\,-5e^{-2}\right)$

Anwendungsaufgaben - Exponentialfunktionen

1.0 *Abschlussprüfung FOS13MNT 2014 AII Aufgabe 3 - adaptiert*
Für Ausdauersportler ist die Laktatkonzentration L im Blut (in mmol/l) ein Indikator für die Ausdauerleistungsfähigkeit. Bei Läufern wird auf dem Laufband die Laktatkonzentration in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v des Läufers (in km/h) gemessen.
Die Messwerte von Läufer Max bei einem Laktattest lassen vermuten, dass die Werte nach einer Funktion der Form $L(v) = (0{,}02v - 0{,}25) \cdot e^{0{,}23 \cdot v} + 1{,}2$ für $0 \leq v \leq 19$ verlaufen.
Bei den Rechnungen kann auf Benennungen verzichtet werden. Die Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen zu runden.

1.1 Untersuchen Sie mithilfe der 1. Ableitung von L den Verlauf der Laktatkonzentration im Blut von Max und interpretieren Sie die Koordinaten des Extrempunktes im Sachzusammenhang.
(Teilergebnis: $L'(v) = (0{,}0046v - 0{,}0375) \cdot e^{0{,}23v}$)

1.2 Zeichnen Sie die Laktatkurve für $0 \leq v \leq 19$ in ein Koordinatensystem.
(Maßstab: $1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 2\,\text{km/h}$; $1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{mmol/l}$)

2.0 *Abschlussprüfung FOS13MNT 2015 AII Aufgabe 2 - adaptiert*
Bei einer Infusion wird einem Patienten pro Minute eine konstante Menge eines Medikaments zugeführt. Das im Blut angereicherte Medikament wird über die Nieren wieder ausgeschieden.
Für die im Blut des Patienten befindliche Menge m des Medikaments in mg (Milligramm) zum Zeitpunkt t (in Minuten) nach Beginn der Infusion ergibt sich eine Funktion der Form:
$m(t) = 100(1 - e^{-0{,}05t})$, $t \geq 0$.
Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.
Runden Sie bei der Zeit immer auf Minuten, bei der Menge auf zwei Nachkommastellen.

2.1 Berechnen Sie, welche Menge des Medikaments sich 10 Minuten nach Anlegen der Infusion im Blut befindet und wann die therapeutische Minimalmenge von 70 mg erreicht wird.

2.2 Weisen Sie nach, dass für die erste Ableitung von m gilt:
$\dot{m}(t) = 5\,e^{-0{,}05t}$. Berechnen Sie die Werte $\dot{m}(10)$ und $\dot{m}(30)$ und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

3.0 *Abschlussprüfung FOS13MNT 2016 AII Aufgabe 3 - adaptiert*
Computerviren sind Programme, die sich über das Internet rasch verbreiten und von ihnen infizierte Rechner schädigen oder zerstören. Wird ein neuer Virus in Umlauf gebracht, verbreitet er sich zunächst rasch. Die Infizierungsrate I beschreibt die Anzahl der Computer, die sich pro Tag neu infizieren, und kann näherungsweise durch den Funktionsterm
$I(t) = 1000 \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$ mit $t \geq 0$ beschrieben werden.
Die Zeit t wird in Tagen angegeben, wobei $t = 0$ derjenige Zeitpunkt ist, an dem der neue Virus in Umlauf gebracht wird.
Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.
Ergebnisse sind sinnvoll zu runden.

3.1 Bestimmen Sie die Zeitintervalle, in denen die Infizierungsrate zunimmt bzw. abnimmt, und ermitteln Sie die maximale Infizierungsrate.
[Teilergebnis : $\dot{I}(t) = 250 \cdot (8t - t^2) \cdot e^{-0{,}25t}$]

Vektoren

Vektoren

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ werden als Spaltenvektoren dargestellt und durch ihre Koordinaten beschrieben. Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ein **Ortsvektor** entspricht dem Pfeil vom Koordinatenursprung zu einem bestimmten Punkt. Die Koordinaten des Ortsvektors ergeben sich aus den Koordinaten des Punktes. Beispiel:

$$\text{Punkt } P\,(3\,|\,2\,|\,6) \quad \Rightarrow \quad \text{Ortsvektor } \overrightarrow{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ein Pfeil, der zwei Punkte verbindet, repräsentiert einen Vektor zwischen diesen beiden Punkten. Die Koordinaten dieses Vektors ergeben sich aus den Koordinaten der beiden Punkte nach der Merkregel „Spitze minus Fuß“. Beispiel:

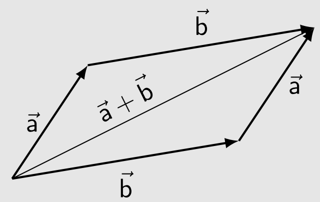
$$\text{Punkte } P\,(3\,|\,2\,|\,6) \text{ und } Q\,(4\,|\,-1\,|\,3) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ -1-2 \\ 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Einfache Vektoroperationen

Die Addition und Subtraktion zweier Vektoren und das Produkt eines Skalares (Zahl) mit einem Vektor wird jeweils komponentenweise berechnet:

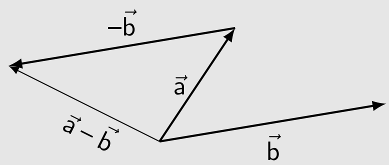
Addition von Vektoren

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$



Subtraktion von Vektoren

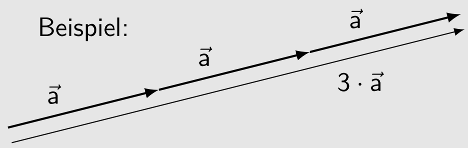
$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$



Multiplikation mit einem Skalar

$$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \\ s \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Beispiel:



Beispiel

Gegeben sind die Punkte A (1 | − 2 | 4), B (3 | 2 | 5) und der Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Gesucht sind die Koordinaten der Ortsvektoren $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, die Koordinaten des Verbindungsvektors $\overrightarrow{AB}$, außerdem die Koordinaten von $\vec{d} = \vec{a} + \vec{c}$, $\vec{e} = \vec{b} - \vec{c}$ und $\vec{f} = 4 \cdot \vec{c}$.
Die Koordinaten der Ortsvektoren ergeben sich aus den Koordinaten der Punkte und der Verbindungsvektor gemäß der Merkregel „Spitze minus Fuß“:

$$A\,(1\,|\,-2\,|\,4) \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad\qquad B\,(3\,|\,2\,|\,5) \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{OB} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-(-2) \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die anderen Vektoren ergeben sich, indem die Operationen wie beschrieben immer komponentenweise ausgeführt werden:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ -2+1 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

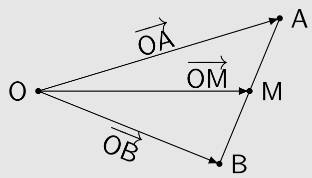
$$\vec{e} = \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-3) \\ 2-1 \\ 5-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = 4 \cdot \vec{c} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-3) \\ 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Besondere Ortsvektoren - Mittelpunkt einer Strecke

Für den Ortsvektor des Mittelpunktes M einer Strecke $\overline{AB}$ gilt:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$



Beispiel

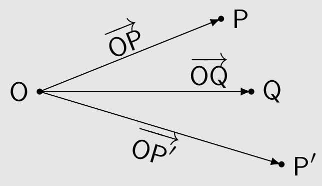
Gesucht sind die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke zwischen A (1 | − 2 | 4) und B (3 | 2 | 5).

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1+3 \\ -2+2 \\ 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 4 \\ \frac{1}{2} \cdot 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad M\,(2\,|\,0\,|\,4{,}5)$$

Besondere Ortsvektoren - Spiegelpunkt bezüglich eines Punktes

Wird ein Punkt P an einem Punkt Q gespiegelt, so gilt für den Ortsvektor des Spiegelpunktes P′:

$$\overrightarrow{OP'} = 2 \cdot \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$



Beispiel

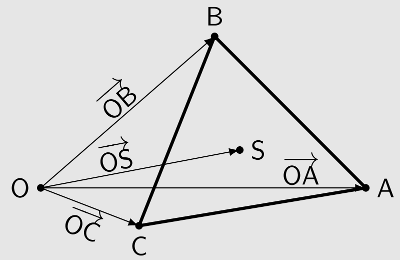
Wird der Punkt $P(3 \mid -4 \mid 1)$ am Punkt $Q(0 \mid 3 \mid -5)$ gespiegelt, erhält man den Punkt P′. Gesucht sind dessen Koordinaten.

$$\overrightarrow{OP'} = 2 \cdot \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 3 \\ 2 \cdot 3 - (-4) \\ 2 \cdot (-5) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ -11 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P'(-3 \mid 10 \mid -11)$$

Besondere Ortsvektoren - Schwerpunkt eines Dreiecks

Für den Ortsvektor des Schwerpunktes S eines Dreiecks ABC gilt:

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$



Beispiel

Gesucht sind die Koordinaten des Schwerpunktes S des Dreiecks, welches durch die Punkte $A(1 \mid -2 \mid 4)$, $B(3 \mid 2 \mid 5)$ und $C(-3 \mid 1 \mid -2)$ gebildet wird.

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 + 3 - 3 \\ -2 + 2 + 1 \\ 4 + 5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot 1 \\ \frac{1}{3} \cdot 1 \\ \frac{1}{3} \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S\left(\frac{1}{3} \,\middle|\, \frac{1}{3} \,\middle|\, \frac{7}{3}\right)$$

Skalarprodukt

Bildet man das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt sich ein Skalar (Zahl). Das Skalarprodukt wird mit dem Zeichen $\circ$ angezeigt und kann im $\mathbb{R}^3$ wie folgt berechnet werden:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Rechenregeln für das Skalarprodukt

- Kommutativgesetz: $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$
- Assoziativgesetz (Skalar $s \in \mathbb{R}$): $(s \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = s \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = \vec{a} \circ (s \cdot \vec{b})$
- Distributivgesetz: $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$

Anwendungen des Skalarprodukts

Für den **Betrag** eines Vektors im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Für den **Winkel** φ zwischen zwei Vektoren gilt:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \qquad (\text{für } 0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ)$$

Wegen $\cos(90^\circ) = 0$ folgt daraus insbesondere:
Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren gleich **null**, so stehen diese **orthogonal** (senkrecht) zueinander.

Beispiele

1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Gesucht ist das Resultat des Skalarprodukts $\vec{a} \circ \vec{b}$ und $\vec{a} \circ \vec{c}$, sowie der exakte Wert der Beträge $|\vec{b}|$ und $|\vec{c}|$.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 3 - 4 + 20 = 19$$

$$\vec{a} \circ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = -3 - 2 - 8 = -13$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\vec{b} \circ \vec{b}} = \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 4 + 25} = \sqrt{38}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c} \circ \vec{c}} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$

2. Gesucht ist der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} \cdot \sqrt{\vec{b} \circ \vec{b}}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2}} \\
&= \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{4 + 4 + 1} \cdot \sqrt{16 + 1 + 1}} = \frac{8 + 2 - 1}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{18}} = \frac{9}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{9}} = \frac{\cancel{9}}{\cancel{9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ$$

3. Gesucht ist ein Wert für $k \in \mathbb{R}$, für welchen die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_k = \begin{pmatrix} k+1 \\ 3k \\ k-2 \end{pmatrix}$ orthogonal zueinander sind.
Damit die Vektoren orthogonal sind, muss $\vec{a} \circ \vec{b}_k = 0$ erfüllt sein.

$$\begin{aligned}
& & \vec{a} \circ \vec{b}_k &= 0 & \\
&\iff & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} k+1 \\ 3k \\ k-2 \end{pmatrix} &= 0 & \\
&\iff & 2 \cdot (k+1) + 0 \cdot 3k - 4 \cdot (k-2) &= 0 & \\
&\iff & 2k + 2 - 4k + 8 &= 0 & \\
&\iff & -2k + 10 &= 0 & \quad | -10 \\
&\iff & -2k &= -10 & \quad | : (-2) \\
&\iff & k &= 5 &
\end{aligned}$$

Für $k = 5$ sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}_5$ orthogonal zueinander.

Vektorprodukt

Bildet man das Vektor-/Kreuzprodukt zweier Vektoren ergibt sich ein Vektor, der **orthogonal** zu den beiden anderen Vektoren ist. Das Skalarprodukt wird mit dem Zeichen $\times$ angezeigt und kann im $\mathbb{R}^3$ wie folgt berechnet werden:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für das Vektorprodukt

- Anti-Kommutativgesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- Assoziativgesetz (Skalar $s \in \mathbb{R}$): $(s \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = s \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (s \cdot \vec{b})$
- Distributivgesetz: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

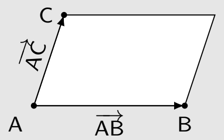
Anwendungen des Vektorprodukts

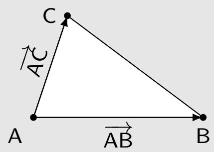
Durch Berechnung des Vektorprodukts kann ein Vektor gefunden werden, der senkrecht auf den beiden Vektoren steht (Bsp.: Normalenvektor einer Ebene).

Wenn zwei Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ ein Dreieck/Parallelogramm aufspannen, so kann dessen Flächeninhalt mit dem Vektorprodukt bestimmt werden.

$$A_{\text{Parallelogramm}} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$





Beispiele

1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Gesucht ist ein Vektor $\vec{d}$, der orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist und ein Vektor $\vec{e}$, der orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{c}$ ist.
   Ein Vektor, der orthogonal zu zwei anderen steht, ergibt sich aus deren Vektorprodukt:

$$\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 5 - 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot 2 - (-2) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = \vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot (-2) - 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-3) - 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 1 - (-2) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

2. Die Punkte A (1 | −2 | 4), B (3 | 2 | 5) und C (−3 | 1 | −2) bilden ein Dreieck. Gesucht ist der exakte Wert dessen Flächeninhalt.
   Aus den Koordinaten der Punkte ergeben sich zwei Vektoren, die das Dreieck aufspannen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-(-2) \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 1-(-2) \\ -2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

   Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt dann nach obiger Formel:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \cdot (-6) - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot (-4) - 2 \cdot (-6) \\ 2 \cdot 3 - 4 \cdot (-4) \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -27 \\ 8 \\ 22 \end{pmatrix} \right|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-27)^2 + 8^2 + 22^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1277}\,[FE]$$

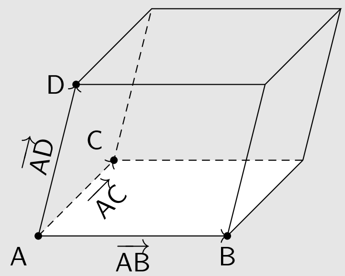
Spatprodukt

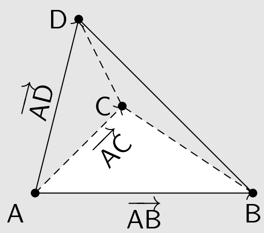
Das Spatprodukt von drei Vektoren ist ein gemischtes Produkt aus Skalar- und Vektorprodukt und wie folgt definiert:

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$$

Anwendung
Spannen drei Vektoren eine Pyramide oder einen Spat/Parallelepiped auf, so kann mithilfe des Spatprodukts dessen Volumen berechnet werden.

$$V_{Spat} = |\overrightarrow{AB} \circ (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})| \qquad V_{Pyramide} = \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{AB} \circ (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})|$$





Beispiel

Die Punkte A (1 | 1 | 1), B (−2 | 2 | 2), C (−2 | 4 | 1) und D (0 | 2 | 3) spannen eine Pyramide auf. Gesucht ist deren Volumen.
Zunächst werden die Koordinaten von drei Vektoren festgelegt, die die Pyramide aufspannen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 2-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 4-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Damit kann nun die obige Formel verwendet werden:

$$
\begin{aligned}
V_{\text{Pyramide}} &= \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{AB} \circ (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right| \\
&= \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-1) - (-3) \cdot 2 \\ (-3) \cdot 1 - 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= \frac{1}{6} \cdot |(-3) \cdot 6 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 0| = \frac{1}{6} \cdot |(-12)| = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2\,[\text{VE}]
\end{aligned}
$$

Gauß-Algorithmus

Lineares Gleichungssystem

Ein System von mindestens zwei Gleichungen, die in Zusammenhang stehen und in denen die gleichen Unbekannten nur in erster Potenz vorkommen, wird als **lineares Gleichungssystem** bezeichnet. Beispiel (es ist üblich, die Gleichungen mit römischen Zahlen zu nummerieren):

$$\begin{array}{rr} \text{I} & 3x + 2y - 3z = 3 \\ \text{II} & -1x - 4y + 7z = -1 \\ \text{III} & 2x + 1y + 2z = 5 \end{array}$$

Ein lineares Gleichungssystem kann entweder

- genau eine Lösung haben,
- keine Lösung haben oder
- unendlich viele Lösungen haben.

Gauß-Algorithmus

Für die Anwendung des Gauß-Algorithmus wird das Gleichungssystem in Form einer **erweiterten Koeffizientenmatrix** dargestellt. Für obiges Beispiel sieht diese wie folgt aus:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & 3 \\ -1 & -4 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \end{array}$$

Mithilfe des Gauß-Algorithmus wird das Gleichungssystem in die sogenannte **Dreiecksform** gebracht. Dabei sind alle Einträge unterhalb der Hauptdiagonale der Matrix null. Entsprechend der nachfolgenden Darstellung werden dafür die Einträge auf null gebracht. Dafür werden die einzelnen Zeilen oder deren Vielfache addiert/subtrahiert.

Hauptdiagonale

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & 3 \\ -1 & -4 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \end{array}$$

Dreiecksform

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{r} \\ \text{1. null} \rightarrow \\ \text{2. null} \rightarrow \\ \text{3. null} \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \end{array}$$

Liegt die erweiterte Koeffizientenmatrix in Dreiecksform vor, können die Gleichungen zeilenweise aufgelöst werden.

1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ ist die Ebenenschar $F_{a;b}: ax_1 + bx_2 + 2x_3 - 2 = 0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Ebene E schneidet die x_1-Achse bei $x_1 = 2$ und die anderen beiden Achsen bei $x_2 = 1$ und $x_3 = 1$.

1.1 Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameter- und in Koordinatenform.
[mögliches Ergebnis: $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2 = 0$] **5 BE**

1.2 Beschreiben Sie die besondere Lage der Ebenen $F_{a;b}$ im Koordinatensystem in Abhängigkeit von a und b. **3 BE**

1.3.0 Für $a = b = 1$ ergibt sich die Ebene $F_{1,1}$, im Folgenden Ebene F genannt.

1.3.1 Die Ebenen E und F schneiden sich in der Geraden h. Bestimmen Sie eine Gleichung von h.
[mögliches Ergebnis: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$] **3 BE**

1.3.2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der Ebene F mit der x_2-Achse. Zeichnen Sie die Ebenen E und F sowie die Schnittgerade h in ein Koordinatensystem. **4 BE**

1.4.0 Ferner ist die Geradenschar $g_c: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} c-1 \\ 1+c \\ -c \end{pmatrix}$ mit $c, m \in \mathbb{R}$ gegeben.

1.4.1 Zeigen Sie, dass es einen Wert für c gibt, für den die zugehörige Gerade g_c echt parallel zur Geraden h verläuft. **3 BE**

1.4.2 Untersuchen Sie die Lage der Geraden g_c zur Ebene E in Abhängigkeit von c. **4 BE**

2.0 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*
Die Wirtschaftssektoren U, V und W sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verbunden.
Es gilt die Inputmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}05 \cdot t & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}55 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 20$, $t \in \mathbb{R}$.

2.1 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*
Im 1. Quartal des Jahres produzierte Sektor U 1000 ME (Mengeneinheiten) seiner Waren und gab davon 4 % an den Markt ab. Sektor W produzierte 500 ME und Sektor V gab 10 ME an den Markt ab. Bestimmen Sie die Gesamtproduktion von Sektor V, die Marktabgabe von Sektor W sowie den passenden Wert für t. (6 BE)

2.2.0 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*
Für die folgenden Teilaufgaben gilt $t = 11$.

2.2.1 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*
Im folgenden Quartal ist die Marktabgabe $\vec{y} = (40\ 14\ 41)^T$ geplant. Berechnen Sie die Produktionszahlen der drei Sektoren für dieses Quartal. (5 BE)

2.2.2 *Aufgabe nicht mehr prüfungsrelevant nach LehrplanPLUS*
Im nächsten Quartal produziert Sektor U 1120 ME. Die Produktionsmengen von V und W verhalten sich wie 2:1. Jeder der drei Sektoren gibt mindestens 8 ME an den Markt ab. Untersuchen Sie für die Sektoren V und W, in welchem Bereich sich die jeweiligen Produktionszahlen bewegen, und geben Sie den Bereich der Marktabgabe von Sektor U an. (7 BE)

1.0 Gegeben ist die Ebenenschar $F_{a;b}: ax_1 + bx_2 + 2x_3 - 2 = 0$ mit $a,b \in \mathbb{R}$.

1.1 Aus den gegebenen Werten der Koordinaten beim Schnitt mit den Achsen können die Koordinaten der 3 Achsen-Schnittpunkte ermittelt werden, da hier jeweils die beiden anderen Koordinaten null sind:

$$\begin{aligned} x_1\text{-Achse bei } x_1 = 2 \quad &\iff \quad S_1(\,2\,|\,0\,|\,0) \\ x_2\text{-Achse bei } x_2 = 1 \quad &\iff \quad S_2(\,0\,|\,1\,|\,0) \\ x_3\text{-Achse bei } x_3 = 1 \quad &\iff \quad S_3(\,0\,|\,0\,|\,1) \end{aligned}$$

Daraus kann nun die Parametergleichung der Ebene aufstellen:

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OS_1} + r \cdot \overrightarrow{S_1S_2} + s \cdot \overrightarrow{S_1S_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } r,s \in \mathbb{R}$$

Die Koordinatenform von E kann auf die zwei üblichen Arten (Gauß, Eliminieren der Parameter) ermittelt werden. Da hier die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen gegeben sind, wird hier mit Möglichkeit 3 eine weitere für diesen Fall **sehr einfache** Methode betrachtet:

Lösungsweg 1: Gauß-Algorithmus

$$E: \vec{x} = \begin{cases} x_1 = 2 - 2r - 2s \\ x_2 = 0 + 1r + 0s \\ x_3 = 0 + 0r + 1s \end{cases} \iff \begin{aligned} -2r - 2s &= x_1 - 2 \\ r &= x_2 \\ s &= x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} & \quad\; r \quad\;\; s \\ \begin{array}{r} \text{I} \\ \Rightarrow \text{II} \\ \text{III} \end{array} & \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & x_1 - 2 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \Rightarrow \text{II}' \\ \text{III}' \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & x_1 - 2 \\ 0 & -2 & 2x_2 + x_1 - 2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} \\ 2 \cdot \text{II} + \text{I} \\ \text{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \Rightarrow \\ \text{III}'' \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & x_1 - 2 \\ 0 & -2 & 2x_2 + x_1 - 2 \\ 0 & 0 & 2x_3 + 2x_2 + x_1 - 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} \\ \\ 2 \cdot \text{III}' + \text{II}' \end{array}$$

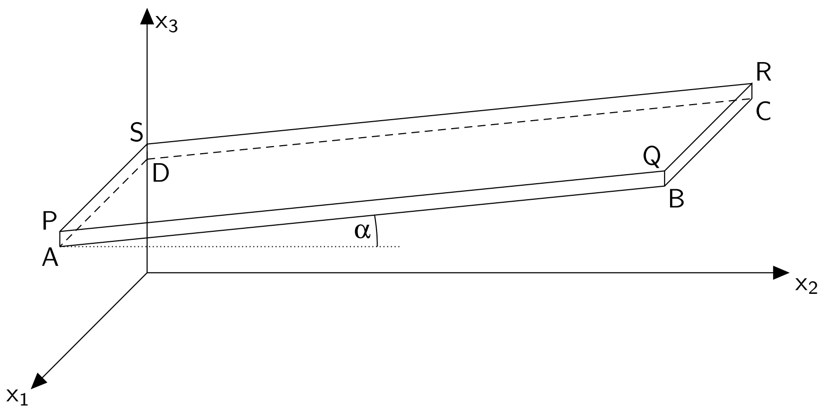
Das Gleichungssystem ist nur lösbar wenn $x_1+2x_2+2x_3-2 = 0$ erfüllt ist. Für die Ebenengleichung gilt also:

$$\underline{\underline{E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2 = 0}}$$

Lösungsweg 2: Eliminieren der Parameter

$$\text{(I)} \quad x_1 = 2 - 2r - 2s$$

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Skizze (nicht maßstabsgetreu) eines Rechteckflügels, der im Strömungskanal auf seine aerodynamischen Eigenschaften getestet werden soll. Er lässt sich wie dargestellt im $\mathbb{R}^3$ beschreiben durch die Punkte A, B, C und D, die die Flügelunterseite bilden und die Punkte P, $Q(1\,|\,8\,|\,1{,}6)$, R und S, die die Flügeloberseite bilden. Flügeloberseite und -unterseite sind parallel.



Punkt P liegt senkrecht über Punkt A, S senkrecht über D, Q senkrecht über B und R senkrecht über C. Der Flügel ist in den Punkten A, P, S und D in der x_1x_3-Ebene befestigt und zwar so, dass er in einem bestimmten Winkel α zur Horizontalen nach oben geneigt ist.
Koordinaten werden in Meter angegeben. Die Punkte A und D befinden sich genau 1 m über dem Boden, der durch die x_1x_2-Ebene beschrieben wird. Es gilt außerdem $\overline{AP} = 0{,}2\,\text{m}$ als Flügelhöhe und $\overline{AD} = 1\,\text{m}$ als Flügeltiefe.
Auf das Mitführen von Einheiten kann verzichtet werden.

1 Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte.
[Zwischenergebnis: $S(0\,|\,0\,|\,1{,}2)$; $P(1\,|\,0\,|\,1{,}2)$] **3 BE**

2 Die Flügeloberseite wird beschrieben durch die Ebene E. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform. **4 BE**

3 Ermitteln Sie die Größe des Winkels α zwischen Flügelunterseite und der Horizontalen auf zwei Nachkommastellen genau. **3 BE**

4 Bestimmen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der Flügeloberseite ebenfalls auf zwei Nachkommastellen genau. **3 BE**

5 Eine weitere wichtige Größe zur Analyse von Flügeln ist die sogenannte 25 %-Linie. Diese verläuft parallel zur Vorderkante SR auf der Oberseite des Flügels bei dem 0,25-fachen der Flügeltiefe, also näher an SR als an PQ. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden f auf der diese Linie verläuft. **4 BE**

6.0 Im Punkt $W(0{,}9\,|\,6{,}276\,|\,4)$ an der Decke des Strömungskanals befindet sich ein Sensor, der die Bewegung des Flügels analysiert.

6.1 Bestimmen Sie den Punkt K, der in der Ebene E liegt und den kürzesten Abstand zum Punkt W hat. **4 BE**

6.2 Prüfen Sie, ob der Punkt K auf der Flügeloberseite oder in der Ebene E aber außerhalb des Flügels liegt. **2 BE**

1 **Koordinaten aller Punkte**

Begonnen wird an der Ecke von Punkt D. Dieser befindet sich auf der x_3-Achse und in einer Höhe von 1 m über dem Boden, hat also die Koordinaten $\underline{\underline{D\,(\,0\,|\,0\,|\,1)}}$.

Höhe und x_2-Koordinaten von D und A sind gleich, der Punkt A ist zusätzlich um die Flügeltiefe 1 m in x_1-Richtung verschoben. Daraus ergeben sich dessen Koordinaten zu $\underline{\underline{A\,(\,1\,|\,0\,|\,1)}}$.

Die Punkte P und S befinden sich jeweils senkrecht 0,2 m über A und D, weshalb $\underline{\underline{P\,(\,1\,|\,0\,|\,1{,}2)}}$ und $\underline{\underline{S\,(\,0\,|\,0\,|\,1{,}2)}}$ gilt.

Aus den gegebenen Koordinaten $Q\,(\,1\,|\,8\,|\,1{,}6)$ ergeben sich wiederum aus der Flügeltiefe von 1 m die Koordinaten $\underline{\underline{R\,(\,0\,|\,8\,|\,1{,}6)}}$.

Da die Punkte Q und R nun jeweils senkrecht 0,2 m über B und C liegen ergeben sich schließlich deren Koordinaten zu $\underline{\underline{B\,(\,1\,|\,8\,|\,1{,}4)}}$ und $\underline{\underline{C\,(\,0\,|\,8\,|\,1{,}4)}}$.

2 **Ebenengleichung in Parameterform**

Um die Gleichung in Koordinatenform zu finden, wird zunächst eine Gleichung in Parameterform aufgestellt. Diese wird aus den Koordinaten der Punkte S, P und R ermittelt, da diese alle in der Ebene liegen:

$$\begin{aligned} E: \vec{x} = \overrightarrow{OS} + p\cdot\overrightarrow{SP} + q\cdot\overrightarrow{SR} &= \begin{pmatrix}0\\0\\1{,}2\end{pmatrix} + p\cdot\begin{pmatrix}1-0\\0-0\\1{,}2-1{,}2\end{pmatrix} + q\cdot\begin{pmatrix}0-0\\8-0\\1{,}6-1{,}2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0\\0\\1{,}2\end{pmatrix} + p\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + q\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\0{,}4\end{pmatrix} \quad \text{mit } p,q\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Ebenengleichung in Koordinatenform

Aus den Kreuzprodukt der Spannvektoren der Ebene wird der Normalenvektor der Ebene E bestimmt:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\8\\0{,}4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot 0{,}4-0\cdot 8\\0\cdot 0-1\cdot 0{,}4\\1\cdot 8-0\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-0{,}4\\8\end{pmatrix}$$

Mit dem Normalenvektor der Ebene und den Koordinaten des Punktes S, der in der Ebene liegt, kann nun zunächst die Normalenform der Ebene aufgestellt werden, die dann zur Koordinatenform umgeformt wird:

$$E: \vec{n}_E\circ(\vec{x}-\overrightarrow{OS}) = \begin{pmatrix}0\\-0{,}4\\8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x_1-0\\x_2-0\\x_3-1{,}2\end{pmatrix} = 0x_1-0{,}4x_2+8x_3-9{,}6=0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{E: -0{,}4x_2+8x_3-9{,}6=0}}$$

3 **Größe des Winkels α**

Da α der Winkel zwischen AB und der Horizontalen ist und AP in der x_1x_3-Ebene liegt, gilt:

$$\alpha + \sphericalangle PAB = 90^\circ \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha = 90^\circ - \sphericalangle PAB$$

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(1\,|\,0\,|\,-4)$, $B(1\,|\,3\,|\,-6)$, $C(0\,|\,1\,|\,-1)$ und $P_a(1\,|\,4+3a\,|\,3a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ sowie die Ebene $F: 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 14 = 0$ gegeben.

1 Die Punkte A, B und C spannen eine Ebene E auf. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene in Koordinatenform.
[mögliches Ergebnis: $E: 11x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1 = 0$] **4 BE**

2 Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und F. **5 BE**

3 Zeigen Sie, dass es ein a gibt, für welches der Punkt P_a sowohl in der Ebene E und F liegt, geben Sie diesen Wert an und schließen Sie sodann auf die Lage dieses Punktes zur Gerade s. **3 BE**

4 Bestimmen Sie einen Wert für $a > 0$, sodass die Pyramide, die von den Punkten A, B, C und P_a gebildet wird ein Volumen von $V_{ABCP_a} = 5\,\text{VE}$ hat. **4 BE**

5 Der Koordinatenursprung O, der Punkt C und der Punkt P_{-1} mit $a = -1$ spannen ein Dreieck auf. Berechnen Sie die Größen der Innenwinkel des Dreiecks auf zwei Nachkommastellen genau. **4 BE**

6 Bestimmen Sie den Wert für a, bei dem der Abstand zwischen Koordinatenursprung und Punkt P_a minimal wird. **3 BE**

Muster

1 **Ebenengleichung in Parameterform**

Um die Gleichung in Koordinatenform zu finden, wird zunächst eine Gleichung in Parameterform aufgestellt. Diese wird aus den Koordinaten der Punkte A, B und C ermittelt, da diese alle in der Ebene liegen:

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + p \cdot \overrightarrow{AB} + q \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 1-1 \\ 3-0 \\ -6-(-4) \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ -1-(-4) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } p,q \in \mathbb{R}$$

Ebenengleichung in Koordinatenform

Aus den Kreuzprodukt der Spannvektoren der Ebene wird der Normalenvektor der Ebene E bestimmt:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 - (-2) \cdot 1 \\ (-2) \cdot (-1) - 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Mit dem Normalenvektor der Ebene und den Koordinaten des Punktes A, der in der Ebene liegt, kann nun zunächst die Normalenform der Ebene aufgestellt werden, die dann zur Koordinatenform umgeformt wird:

$$E: \vec{n}_E \circ (\vec{x} - \overrightarrow{OA}) = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 0 \\ x_3 - (-4) \end{pmatrix} = 11x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{E: 11x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1 = 0}}$$

2 **Gleichung der Schnittgeraden**

<u>*Möglichkeit 1:* Ebenen in Koordinatenform</u>:

Die Gleichungen der Ebenen lauten:

$$F: 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -14 \quad (\mathrm{I})$$
$$E: 11x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \quad (\mathrm{II})$$

Es wird nun das Gauß-Verfahren verwendet:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & -14 \\ 11 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \\ \mathrm{II}' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & -14 \\ 38 & 2 & 0 & 38 \end{array}\right) \qquad 4 \cdot \mathrm{II} - 3 \cdot \mathrm{I}$$

In Gleichung II' kommen nun nur noch zwei Unbekannte vor. Dafür wird nun $x_1 = \sigma$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$ gesetzt. Eingesetzt in Gleichung II' folgt:

$$38\sigma + 2x_2 = 38 \qquad | -38\sigma$$

Muster

1.0 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \longmapsto \dfrac{6x+12}{x^2+4x+6}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der zugehörige Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f sowie die Gleichung der Asymptote von G_f. Begründen Sie, ob sich G_f für $x \to -\infty$ von oben bzw. von unten an seine Asymptote annähert. **5 BE**

1.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten aller relativen Extrempunkte von G_f. Runden Sie die Koordinaten auf zwei Nachkommastellen.
[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{-6x^2-24x-12}{(x^2+4x+6)^2}$] **7 BE**

1.3 Gegeben ist die zweite Ableitungsfunktion f'' durch die Gleichung

$$f''(x) = \frac{12(x+2)\left[x-\left(-2-\sqrt{6}\right)\right]\left[x-\left(-2+\sqrt{6}\right)\right]}{(x^2+4x+6)^3}$$ mit der Definitionsmenge $D_{f''} = \mathbb{R}$

(Nachweis nicht erforderlich!). Begründen Sie, dass die Funktion f drei Wendestellen besitzt. Lesen Sie die x-Koordinaten der Wendepunkte von G_f ab und geben Sie diese an. Bestimmen Sie die y-Koordinaten auf zwei Nachkommastellen gerundet. **4 BE**

1.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-9 \leq x \leq 5$ unter Verwendung vorliegender Ergebnisse sowie weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem. **5 BE**

1.5 Gegeben ist die Funktion $F\colon x \longmapsto 3\ln(x^2+4x+6)$ mit der Definitionsmenge $D_F = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion F eine Stammfunktion von f ist.
Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_{-4}^{0} f(x)\,dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch. **5 BE**

2.0 Die Anzahl der in Deutschland Deutschland pro Monat verschickten SMS soll näherungsweise durch die Funktion S mit der Gleichung $S(t) = \frac{a}{1{,}56e^{bt} - 1}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $a, b \in \mathbb{R}$ modelliert werden.
Dabei gibt t die Zeit ab Anfang 2013 ($t = 0$) in Monaten an und S(t) die Anzahl der zum Zeitpunkt t gesendeten SMS in Milliarden Stück pro Monat.
Bei Rechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.
Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

2.1 Aus statistischen Daten ergeben sich die Werte $S(0) = 3{,}80$ und $S(12) = 2{,}45$.
Bestimmen Sie mithilfe der beiden Angaben die Werte der Parameter a und b.
[Mögliche Ergebnisse: $a \approx 2{,}13$; $b \approx 0{,}015$] **4 BE**

2.2 Ermitteln Sie die Anzahl der pro Monat gesendeten SMS, die sich nach diesem Modell langfristig einstellen wird. **2 BE**

2.3 Zeigen Sie rechnerisch, dass nach diesem Modell die Anzahl der versendeten SMS pro Monat seit Januar 2013 stets gesunken ist. **4 BE**

2.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion S für $0 \leq t \leq 100$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Wählen Sie auf beiden Achsen einen geeigneten Maßstab. **4 BE**

2.5 Es gilt für den Wert des bestimmten Integrals: $\int_0^{84} S(t)\,dt \approx 116{,}98$ (Nachweis nicht erforderlich!).
Die folgende Tabelle gibt die Anzahl der in Deutschland in den einzelnen Kalenderjahren 2013 bis 2019 verschickten SMS in Milliarden an (Quelle: Bundesnetzagentur).

Kalenderjahr	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
SMS in Mrd.	37,9	22,3	16,6	12,7	10,3	8,9	7,9

Interpretieren Sie den Wert des angegebenen Integrals und überprüfen Sie die Realitätsnähe des Modells mithilfe der von der Bundesnetzagentur veröffentlichten Zahlen. **3 BE**

2021

1.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{6x+12}{x^2+4x+6}$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

1.1 **Nullstelle**

Wegen $D_f = \mathbb{R}$, liegen keine Definitionslücken vor. Die Nullstelle der Funktion ist dann die Nullstelle des Zählerterms:

$$\begin{aligned} && f(x) &= 0 & \\ \Rightarrow && 6x+12 &= 0 & \mid -12 \\ \iff && 6x &= -12 & \mid :6 \\ \iff && x &= -2 & \end{aligned}$$

Die Nullstelle der Funktion liegt bei $\underline{\underline{x_1 = -2}}$.

Gleichung der Asymptote

Da keine Definitionslücke vorliegt, kann auch keine senkrechte Asymptote vorliegen. Für mögliche weitere Asymptoten wird das Verhalten von $x \to \pm\infty$ betrachtet:

$$x \to -\infty: \quad f(x) = \frac{\overbrace{6x+12}^{\to -\infty}}{\underbrace{x^2+4x+6}_{\to\infty}} \to 0^- \qquad x \to +\infty: \quad f(x) = \frac{\overbrace{6x+12}^{\to \infty}}{\underbrace{x^2+4x+6}_{\to\infty}} \to 0^+$$

Der Grenzwert ergibt sich dabei, weil der Zählergrad (eins) kleiner ist als der Nennergrad (zwei). Aus dem Grenzwertverhalten ergibt sich eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $\underline{\underline{y = 0}}$.

Begründung, ob sich der Graph von oben oder unten annähert

Wie in obiger Betrachtung bereits gezeigt, gilt für $x \to -\infty: \quad f(x) \to 0^-$. Demnach nähert sich der Graph für $x \to -\infty$ von unten an die Asymptote $y = 0$ an.

1.2 **Ermitteln der ersten Ableitung**

Mithilfe der Quotientenregel wird zunächst die erste Ableitung der Funktion bestimmt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{6x+12}{x^2+4x+6} \\ f'(x) &= \left[\frac{(6x+12)' \cdot (x^2+4x+6) - (6x+12)\cdot(x^2+4x+6)'}{(x^2+4x+6)^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\ &= \frac{(6)\cdot(x^2+4x+6) - (6x+12)\cdot(2x+4)}{(x^2+4x+6)^2} && \text{(Anwendung)} \\ &= \frac{6x^2+24x+36-12x^2-24x-24x-48}{(x^2+4x+6)^2} && \text{(Zusammenfassen)} \\ &= \frac{-6x^2-24x-12}{(x^2+4x+6)^2} && \text{(Zur Kontrolle angegeben)} \end{aligned}$$

Ermitteln von Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte

Zunächst werden die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmt, welche wieder den Nullstellen des Zählerterms der Ableitung entsprechen:

$$f'(x) = 0$$

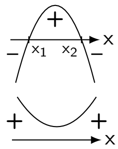
$$\Rightarrow \quad -6x^2 - 24x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1;2} = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot (-6) \cdot (-12)}}{2 \cdot (-6)} = \frac{24 \pm \sqrt{288}}{-12}$$

$$\Rightarrow \quad x_{1;2} = \frac{24 \pm \sqrt{144 \cdot 2}}{-12} = \frac{24 \pm 12 \cdot \sqrt{2}}{-12}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -2 - \sqrt{2} \approx -3{,}41 \quad \text{oder} \quad x_2 = -2 + \sqrt{2} \approx -0{,}59$$

Bei x_1 und x_2 liegen waagrechte Tangente vor. Um zu ermitteln um welche Art von Punkt es sich jeweils handelt, wird eine Monotonietabelle erstellt:

x	$x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x$	Skizzen
$f'(x)$-Zähler: $-6x^2 - 24x - 12$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$-Nenner: $(x^2 + 4x + 6)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
G_f	$\searrow$	TIP	$\nearrow$	HOP	$\searrow$	

Demnach liegt bei $x_1 \approx -3{,}41$ ein relativer Tiefpunkt und bei $x_2 \approx -0{,}59$ ein relativer Hochpunkt der Funktion. Durch Einsetzen werden die Funktionswerte bestimmt:

$$f(x_1) = f\left(-2 - \sqrt{2}\right) = \frac{6 \cdot (-2 - \sqrt{2}) + 12}{(-2 - \sqrt{2})^2 + 4 \cdot (-2 - \sqrt{2}) + 6} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \approx -2{,}12$$

$$f(x_2) = f\left(-2 + \sqrt{2}\right) = \frac{6 \cdot (-2 + \sqrt{2}) + 12}{(-2 + \sqrt{2})^2 + 4 \cdot (-2 + \sqrt{2}) + 6} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2{,}12$$

Die relativen Extrempunkte besitzen die ungefähren Koordinaten $\underline{\underline{TIP\,(-3{,}41 \mid -2{,}12)}}$ und $\underline{\underline{HOP\,(-0{,}59 \mid 2{,}12)}}$.

1.3 **Begründung und Koordinaten der Wendestellen**

Da $D_f = \mathbb{R}$ ist, besitzt der Nennerterm der Funktion f, also $x^2 + 4x + 6$ keine Nullstellen und ist demnach größer null, weil es eine nach oben geöffnete Parabel ist. Demnach ist auch der Nennerterm $(x^2 + 4x + 6)^3$ der zweiten Ableitung stets positiv. Demnach bestimmt nur der Zählerterm über das Vorzeichen der zweiten Ableitung. Da dieser bereits faktorisiert vorliegt, können die Nullstellen direkt abgelesen werden zu

$$x_3 = -2 \qquad x_4 = -2 - \sqrt{6} \approx -4{,}45 \qquad x_5 = -2 + \sqrt{6} \approx 0{,}45$$

Da der Zählerterm über das Vorzeichen der Ableitung bestimmt und vom Grad 3 ist, müssen alle drei Nullstellen einfache Nullstellen mit Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung sein. Demnach liegt an den drei ermittelten Stellen jeweils eine Wendestelle vor. Durch Einsetzen werden die Funktionswerte bestimmt:

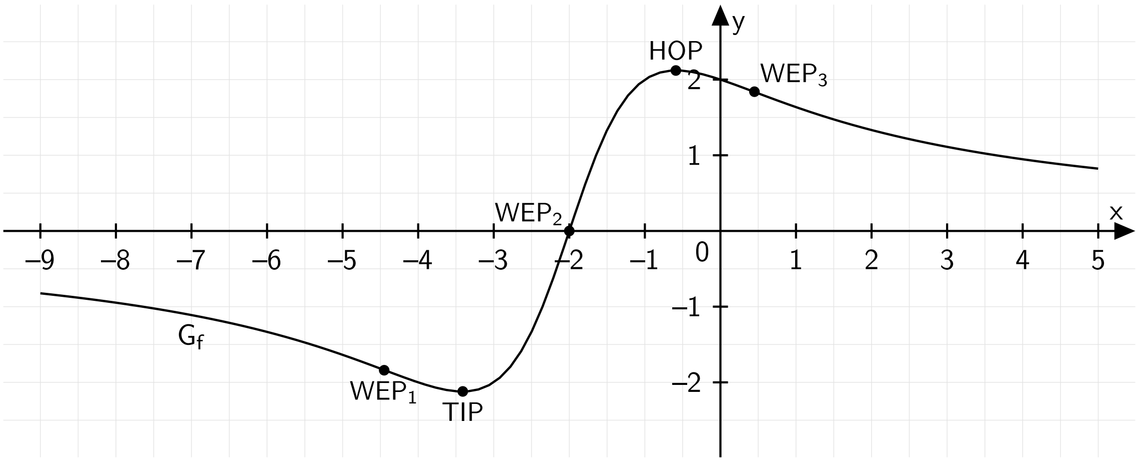
$$f(-2) = \underline{\underline{0}} \qquad f(-2 - \sqrt{6}) \approx \underline{\underline{-1{,}84}} \qquad f(-2 + \sqrt{6}) \approx \underline{\underline{1{,}84}}$$

1.4 **Graphische Darstellung**

Für die graphische Darstellung wird auf Grundlage bekannter und weiterer Werte eine Wertetabelle als Hilfestellung erstellt:

x	–9	–7	–4,45	–3,41	–2	–0,59	0,45	3	5
f(x)	–0,82	–1,11	–1,84	–2,12	0	2,12	1,84	1,11	0,82

Mithilfe dieser Werte kann nun die graphische Darstellung erfolgen:



1.5 **Nachweis der Stammfunktion**

Um zu zeigen, dass F(x) eine Stammfunktion von f(x) ist, muss $F'(x) = f(x)$ gezeigt werden. Die Ableitung wird mithilfe der Kettenregel bestimmt:

$$\begin{aligned}
F(x) &= 3\ln(x^2+4x+6) \\
F'(x) &= \left[3\cdot\frac{1}{x^2+4x+6}\cdot(x^2+4x+6)'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\
&= 3\cdot\frac{1}{x^2+4x+6}\cdot(2x+4) && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= \frac{6x+12}{x^2+4x+6} \\
&= f(x) \qquad \text{(q.e.d.)}
\end{aligned}$$

Wert des bestimmten Integrals

Das bestimmte Integral wird mithilfe der Stammfunktion F(x) berechnet:

$$\begin{aligned}
\int_{-4}^{0} f(x)dx = [F(x)]_{-4}^{0} &= \left(3\ln(0^2+4\cdot 0+6)\right) - \left(3\cdot\ln((-4)^2+4\cdot(-4)+6)\right) \\
&= 3\ln(6) - 3\ln(6) = 0
\end{aligned}$$

Interpretation des Ergebnisses

Im Intervall $-4 \leq x \leq 0$ sind die Flächenstücke die der Graph G_f und die x-Achse oberhalb und unterhalb der x-Achse einschließen gleich groß. Konkret heißt das hier, dass das Flächenstück unterhalb der x-Achse von $x = -4$ bis $x = -2$ und das Flächenstück oberhalb der x-Achse von $x = -2$ bis $x = 0$ den gleichen Flächeninhalt haben.

Aufgaben Index

Analysis

A

D

E

F

G

I

G

K

L

M

P

S

V

W

PERFEKT VORBEREITET AUF DIE ABI-PRÜFUNG FOS·BOS 13 Bayern 2022

ENTWICKELT VON PÄDAGOGEN

- An den LehrplanPLUS angepasste Original-Prüfungen
- Anschauliche, ausführliche und nachvollziehbare Lösungswege
- Miniskript mit Beispielen zzgl. Übungsteil mit ausführlichen Lösungen
- Mit Musterprüfungen im Stil der neuen Abiturprüfung
- Mit Operatoren als Handlungsanweisungen
- Inkl. neuer Anpassungen für die Prüfung 2022

Abi-Trainer für FOS · BOS 13 MNT 2022

DIGITALES COACHING

- Neue Lernplattform mit geschützem Mitgliederbereich
- Themenbezogene, kurze, verständliche Lernvideos
- Individuelles Online-Coaching
- Prüfungsvorbereitung Online
- Immer auf dem aktuellsten Stand

Alle weiteren Informationen auf www.lern.de

SCAN ME

FOS·BOS 13. Klasse | Abitur | Bayern

Bestell-Nr. : EAN 9783743000803
ISBN 978-3-7430-0080-3
€ 11,90
9 783743 000803 >

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
lernverlag
Fürstenrieder Straße 52
80686 München
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de