12.
Klasse

FOS·BOS
Fachabitur Bayern

Mathematik Technik
- Die ideale Prüfungsvorbereitung -

FOS·BOS 2022

BLICK
ins BUCH
inkl. Prüfung 2021

DIGITALES COACHING

FOS·BOS 12

FOS·BOS 12. Klasse | Fachabitur | Bayern

LehrplanPLUS

lernverlag
www.lern-verlag.de

Abiturprüfung Mathematik
Technik
FOS | BOS 12. Klasse
Bayern 2022

erstellt

für Schülerinnen und Schüler
der Beruflichen Oberschule
technischer Zweig
in Bayern

INKL.
Original-Prüfung
2021
mit Lösungen

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Vorwort

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler,
liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,

in diesem Prüfungsbuch **Abiturprüfung Mathematik Technik 2022 FOS/BOS Bayern 12. Klasse** sind die passenden Prüfungsaufgaben nach LehrplanPLUS und **eigens erstellte Musterprüfungen** enthalten. Dazu gibt es schülergerechte, lehrplankonforme und ausführliche Lösungen, die für den Schüler leicht verständlich und nachvollziehbar erstellt worden sind.
Das Prüfungsvorbereitungsbuch ist eine ideale Unterstützung während der Abschlussklasse und dient zur Vorbereitung auf eine erfolgreiche Abschlussprüfung.

Hinweise

Die Abschlussprüfung 2022 findet nach Vorgaben des *Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus* am **31.05.2022** statt und dauert **180 Minuten**. (Stand 01.09.2021) Als **Hilfsmittel** ist ein nichtprogrammierbarer elektronischer Taschenrechner und die Merkhilfe zugelassen.

Neues - Lernplattform kommt

Wir haben eine neue **Lernplattform** eingerichtet und bauen diese sukzessive auf. Hier findet man im gesicherten Mitgliederbereich hilfreiche Erklär- und Lösungsvideos zu vielen Prüfungsthemen und zu den Lösungen der Original-Prüfungen dieses Buches. Jetzt bei **https://lern.de** oder **https://abitur.guru** einen Platz sichern.
Zeit- und ortsunabhängig online für einzelne Arbeiten in der Schule oder das Fachabitur 2022 an Beruflichen Oberschulen in Bayern lernen.

Tipps

Fangen Sie rechtzeitig mit den Vorbereitungen auf die Abschlussprüfung an und arbeiten Sie kontinuierlich alte Prüfungen durch. Wiederholen Sie die einzelnen Prüfungen mehrmals, um die notwendige Sicherheit zu erlangen. Zur Lernkontrolle können Sie den Prüfungsplaner im Innenteil dieses Prüfungsvorbereitungsbuch verwenden. Üben Sie also, so oft Sie können.

Notenschlüssel

Der Notenschlüssel wird vom *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* festgelegt. In der folgenden Tabelle finden Sie den Notenschlüssel.

Notenschlüssel

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
−	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
−	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
−	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
−	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
−	1	26	20
6	0	19	0

Impressum

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
Geschäftsführer: Sascha Jankovic
Fürstenrieder Str. 52
80686 München
Amtsgericht München: HRB 205623
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de – https://www.lern-verlag.de
lernverlag, cleverlag und lern.de sind eingetragene Markenzeichen von Sascha Jankovic, Inhaber und Verleger.
Druck: Deutschland
Lösungen:
StD Roland Wittmann (Staatl. Berufliche Oberschule Neuburg a.d. Donau), Simon Rümmler, Sascha Jankovic und das Team der lern.de Bildungsgesellschaft mbH

Wir danken dem *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* für die freundliche Genehmigung, die Original-Prüfungen abdrucken zu dürfen. Die Lösungsvorschläge liegen nicht in der Verantwortung des Ministeriums.

7. ergänzte Auflage ©2021 **1. Druck**
ISBN-Nummer: 978-3-7430-0076-6
Artikelnummer:
EAN 9783743000766

Aktuelles Rund um die Prüfung 2022 und diesem Buch

Als kleiner Verlag schreiben wir für alle Schüler:innen nachvollziehbare, verständliche und ausführliche Lösungen zu den Original-Prüfungen und versuchen unsere Titel auch während des Schuljahres immer aktuell zu halten. Da wir seit über 20 Jahren individuelle Lernförderung durchführen, stehen bei uns alle Schüler:innen an erster Stelle, wenn es um Fragen rund um das Buch, Verständnisprobleme bei dem ein oder anderen Thema oder Wünsche geht.
Egal ob es um übersehene Rechtschreibfehler, Rechenfehler oder auch Wünsche von Lehrer:innen oder Schüler:innen geht, wir setzen uns sofort hin und versuchen Gewünschtes umzusetzen. Es kostet niemanden etwas, und alle profitieren davon, auch wenn wir Mehrarbeit durch diesen kostenlosen Service haben.

Wir erreichen Sie uns am besten?

Schreiben Sie uns eine E-Mail an **kontakt@lern-verlag.de**

Schreiben Sie uns eine Nachricht, schicken Sie ein Foto von der betroffenen Seite. Wir prüfen, ändern und veröffentlichen bei Bedarf im kostenlosen Downloadbereich des lernverlags die durchgeführten Änderungen.

WhatsApp-Business
+49 89 54 64 52 00

Sie können uns gerne unter der selben Nummer anrufen.

Digitales zu diesem Buch

Unter **https://lern.de** bauen wir gerade eine Lernplattform auf.
Du suchst ein Video über Polynomdivision oder Vektoren und bekommst aktuell auf anderen Plattformen 50 Videos mit unterschiedlichen Erklärungen angezeigt? Das soll sich ändern. Ein Begriff und maximal 3 Videos, die zusammenhängen, sollen angezeigt werden.
Wir arbeiten unter Hochdruck daran, kurze animierte Erklärvideos, passend zum Unterrichtssoff und „**ON-TOP**“ Lösungsvideos zu den Original-Prüfungen zu erstellen.
Schau öfters einmal vorbei oder melde dich am besten zu unserem **Newsletter** an, der **maximal zweimal pro Monat** verschickt wird.

Änderungen/Hinweise in dieser Neuauflage 2021/2022 - ISBN: 978-3-7430-0076-6

- Aus pädagogischen Gründen und zu Übungszwecken wurden keine Kürzungen durchgeführt
- Aktuelles erstellt; Downloadbereich Verlagsseite überarbeitet
- Diese ergänzte Auflage mit 298 Seiten ist durch die Original-Prüfung 2021 mit Lösungen und ohne Kürzungen noch umfangreicher als die Vorauflage mit 260 Seiten
- **Original-Prüfung 2021 inkl. ausführlichen Lösungen eingefügt**

Unsere Autoren

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Technik Fachabitur**:
StD Roland Wittmann (Neuburg a. d. Donau); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Technik Abitur**:
StD Roland Wittmann (Neuburg a. d. Donau); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Nichttechnik Fachabitur**:
StR Verena Reffler (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Nichttechnik Abitur**:
StD Dr. Michael Fuchs (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Alle Prüfungsteile, die identisch in Nichttechnik und Technik abgeprüft werden, sind dementsprechend doppelt korrigiert.

Miniskript und Übungsaufgaben:
StD Dr. Michael Fuchs (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Musterprüfungen Fachabitur und Abitur:
Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Übungsaufgaben im Miniskript:
Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Die Autoren wünschen viel Erfolg bei der **Abschlussprüfung 2022**.

Inhaltsverzeichnis

MINISKRIPT - Analysis **Seite**

Polynome . . . 7
Nullstellen quadratischer Gleichungen mit Parameter . . . 14
Symmetrie . . . 25
Extrema und Monotonie . . . 26
Wendepunkte und Krümmungsverhalten . . . 28
Tangenten . . . 29
Integrale . . . 30
Aufstellen von Funktionsgleichungen (Steckbriefaufgaben) . . . 32
Optimierung . . . 34
Exponentialfunktionen . . . 37
Logarithmen . . . 50

MINISKRIPT - Analytische Geometrie

Vektoren . . . 52
Gauß-Algorithmus . . . 60
Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren . . . 64
Geraden und Ebenen . . . 69
Lagebeziehungen . . . 75

ÜBUNGSTEIL - Analysis

Kurvendiskussion/Steckbriefaufgaben . . . 86
Optimierungsaufgaben . . . 112
Anwendungsaufgaben . . . 123

ÜBUNGSTEIL - Analytische Geometrie

Original-Prüfung FOS12 MT 2018 Analytische Geometrie-Teil . . . 140

Musterprüfung . . . 152

Original-Prüfung FOS12 MT 2019 . . . 195

Original-Prüfung FOS12 MT 2020 . . . 229

Original-Prüfung FOS12 MT 2021 . . . 261

Operatoren

Operatoren sind bestimmte Handlungsanweisungen, die sicherstellen, dass bei bestimmten Aufgabenstellungen stets das Gleiche verstanden und umgesetzt wird. In der folgenden Tabelle haben wir Ihnen die gängigsten Operatoren aufgelistet und die entsprechende Bedeutung dazu hingeschrieben.

Operator	Bedeutung für den Lösungsansatz
berechnen Sie	Sie berechnen das Ergebnis und die Lösungswege müssen nachvollziehbar und vollständig sein.
bestimmen bzw. ermitteln Sie	Sie berechnen das Ergebnis oder beschreiben das Ergebnis durch die in der Angabe vorhandenen Informationen.
begründen Sie	Sie begründen durch die Informationen in der Angabe ihr Ergebnis und bestätigen durch Herleitungen Ihre Schlussfolgerungen.
beweisen, zeigen Sie	Das Ergebnis wird im gegebenen Sachverhalt bewiesen, eventuell auch durch eine Herleitung.
entscheiden Sie	Es werden mehrere Alternativen angeben, und Sie entscheiden sich für eine.
erläutern Sie	Sie geben die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts anhand von Beispielen wieder.
interpretieren Sie	Sie analysieren die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts wieder und interpretieren diese.
nennen Sie, geben Sie an	Sie nennen Fakten oder Sachverhalten ohne diese wiederzugeben.
prüfen Sie	Sie prüfen den gegebenen Sachverhalt auf Wahrheit.
untersuchen Sie	Sie untersuchen den Sachverhalt, berechnen ein Ergebnis und arbeiten Merkmale heraus.
skizzieren Sie	Sie stellen den Sachverhalt vereinfacht und übersichtlich dar.
zeichnen Sie	Sie erstellen eine exakte grafische Darstellung des Sachverhaltes.

Hinweis zur Prüfung 2022

Sonderregelung für die Abiturprüfung 2022 an der FOSBOS:
Nicht prüfungsrelevant (Stand: 18.06.2021):

- Aus LB 3: Kurvendiskussion von Funktion der Form $x \mapsto f(x) \cdot e^{g(x)} + y_0$ aber: Produkt-/Ketten- und Quotientenregel sollen im Mathematik Additum behandelt werden
- Aus LB 4: Stammfunktionen für Funktionen der Form $x \mapsto a \cdot e^{c \cdot (x-d)} + y_0$ und $x \mapsto h(e^x)$; h ist dabei eine ganzrationale Funktion vom Grad höchstens zwei

Bitte fragen Sie bzgl. Änderungen bei Ihrer Lehrkraft nach!

Polynome

Liebe Schülerinnen und Schüler,
die nachfolgende Übersicht zu den ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen) ist eine enorm wichtige Grundlage für viele Themen der Abschlussprüfung.
Versuchen Sie deshalb bitte, die Übersicht auf „**Verständnis**" zu lernen und in unterschiedlichen Abständen immer wieder zu wiederholen.

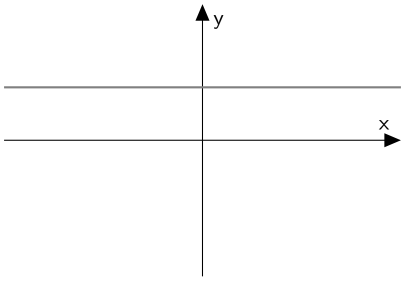
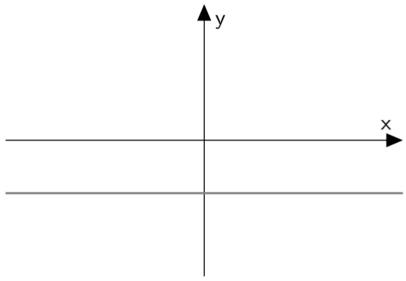
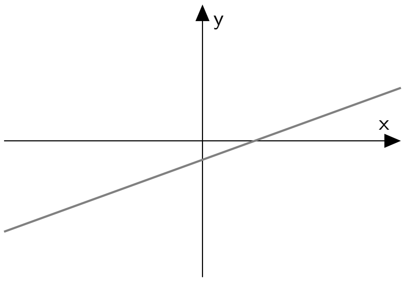
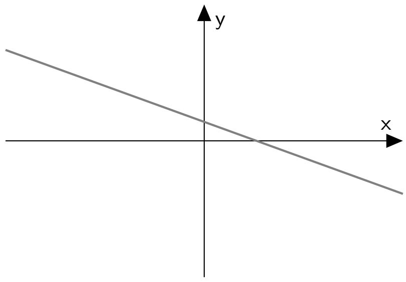
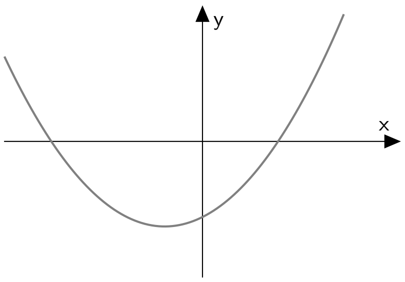
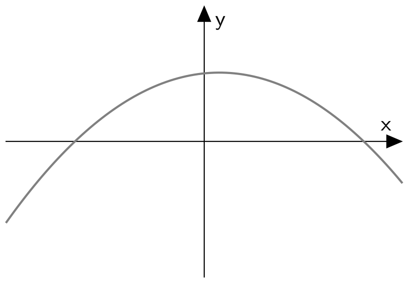
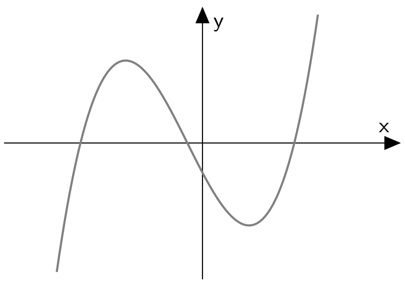
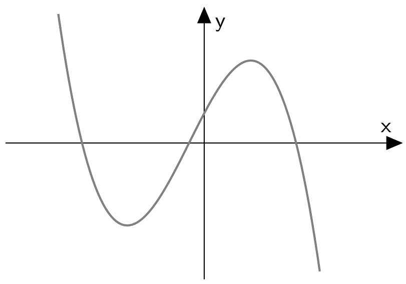
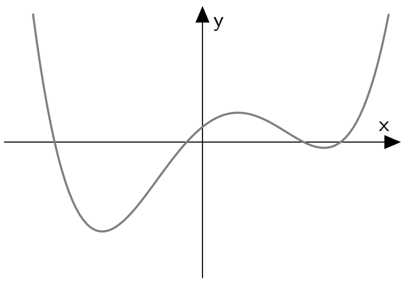
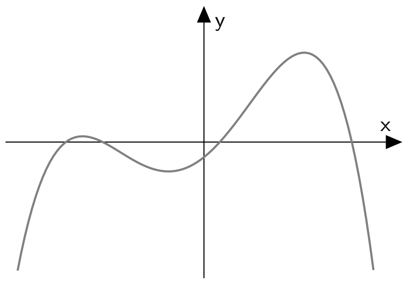
Nachfolgend ein kleiner „Fahrplan" zum Lernen der Übersicht.

- **Prägen** Sie sich als erstes am besten die Spaltenüberschriften **ein**.
- **Lernen** Sie jetzt die „**Namen**" der einzelnen Funktionstypen (diese sind übrigens identisch mit den dazugehörigen Gleichungstypen!). Hierzu sei angemerkt, dass es einen grundlegenden Unterschied zwischen Funktionen und dazugehörigen Gleichungen gibt!
    - Mit Funktionen werden die zu den Variablen (häufig x) gehörenden „y-Werte", „Steigungswerte" und „Krümmungswerte" definiert bzw. berechnet.
    - Funktionen kann man ableiten.
    - Nur Gleichungen kann man LÖSEN. Hierzu benötigt man entsprechende „**Werkzeuge**".
- **Beachten** Sie dabei die **Definition** der **Koeffizienten** $(a, b, c, ...)$. Auch hier ist auffallend, dass bis auf die konstanten Funktionen der sogenannte „Leitkoeffizient" a niemals null sein darf. Dies ist „logisch", da ja der „namensgebende" Bestandteil des Funktionsterms nicht fehlen darf. Koeffizienten sind sogenannte „**Nebenwirker**", die neben den Variablen (häufig x) für die entsprechenden Funktionswerte „mitverantwortlich" sind.
- **Lernen** Sie jetzt die **Graphentypen**, die zu den verschiedenen Funktionstypen gehören.
    - Der Leitkoeffizient (a) gibt dabei an, wohin der dazugehörige Graph für große y-Werte verläuft. Ist der Leitkoeffizient positiv (> 0) verläuft der dazugehörige Graph nach rechts oben, ist er negativ (< 0) nach rechts unten. Einzig bei den konstanten Funktionen verlaufen die Graphen für positive Leitkoeffizienten „über"– bzw. „unterhalb der x-Achse".
- Abschließend **lernen** Sie die **Gleichungstypen** und dazugehörigen „**Werkzeuge**".

  Verlieren Sie hier bitte nicht die Geduld, es lohnt sich für viele spätere Themen. Und keine Angst, es sind **nur sechs** verschiedene „**Werkzeuge**"!

Die Autoren, V. Reffler, Dr. M. Fuchs, S. Rümmler, S. Jankovic und das Team von lern.de

Funktionstyp und allgemeine Funktionsgleichung	dazugehörige Gleichungen und „Werkzeuge“ zum Lösen
Konstante **Funktion** $f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ Funktionsgrad: 0	*Konstante* Funktions**gleichung** $a = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$ Keine „Werkzeuge“ notwendig
Lineare **Funktion** $f(x) = ax + b$ mit $a; b \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 1	*Lineare* Funktions**gleichung** $ax + b = 0$ mit $a; b \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Äquivalenzumformung
Quadratische **Funktion** $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a; b; c \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 2	*Quadratische* Funktions**gleichung** $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a; b; c \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Ausklammern ($c = 0$) - Radizieren ($b = 0$) - „Mitternachtsformel“ (vollständige Gleichung)
Kubische **Funktion** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a; b; c; d \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 3	*Kubische* Funktions**gleichung** $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit $a; b; c; d \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Ausklammern ($d = 0$) - Polynomdivision (zum Vereinfachen der Funktion)
(Polynom)**Funktion** *4. Grades* $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $a; b; c; d; e \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 4	Funktions**gleichung** *4. Grades* $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ mit $a; b; c; d; e \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Ausklammern ($e = 0$) - Polynomdivision (zum Vereinfachen der Funktion) - Substitution ($b = 0 \ \wedge \ d = 0$)

mögliche Graphentypen für a > 0	**mögliche** Graphentypen für a < 0
 Parallele **Gerade** über der x-Achse	 Parallele **Gerade** unter der x-Achse
 Steigende **Gerade**	 Fallende **Gerade**
 Nach oben geöffnete **Parabel**	 Nach unten geöffnete **Parabel**
 „N-Form“	 „S-Form“
 „W-Form“	 „M-Form“

Aufgaben - Polynome

1 Versuchen Sie diese Aufgabe ohne Zuhilfename der Übersicht, sondern mit dem Wissen was Sie gelernt haben zu bearbeiten.

a) Ordnen Sie jedem „Werkzeug“ alle zugehörigen Gleichungstypen mit jeweiligen Eigenschaften zu (siehe Beispiel). Die Zahl in Klammern gibt die Anzahl der verschiedenen Gleichungstypen zu jedem „Werkzeug“ wieder.
Äquivalenzumformung (1); Ausklammern (3); Mitternachtsformel (1); Radizieren (1); Polynomdivision (2); Substitution (1)

b) Geben Sie zu jedem Gleichungstyp eine mögliche Gleichung an.

Beispiel:
Mitternachtsformel: quadratische Gleichung (vollständige Gleichung); Bsp: $3x^2 - 4x + 1 = 0$

2 Um sicherer im Umgang mit den „Werkzeugen“ zu werden, finden Sie nachfolgend zu jedem „Werkzeug“ einige Gleichungen die entsprechend zu lösen sind.

a) Äquivalenzumformungen
I) $2x - 4 = 0$ II) $7x + 2 = 0$ III) $x - 3 = 0$ IV) $-5x - 4 = 0$

b) Radizieren
I) $x^2 - 4 = 0$ II) $4x^2 - 9 = 0$ III) $2x^2 + 2 = 0$ IV) $-x^2 + 3 = 0$

c) Mitternachtsformel
I) $2x^2 - 4x - 6 = 0$ II) $-3x^2 - 12x - 12 = 0$ III) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{27} = 0$
IV) $-x^2 + 2x - \frac{5}{2} = 0$

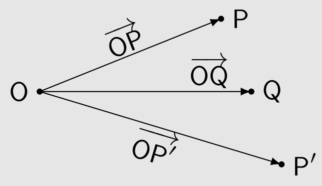
d) Substitution
I) $2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$ II) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ III) $0{,}5x^4 - 1{,}345x^2 + 0{,}845 = 0$

e) Ausklammern und Polynomdivision
Mithilfe beider „Werkzeuge“ kann die Gleichung zur quadratischen Gleichung vereinfacht werden, für welche die entsprechenden „Werkzeuge“ zur kompletten Lösung verwendet werden können. Um die Gleichung per Polynomdivision vereinfachen zu können ist es notwendig eine Nullstelle zu kennen, die „erraten“ werden muss. Geeignete Werte für das Erraten der Nullstelle sind dabei meist kleine ganze Zahlen wie $-5; -4; \ldots; 4; 5$ etc.
I) $2x^4 + 2x^3 - 4{,}5x^2 - 4{,}5x = 0$ II) $3x^4 - 7{,}5x^3 - 21x^2 + 12x = 0$
III) $x^4 - 3{,}7x^3 - 6{,}2x^2 - 1{,}5x = 0$

Besondere Ortsvektoren - Spiegelpunkt bezüglich eines Punktes

Wird ein Punkt P an einem Punkt Q gespiegelt, so gilt für den Ortsvektor des Spiegelpunktes P′:

$$\overrightarrow{OP'} = 2 \cdot \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$



Beispiel

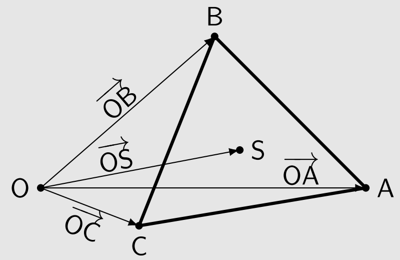
Wird der Punkt P (3 | − 4 | 1) am Punkt Q (0 | 3 | − 5) gespiegelt, erhält man den Punkt P′. Gesucht sind dessen Koordinaten.

$$\overrightarrow{OP'} = 2 \cdot \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 3 \\ 2 \cdot 3 - (-4) \\ 2 \cdot (-5) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ -11 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P' (-3 \,|\, 10 \,|\, -11)$$

Besondere Ortsvektoren - Schwerpunkt eines Dreiecks

Für den Ortsvektor des Schwerpunktes S eines Dreiecks ABC gilt:

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$



Beispiel

Gesucht sind die Koordinaten des Schwerpunktes S des Dreiecks, welches durch die Punkte A (1 | − 2 | 4), B (3 | 2 | 5) und C (− 3 | 1 | − 2) gebildet wird.

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 + 3 - 3 \\ -2 + 2 + 1 \\ 4 + 5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot 1 \\ \frac{1}{3} \cdot 1 \\ \frac{1}{3} \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S \left(\frac{1}{3} \,\middle|\, \frac{1}{3} \,\middle|\, \frac{7}{3} \right)$$

Skalarprodukt

Bildet man das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt sich ein Skalar (Zahl). Das Skalarprodukt wird mit dem Zeichen $\circ$ angezeigt und kann im $\mathbb{R}^3$ wie folgt berechnet werden:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Rechenregeln für das Skalarprodukt

- Kommutativgesetz: $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$
- Assoziativgesetz (Skalar $s \in \mathbb{R}$): $(s \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = s \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = \vec{a} \circ (s \cdot \vec{b})$
- Distributivgesetz: $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$

Anwendungen des Skalarprodukts

Für den **Betrag** eines Vektors im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Für den **Winkel** φ zwischen zwei Vektoren gilt:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \qquad (\text{für } 0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ)$$

Wegen $\cos(90^\circ) = 0$ folgt daraus insbesondere:
Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren gleich **null**, so stehen diese **orthogonal** (senkrecht) zueinander.

Beispiele

1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Gesucht ist das Resultat des Skalarprodukts $\vec{a} \circ \vec{b}$ und $\vec{a} \circ \vec{c}$, sowie der exakte Wert der Beträge $|\vec{b}|$ und $|\vec{c}|$.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 3 - 4 + 20 = 19$$

$$\vec{a} \circ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = -3 - 2 - 8 = -13$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\vec{b} \circ \vec{b}} = \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 4 + 25} = \sqrt{38}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c} \circ \vec{c}} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$

Ebenengleichung in Koordinatenform

Die Koordinatenform einer Ebenengleichung lautet allgemein:

$$E\colon a\cdot x_1 + b\cdot x_2 + c\cdot x_3 + d = 0$$

Dabei dürfen die Koeffizienten a, b und c nie gleichzeitig null sein.

Umrechnung Parameterform zu Koordinatenform

Für die Umrechnung gibt es drei Möglichkeiten, die an nachfolgendem Beispiel gezeigt werden sollen:

- Gauß-Algorithmus
- Eliminieren der Parameter
- Normalenvektor/Normalenform

Die Koeffizienten a, b und c sind dabei die Koordinaten des Normalenvektors:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E\colon a\cdot x_1 + b\cdot x_2 + c\cdot x_3 + d = 0$$

Beispiel

Als Beispiel wird wieder die Ebene E betrachtet, in welcher die Punkte $A\,(1\,|\,0\,|\,0)$, $B\,(4\,|\,-2\,|\,2)$ und $C\,(3\,|\,1\,|\,0)$ liegen. Eine Parameterform der Gleichung wurde bereits bestimmt zu $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Gesucht ist nun eine Gleichung der Ebene in Koordinatenform.

Gauß-Verfahren

$$E\colon \vec{x} = \begin{cases} 1 + 3\lambda + 2\mu = x_1 \\ -2\lambda + \mu = x_2 \\ 2\lambda = x_3 \end{cases} \iff \begin{aligned} 3\lambda + 2\mu &= x_1 - 1 \\ -2\lambda + \mu &= x_2 \\ 2\lambda &= x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \lambda & \mu \end{array} \\ \Rightarrow \begin{array}{r} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} & \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & x_1 - 1 \\ -2 & 1 & x_2 \\ 2 & 0 & x_3 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \text{II}' \\ \text{III}' \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & x_1 - 1 \\ 0 & 7 & 3x_2 + 2x_1 - 2 \\ 0 & -4 & 3x_3 - 2x_1 + 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \\ 3\cdot\text{II} + 2\cdot\text{I} \\ 3\cdot\text{III} - 2\cdot\text{I} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \text{III}'' \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & x_1 - 1 \\ 0 & 7 & 3x_2 + 2x_1 - 2 \\ 0 & 0 & 21x_3 - 14x_1 + 14 + 12x_2 + 8x_1 - 8 \end{array}\right) \quad 7\cdot\text{III}' + 4\cdot\text{II}'$$

3. Schließlich kann der Abstand zwischen A und S als minimaler Abstand d des Punktes A von g berechnet werden:

$$d = |\overrightarrow{AS}| = \left|\begin{pmatrix} 4-1 \\ 2{,}5-1 \\ 3{,}5-2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+1{,}5^2+1{,}5^2} = \sqrt{13{,}5}$$

Lösung mit Skalarprodukt
Auch hier wird den angegebenen Schritten gefolgt.

1. Da der Punkt L auf der Geraden g liegt, lauten dessen allgemeine Koordinaten in Abhängigkeit des Parameters λ: $L\,(3-2\lambda\,|\,4+3\lambda\,|\,4+\lambda)$

2. Gemäß der Merkregel „Spitze minus Fuß“ werden die allgemeinen Koordinaten von $\overrightarrow{AL}$ bestimmt:

$$\overrightarrow{AL} = \begin{pmatrix} (3-2\lambda)-1 \\ (4+3\lambda)-1 \\ (4+\lambda)-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\lambda \\ 3+3\lambda \\ 2+\lambda \end{pmatrix}$$

3. Damit kann das Skalarprodukt berechnet und gleich null gesetzt werden:

$$\overrightarrow{AL} \circ \vec{u}_g = \begin{pmatrix} 2-2\lambda \\ 3+3\lambda \\ 2+\lambda \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -2\cdot(2-2\lambda)+3\cdot(3+3\lambda)+1\cdot(2+\lambda) = 0$$

4. Auflösen der Gleichung ergibt einen Wert für λ:

$$\begin{aligned} & -2\cdot(2-2\lambda)+3\cdot(3+3\lambda)+1\cdot(2+\lambda) = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & -4+4\lambda+9+9\lambda+2+\lambda = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & 7+14\lambda = 0 \qquad |-7 \\ \Longleftrightarrow\quad & 14\lambda = -7 \qquad |:14 \\ \Longleftrightarrow\quad & \underline{\lambda = -\tfrac{1}{2}} \end{aligned}$$

5. Durch Einsetzen kann nun $\overrightarrow{AL}$ konkret berechnet werden:

$$\overrightarrow{AL} = \begin{pmatrix} 2-2\cdot(-\frac{1}{2}) \\ 3+3\cdot(-\frac{1}{2}) \\ 2+(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

6. Schließlich kann der Abstand d als Betrag des Vektors $\overrightarrow{AL}$ bestimmt werden:

$$d = |\overrightarrow{AL}| = \sqrt{3^2+1{,}5^2+1{,}5^2} = \sqrt{9+2{,}25+2{,}25} = \sqrt{13{,}5}$$

Aufgabe 1 - Kurvendiskussion/Steckbriefaufgabe: FOS12 MNT 2013, AI 2
Themen: Krümmungsverhalten, Graphische Darstellung

1.0 Von einer ganzrationalen Funktion k mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$ ist folgendes bekannt:

$k''(x) > 0$ für $x \in]-\infty; -2[$ sowie für $x \in]0; \infty[$

$k''(x) < 0$ für $x \in]-2; 0[$

$k'(0) = 0 \wedge k''(0) = 0 \wedge k'''(0) \neq 0$

1.1 Beschreiben Sie die daraus resultierenden Eigenschaften des Graphen G_k in Worten. **5 BE**

1.2 Fertigen Sie mithilfe der bisherigen Angaben und Ergebnisse eine aussagekräftige Skizze von G_k an, wenn der Graph durch den Ursprung verläuft, einen Tiefpunkt bei $x = -3$ besitzt und die Funktion k den Grad 4 hat. **3 BE**

Lösungsvorschlag A1 Kurvendiskussion/Steckbriefaufgabe: FOS12 MNT 2013, AI 2

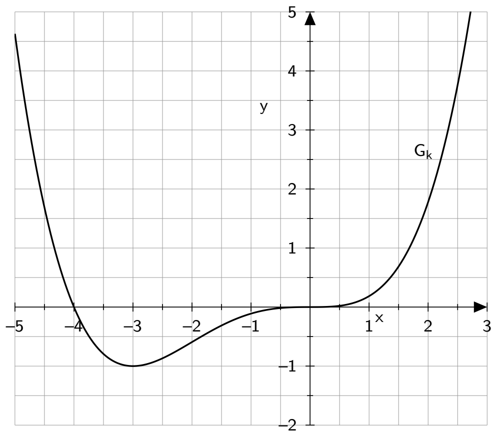
1.0 Untersucht wird das Verhalten einer ganzrationalen Funktion k.

1.1 **Eigenschaften des Funktionsgraphen**

Aus den ersten beiden gegebenen Eigenschaften lässt sich das Krümmungsverhalten von k(x) ableiten. Der Graph G_k von k ist linksgekrümmt für $x \in \,]-\infty; -2]$ und $x \in [0; \infty[$ und er ist rechtsgekrümmt für $x \in [-2; 0]$. Der letzten gegebenen Eigenschaft kann man entnehmen, dass an der Stelle $x = 0$ ein Terrassenpunkt ist.
Es liegen zwei Wendepunkte bei $x = -2$ und $x = 0$ vor.

1.2 **Skizzieren des Graphen**

Ausgangspunkte der Skizze ist der Ursprung. Hier liegt auch der Terrassenpunkt und der Tiefpunkt bei $x = -3$. Da der Tiefpunkt natürlich tiefer liegt als der Terrassenpunkt, liegt er unterhalb der x-Achse. Die y-Werte in der Skizze sind nicht gefragt und können vernachlässigt werden. Im Tiefpunkt ist der Graph linksgekrümmt, dies stimmt auch mit den gegebenen Eigenschaften überein. Im Punkt $x = -2$ findet ein Krümmungswechsel statt und der Graph ist im Intervall $[-2; 0]$ rechtsgekrümmt. Im Punkt $x = 0$ liegt der Terrassenpunkt und hier findet wieder ein Krümmungswechsel statt und der Graph ist im Intervall $[0; \infty[$ linksgekrümmt.



Der Schnittpunkt zwischen Gerade h und Ebene E_{ABS} entspricht nun dem Punkt, wo der Lichtstrahl auf die Ebene trifft. Um diesen zu bestimmen, werden die beiden Gleichungen gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix}0\\30\\0\end{pmatrix} + \omega \cdot \begin{pmatrix}-15\\15\\27\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}27\\-3\\3\end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix}-30\\19\\9\end{pmatrix}$$

Zeilenweise ergeben sich so drei Gleichungen die zunächst umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
&(I) & 2 + 0 \cdot \tau - 15 \cdot \omega &= 27 - 30\sigma & \\
&\Longleftrightarrow & 2 - 15\omega &= 27 - 30\sigma & |+30\sigma - 2 \\
&\Longleftrightarrow & -15\omega + 30\sigma &= 25 & \\
&(II) & 1 + 30 \cdot \tau + 15 \cdot \omega &= -3 + 19 \cdot \sigma & |-19\sigma - 1 \\
&\Longleftrightarrow & 30\tau + 15\omega - 19\sigma &= -4 & \\
&(III) & 3 + 0 \cdot \tau + 27 \cdot \omega &= 3 + 9 \cdot \sigma & |-3 - 9\sigma \\
&\Longleftrightarrow & 27\omega - 9\sigma &= 0 &
\end{aligned}$$

Da Gleichung (I) und (III) kein τ enthält, können diese zunächst gesondert betrachtet werden:

$$\begin{aligned}
&(III) & 27\omega - 9\sigma &= 0 & |\cdot \frac{10}{3} \\
&\Longleftrightarrow & 90\omega - 30\sigma &= 0 & \\
&(I)+(III) & -15\omega + 30\sigma + 90\omega - 30\sigma &= 25 & \\
&\Longleftrightarrow & 75\omega &= 25 & |:75 \\
&\Longleftrightarrow & \underline{\omega = \frac{1}{3}} & & \\
&\text{Einsetzen in (III)} & 27 \cdot \frac{1}{3} - 9\sigma &= 0 & \\
&\Longleftrightarrow & 9 - 9\sigma &= 0 & |-9 \\
&\Longleftrightarrow & -9\sigma &= -9 & |:(-9) \\
&\Longleftrightarrow & \underline{\sigma = 1} & &
\end{aligned}$$

Beide Werte können nun in Gleichung 2 eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}
&(II) & 30\tau + 15 \cdot \frac{1}{3} - 19 \cdot 1 &= -4 & \\
&\Longleftrightarrow & 30\tau - 14 &= -4 & |+14 \\
&\Longleftrightarrow & 30\tau &= 10 & |:30 \\
&\Longleftrightarrow & \underline{\tau = \frac{1}{3}} & &
\end{aligned}$$

Gemäß der Gleichung der Ebene E_{ABS} entspricht τ den Verlauf von Punkt A Richtung B und ω dem Verlauf von Punkt A Richtung S. Für den Auftreffpunkt des Lichtstrahls ist $\omega > 0$ und $\tau > 0$ erfüllt. Zudem ist außerdem $\tau + \omega = \frac{2}{3} < 1$ erfüllt. Somit muss der Auftreffpunkt innerhalb des Dreiecks ABS und somit auf der gläsernen Seitenfläche ABS liegen.

Jahrgang	Analysis-Teil	Gegebene Funktion	Seite	Berechnungen
Musterprüfung	oHm AI	$f_k : x \longmapsto -\frac{1}{3}x(x-k)(x+3)$	**152**	NST
		$g : x \longmapsto \frac{1}{4}(2x^2-2x+3) \cdot e^{2x}$	**152**	NST; Monotonie; Grenzwert; Wertemenge
	oHm AII	$p(x) = -2 \cdot (x-2)^2 + 3 \wedge k(x) = x-2$	**156**	Schnittpunkte; Integral
		$f_a(x) = (ax^2+2x-1) \cdot e^{ax}$	**156**	Grenzwert; NST; Integral
	mHm AI	$f_a : x \longmapsto -x^3 + \frac{a}{4}x^2 - 3x + a$	**165**	Tangente; NST; Extrema; Integral
		$g(x) = \frac{1}{50}(-x^3+27x+46)$	**165**	Fkt. aufstellen; Krümmung
		$b(t) = 20(t+4) \cdot e^{-(t-12)^2}$	**166**	Def. Menge; Extrema
	mHm AII	$f_k(x) = x^3 - 3x^2 + kx$	**177**	Fkt. aufstellen; NST; Tangente; Wendepunkte; Integral
		$G(t) = c \cdot (t-s)^2 \cdot e^{-(t-1)}$	**177**	Fkt. aufstellen; Grenzwert; Extrema; Wendepunkte
2019	oHm A	$f'_a : x \longmapsto (x-a)^2 \cdot (x+3)$	**195**	NST
		$s : x \longmapsto e^{-x^2}$	**196**	Grenzwert
		$t : x \longmapsto e^{2x} - e^x$	**196**	Grenzwert
		$u : x \longmapsto e^{(2x)^2}$	**196**	Grenzwert
	mHm AI	$f : x \longmapsto ax^4 + bx^3 + c$	**203**	Fkt. aufstellen; Extrema; Fläche
		$h_k : x \longmapsto 2x^3 + 4kx^2 + 8x$	**203**	Symmetrie; NST
		$B(t) = 3 + \left(\frac{-1}{20}t^2 + \frac{1}{5}\right) \cdot e^{-\frac{1}{4}t+a}$	**203**	Fkt. aufstellen; Grenzwert; Monotonie
	mHm AII	$f_a : x \longmapsto (x-a)\left(x^2 - \frac{1}{4}a\right)$	**212**	NST; Tangente
		$f_4(x) = (x-4)(x^2-1)$	**212**	Integral
		$h : t \longmapsto a \cdot t^2 \cdot e^{b \cdot t} + 1$	**213**	Fkt. aufstellen; Extrema
2020	oHm A	$f_a : x \longmapsto (ax^2-1) \cdot e^{1-2x}$	**229**	NST; Grenzwert; Extrema
	mHm AI	$f_k : x \longmapsto \frac{1}{10}(x+3)^2(x-3)(x-2k)$	**236**	NST; Extrema
		$w : x \longmapsto 2{,}2x + 5{,}9$	**236**	Fläche
		$p : t \longmapsto 100 \cdot t^2 \cdot e^{a \cdot t} + 1$	**237**	Fkt. aufstellen; Wendepunkt
	mHm AII	$h : x \longmapsto \frac{1}{8} \cdot (-x^3 + 3x^2 + 9x + 5)$	**244**	Extrema; Fläche
		$f_a : x \longmapsto \frac{1}{2}x^3 + 4x \cdot x^2 + 1$ und $g_a : x \longmapsto 1 - 4a \cdot x$	**244**	NST
		$z(t) = 3 + (0{,}2t^2 - 4t + 20) \cdot e^{0{,}3t-3}$	**245**	Monotonie; Wendepunkt; Fläche

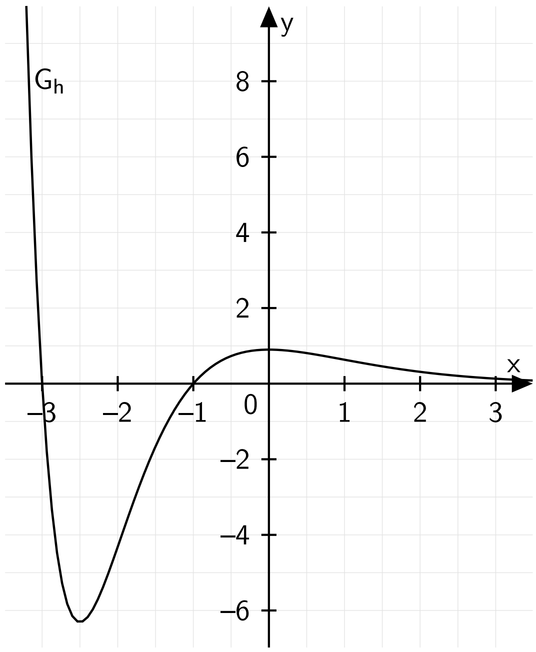
Jahrgang	Analysis-Teil	Gegebene Funktion	Seite	Berechnungen
2021	oHm A	$t\colon x \longmapsto e^x + 2$ und		
		$u\colon x \longmapsto -e^{-x} + 4$	**262**	Fkt. aufstellen
	mHm AI	$A(a) = 40a - \frac{2}{3}a^2$	**269**	Fkt. aufstellen; Extrema
		$g_a\colon x \longmapsto -\frac{1}{2}x^3 - (a-1)x^2 + (a-4)x$	**270**	Symmetrie; NST
		$g_4(x) = -\frac{1}{2}x^3 - 3x^2$	**270**	Monotonie; Fläche
		$c\colon t \longmapsto 60 \cdot e^{-kt} + 20$	**270**	Grenzwert; Fkt. aufstellen
	mHm AII	$f\colon x \longmapsto \frac{1}{4}(x^3 + 4x^2 - 4x)$	**277**	Extrema; Fläche
		$f_k\colon x \longmapsto \frac{1}{4}(x^3 - kx^2 + kx)$	**277**	Tangente; Krümmung
		$N(t) = N_0 \cdot e^t$	**278**	Fkt. aufstellen
Lösungen:		StD Roland Wittmann (Staatl. Berufliche Oberschule Neuburg a.d. Donau) und das Team der lern.de Bildungsgesellschaft mbH (lernverlag)		

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k\colon x \longmapsto -\frac{1}{3}x(x-k)(x+3)$ mit $D_{f_k} = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$.

1.1 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl, Lage und Vielfachheiten der Nullstellen von f_k. **3 BE**

1.2 Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $P(-2\,|\,2)$ auf dem Graphen der Funktion f_k liegt. **2 BE**

2.0 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion h(x) mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$.



2.1 Fügen Sie der gegebenen Abbildung eine Skizze des Graphs der ersten Ableitung $h'(x)$ im dargestellten Intervall hinzu. Achten Sie dabei besonders auf die Abszisse charakteristischer Punkte, wie beispielsweise Nullstellen. **3 BE**

2.2 Geben Sie außerdem die Bedeutung des Ausdrucks

$$\int_{-3}^{-1} h(x)dx$$

an und stellen Sie dies in der gegebenen Abbildung geeignet dar. **2 BE**

3.0 Gegeben ist die Funktion $g\colon x \longmapsto \frac{1}{4}(2x^2-2x+3)\cdot e^{2x}$ mit Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.

3.1 Prüfen Sie die Funktion auf Nullstellen. **2 BE**

3.2 Ermitteln Sie die erste Ableitung der Funktion und geben Sie damit ohne weitere Rechnung das Monotonieverhalten des Graphen von g an. **4 BE**

3.3 Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$. Geben Sie die Wertemenge der Funktion g an. **3 BE**

Muster

1.1 Die Nullstellen von f_k ermittelt man durch Nullsetzen der einzelnen Faktoren, denn der ganze Term wird null, wenn ein Faktor null ist.

$$-\frac{1}{3}x(x-k)(x+3)=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{3}x=0 \quad \text{oder} \quad (x-k)=0 \quad \text{oder} \quad (x+3)=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_1=0 \quad \text{oder} \quad x_2=k \quad \text{oder} \quad x_3=-3$$

Um die Vielfachheit der Nullstellen zu bestimmen, muss für $k\in\mathbb{R}$ eine Fallunterscheidung gemacht werden:
1. Überlegung: Für welche Werte von k fallen die Nullstellen zusammen?

1.Fall $k=0$, da $x_2=x_1$: 2 Nullstellen: eine doppelte Nullstelle bei $\underline{\underline{x_{1,2}=0}}$ und eine einfache Nullstelle bei $\underline{\underline{x_3=-3}}$

2.Fall $k=-3$, da $x_2=x_3$: 2 Nullstellen: eine einfache Nullstelle bei $\underline{\underline{x_1=0}}$ und eine doppelte Nullstelle bei $\underline{\underline{x_{2;3}=-3}}$

2. Überlegung: Für welche Werte von k fallen die Nullstellen nicht zusammen?

3.Fall $k\in\mathbb{R}\backslash\{0;-3\}$: 3 Nullstellen: drei einfache Nullstellen bei $\underline{\underline{x_1=0}}$, $\underline{\underline{x_2=k}}$ und $\underline{\underline{x_3=-3}}$.

1.2 Um den entsprechenden Wert für k zu ermitteln, setzt man die Koordinaten des Punktes $P(-2\,|\,2)$ in die Funktionsschar f_k ein.

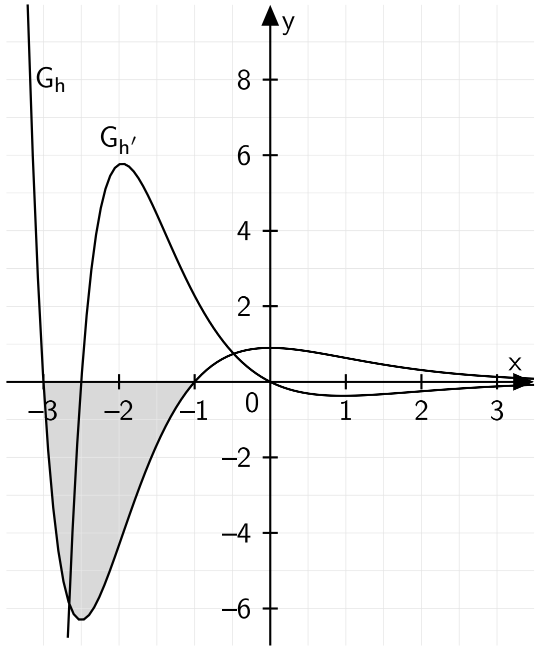
$$\begin{aligned}
& & f_k(-2) &= 2 && \text{(Ansatz)}\\
&\Longleftrightarrow & -\frac{1}{3}\cdot(-2)(-2-k)(-2+3) &= 2 && \text{(Ausmultiplizieren)}\\
&\Longleftrightarrow & \frac{2}{3}(-2-k)\cdot 1 &= 2 && \left|\cdot\frac{3}{2}\right.\\
&\Longleftrightarrow & -2-k &= \frac{2\cdot 3}{2} && |+2\\
&\Longleftrightarrow & -k &= 3+2 && |\cdot(-1)\\
&\Longleftrightarrow & k &= -5
\end{aligned}$$

Für $\underline{\underline{k=-5}}$, verläuft die Funktion f_k durch den Punkt $(-2\,|\,2)$.

2.1 Für die Darstellung der ersten Ableitung müssen folgende Informationen berücksichtigt werden, die aus der Zeichnung abgelesen werden:

- Tiefpunkt des Graphen G_h bei $x\approx-2{,}5$ $\Rightarrow$ Nullstelle von $h'(x)$
- Hochpunkt des Graphen G_h bei $x\approx 0$ $\Rightarrow$ Nullstelle von $h'(x)$
- Graph von G_h fallend für $x\leq 2{,}5$ $\Rightarrow$ $h'(x)\leq 0$ für $x\leq 2{,}5$
- Graph von G_h steigend für $-2{,}5\leq x\leq 0$ $\Rightarrow$ $h'(x)\geq 0$ für $-2{,}5\leq x\leq 0$
- Graph von G_h fallend für $x\geq 0$ $\Rightarrow$ $h'(x)\leq 0$ für $x\geq 0$

Weiterhin wird beachtet, dass der Funktionswert der ersten Ableitung umso größer (bzw. kleiner) ist, je steiler der Graph von h steigt (bzw. fällt).



2.2 Bei dem gegebenen Ausdruck handelt es sich um ein Integral, dessen Betrag der Maßzahl des Flächenstückes entspricht, das der Graph von h(x) mit der x-Achse zwischen $x = -3$ und $x = -1$ einschließt.
Markierung des Flächenstücks in Teilaufgabe 2.1.

3.1 **Nullstellen**
Da die Exponentialfunktion nie null wird, gilt für eventuelle Nullstellen:

$$\begin{aligned} & g(x) = 0 \\ \iff \quad & 2x^2 - 2x + 3 = 0 \end{aligned}$$

Es kann nun die Diskriminante des quadratischen Terms berechnet werden:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -20$$

Da die Diskriminante negativ ist, besitzt die Funktion g(x) keine Nullstellen.

3.2 **Ermitteln der ersten Ableitung**
Mithilfe von Produkt- und Kettenregel wird die erste Ableitung der Funktion berechnet:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{4}(2x^2 - 2x + 3) \cdot e^{2x} \\ g'(x) &= \frac{1}{4} \cdot \left[(2x^2 - 2x + 3)' \cdot e^{2x} + (2x^2 - 2x + 3) \cdot (e^{2x})'\right] && \text{(Ansatz)} \\ &= \frac{1}{4}\left((2 \cdot 2x - 2) \cdot e^{2x} + (2x^2 - 2x + 3) \cdot e^{2x} \cdot 2\right) && \text{(Anwendung)} \\ &= \frac{1}{4}\left((4x - 2) \cdot e^{2x} + (4x^2 - 4x + 6) \cdot e^{2x}\right) && (e^{2x} \text{ ausklammern}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x} \cdot (4x^2 + 4x - 4x + 4) \qquad \text{(Zusammenfassen)}$$
$$= (x^2 + 1) \cdot e^{2x}$$

Monotonieverhalten des Graphen ohne weitere Rechnung

Da ohne weitere Rechnung auf das Monotonieverhalten geschlossen werden soll, werden die einzelnen Terme der ersten Ableitung betrachtet. Der Term (x^2+1) beschreibt eine nach oben geöffnete, nach oben verschobene Normalparabel, die nur positive Funktionswerte annimmt. Der Exponentialterm e^{2x} ist ebenfalls stets positiv. Somit nimmt die erste Ableitung nur positive Werte an und der Graph der Funktion g ist auf dem gesamten Definitionsbereich streng monoton steigend.

3.3 **Verhalten der Funktionswerte für x $\to \pm\infty$**

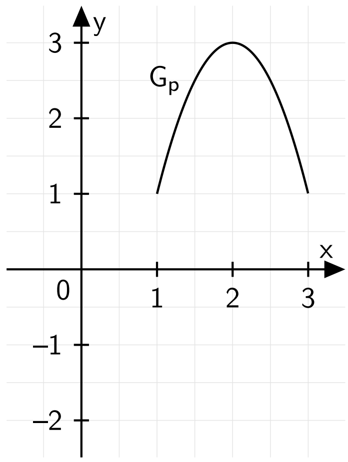
Für die Berechnung der Grenzwerte muss berücksichtigt werden, dass die Exponentialfunktion im Grenzwert stets dominiert.

$$x \to -\infty\colon\ g(x) = \frac{1}{4}\underbrace{(2x^2 - 2x + 3)}_{\to\infty} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{\to 0} \to 0 \qquad \text{(da e-Fkt dominiert)}$$
$$x \to \infty\colon\ g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4}\underbrace{(2x^2 - 2x + 3)}_{\to\infty} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{\to\infty} \to \infty$$

Wertemenge

Da die Funktion für $x \to -\infty$ gegen null und für $x \to \infty$ gegen $+\infty$ strebt, und G_g auf $\mathbb{R}$ streng monoton steigend ist, ergibt sich der Wertebereich zu $\underline{\underline{W_g =]0;\ \infty[}}$.

1.0 Nebenstehende Grafik zeigt einen Ausschnitt des Graphen der quadratischen Funktion $p(x) = -2 \cdot (x-2)^2 + 3$ mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$. Gegeben ist zusätzlich die lineare Funktion $k(x) = x - 2$ mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$.



1.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionen. **3 BE**

1.2 Bestimmen Sie rechnerisch den exakten Wert der Abszisse, an welcher die beiden Graphen denselben Anstieg haben. **3 BE**

1.3 Der Graph der quadratischen Funktion, der Graph der linearen Funktion, die x-Achse und die Gerade $x = 1$ schließen im I. Quadranten ein Flächenstück ein. Zeichnen Sie den Graph von k und die Gerade $x = 1$ in die gegebenen Abbildung ein und markieren Sie das Flächenstück. Berechnen Sie sodann die Maßzahl des Flächeninhaltes. **4 BE**

2.0 Betrachtet werden die Funktionen $f_a(x) = (ax^2+2x-1) \cdot e^{ax}$ mit der Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

2.1 Betrachten Sie den Fall $a = 0$. Was ergibt sich für die Funktion? **2 BE**

2.2 Im Folgenden soll nun $a \neq 0$ gelten.

Finden Sie jeweils alle Werte für a, die die folgenden Aussagen erfüllen.

a)Es gilt $x \to \infty$: $f_a(x) \to 0$.

b)Die Funktion $f_a(x)$ besitzt genau eine Nullstelle.

c)Die Funktion $f_a(x)$ besitzt mehrere Nullstellen.

d)Die Funktion verläuft durch den Punkt $(0 \mid -1)$.

4 BE

2.3 Für diese Teilaufgabe soll $a = 2$ gelten.
Zeigen Sie, dass $F(x) = (x^2 - \frac{1}{2}) \cdot e^{2x}$ eine Stammfunktion von $f_2(x)$ ist und berechnen Sie damit den exakten Wert des folgenden Integrals:

$$\int_0^4 f_2(x)dx$$

4 BE

Muster

1.1 **Koordinaten der Schnittpunkte**

Es werden die Schnittpunkte der beiden Funktionen gesucht. Dafür werden die Funktionsterme gleichgesetzt.

$$\begin{aligned} & & p(x) &= k(x) & \\ &\Longleftrightarrow & -2(x-2)^2+3 &= x-2 & \\ &\Longleftrightarrow & -2(x^2-4x+4)+3 &= x-2 & \\ &\Longleftrightarrow & -2x^2+8x-5 &= x-2 & \quad |-(x-2) \\ &\Longleftrightarrow & -2x^2+7x-3 &= 0 & \\ &\Longleftrightarrow & x_{1;2} &= \frac{-7 \pm \sqrt{7^2-4\cdot(-2)\cdot(-3)}}{2\cdot(-2)} & \\ &\Longleftrightarrow & x_{1;2} &= \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{-4} & \\ &\Longleftrightarrow & x_{1;2} &= \frac{-7 \pm 5}{-4} & \\ &\Longleftrightarrow & x_1 = \frac{1}{2} \quad &\text{oder} \quad x_2 = 3 & \end{aligned}$$

Eingesetzt in eine der Funktionsgleichungen ergeben sich die Funktionswerte an diesen Stellen. Zur leichteren Berechnung wird in die lineare Funktion eingesetzt:

$$k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$
$$k(3) = 3 - 2 = 1$$

Die Koordinaten der Schnittpunkte lauten $\underline{\underline{\left(\frac{1}{2} \middle| -\frac{3}{2}\right)}}$ und $\underline{\underline{(3\,|\,1)}}$.

1.2 **Ermitteln der ersten Ableitungen**

Zunächst wird die erste Ableitung der Funktionen bestimmt:

$$\begin{aligned} p(x) &= -2(x-2)^2+3 = -2(x^2-4x+4)+3 = -2x^2+8x-5 \\ p'(x) &= -2\cdot 2x+8 = -4x+8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k(x) &= x-2 \\ k'(x) &= 1 \end{aligned}$$

Wert der Abszisse mit übereinstimmender Steigung

Um den Wert der Abszisse zu bestimmen, an dem die beiden Funktionsgraphen dieselbe Steigung aufweisen, werden die Terme der ersten Ableitung gleichgesetzt:

$$\begin{aligned} & & p'(x) &= k'(x) & \\ &\Longleftrightarrow & -4x+8 &= 1 & \quad |-8 \\ &\Longleftrightarrow & -4x &= -7 & \quad |:(-4) \\ &\Longleftrightarrow & \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= \frac{7}{4}}} & \end{aligned}$$

Muster

1 **Normalenvektoren**

Um den Winkel zwischen der Dachfläche und der Grundfläche zu bestimmen, wird der Winkel zwischen den Normalenvektoren beider Flächen bestimmt. Da die Dachfläche von den Punkten F, G und S aufgespannt wird, gilt für den Normalenvektor der Dachfläche:

$$\begin{aligned}\vec{n}_{FGS} = \overrightarrow{FG} \times \overrightarrow{FS} &= \begin{pmatrix} 0-12 \\ 12-12 \\ 5-5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6-12 \\ 6-12 \\ 13-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 8 - 0 \cdot (-6) \\ 0 \cdot (-6) - (-12) \cdot 8 \\ -12 \cdot (-6) - 0 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 96 \\ 72 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Normalenvektor der Grundfläche ist der der x_1x_2-Ebene. Damit weißt dieser nur eine x_3-Komponente auf:

$$\vec{n}_{x_1x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Winkel zwischen den Normalenvektoren

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\vec{n}_{FGS} \circ \vec{n}_{x_1x_2}\right|}{\left|\vec{n}_{FGS}\right| \cdot \left|\vec{n}_{x_1x_2}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 96 \\ 72 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{0^2+96^2+72^2} \cdot \sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{72}{120 \cdot 1} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53{,}13^\circ$$

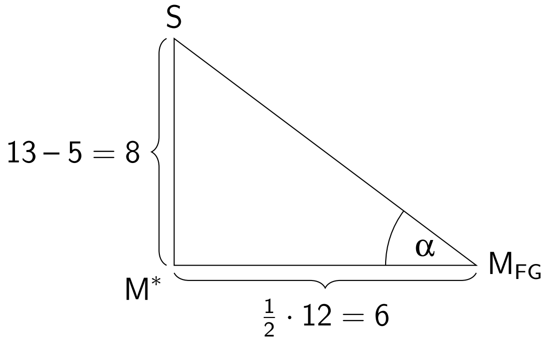
Bei einer Dachflächenneigung von $53{,}13^\circ > 50^\circ$ sollte der Schnee gut abrutschen können.

Alternative: elementargeometrische Überlegungen

Es werden die Punkte M^* und M_{FG} betrachtet. Der Punkt M^* ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EG}$ und liegt damit senkrecht unter der Spitze S. Der Punkt M_{FG} ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{FG}$.

Es kann nun das Dreieck $M^*M_{FG}S$ betrachtet werden, welches ein Querschnitt des Daches ist und den gesuchten Winkel α der Dachneigung enthält. Da alle drei Punkte in der x_1-Koordinate übereinstimmen, können die Seitenlängen des Dreiecks aus den Differenzen der x_2- und x_3-Koordinaten ermittelt werden.

Skizze:



$$\tan\alpha = \frac{8}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \approx 53{,}13^\circ$$

Bei einer Dachflächenneigung von $53{,}13^\circ > 50^\circ$ sollte der Schnee gut abrutschen können.

2.1 **Erläuterung der Gleichung**

Zum Punkt N gelangt man vom Punkt I mit dem Vektor $\overrightarrow{IN}$:

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN}$$

Da $\overrightarrow{IN} || \overrightarrow{M_{FG}S}$ gilt, kann ausgehend vom Punkt I auch in die Richtung dieses Vektors verschoben werden um zum Punkt N zu gelangen, wobei beachtet werden muss, dass die Länge nicht stimmt, also noch ein Vorfaktor k berücksichtigt werden muss:

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OI} + k \cdot \overrightarrow{M_{FG}S}$$

Um die Länge des Vektors $\overrightarrow{M_{FG}S}$ auf die gewünschte Länge von $\overrightarrow{IN}$ zu bringen, wird durch $|\overrightarrow{M_{FG}S}|$ geteilt (dadurch wird der Vektor auf die Länge 1 normiert) und mit $|\overrightarrow{IN}|$ multipliziert. Damit ergibt sich der gegebene Ausdruck:

$$\overrightarrow{OI} + k \cdot \overrightarrow{M_{FG}S} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OI} + \frac{|\overrightarrow{IN}|}{\overrightarrow{M_{FG}S}} \cdot \overrightarrow{M_{FG}S}$$

Koordinaten von N

Die Koordinaten von N können anhand der gegebenen Gleichung bestimmt werden. $\overrightarrow{OI}$ ist durch die Koordinaten von I gegeben. Laut Angabe ist außerdem $|\overrightarrow{IN}| = 3{,}5\,\text{m}$. Es gilt nun zunächst die Koordinaten von M_{FG} zu bestimmen und daraus anschließend $\overrightarrow{M_{FG}S}$.

$$\overrightarrow{OM_{FG}} = \overrightarrow{OF} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{M_{FG}S} = \begin{pmatrix} 6-6 \\ 6-12 \\ 13-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{M_{FG}S}| = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$

Alles kann nun in die gegebene Gleichung eingesetzt werden:

$$\overrightarrow{ON} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11{,}7 \\ 5{,}4 \end{pmatrix} + \frac{3{,}5}{10} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9{,}6 \\ 8{,}2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{N\,(\,9\,|\,9{,}6\,|\,8{,}2)}}$$

2.2 **Fläche der Dachfläche**

Die Fläche der dreieckigen Dachfläche FGS ergibt sich aus der Hälfte des Vektorprodukts $\overrightarrow{FG} \times \overrightarrow{FS}$, welches in Aufgabe 1 bereits berechnet wurde.

$$A_{FGS} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{FG} \times \overrightarrow{FS}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 96 \\ 72 \end{pmatrix}\right| = \text{frac12}\sqrt{0^2 + 96^2 + 72^2} = \frac{1}{2} \cdot 120 = 60\,[\text{m}^2]$$

Fläche des Sonnenkollektors

Die Fläche A_{SK} des Sonnenkollektors ist ein Rechteck mit den Seitenlängen $|\overrightarrow{IN}|$ und $|\overrightarrow{IJ}|$:

$$A_{SK} = |\overrightarrow{IN}| \cdot |\overrightarrow{IJ}| = 3{,}5 \cdot \left|\begin{pmatrix} 3-9 \\ 11{,}7-11{,}7 \\ 5{,}4-5{,}4 \end{pmatrix}\right| = 3{,}5 \cdot \sqrt{(-6)^2 + 0^2 + 0^2} = 3{,}5 \cdot 6 = 21\,[\text{m}^2]$$

Prozentualer Anteil

Der prozentuale Anteil der südlichen Dachfläche, die vom Sonnenkollektor bedeckt ist, beträgt $\frac{A_{SK}}{A_{FGS}} = \frac{21}{60} = 0{,}35 = \underline{\underline{35\,\%}}$.

2.3 **Gleichung der Ebene E in Koordinatenform**

Der Normalenvektor $\vec{n}_{FGS} = \vec{n}_E$ wurde in Aufgabe 1 bereits berechnet. Mit diesem kann zunächst die Normalenform der Ebene aufgestellt werden, die dann in die Koordinatenform umgerechnet wird.

$$E\colon \vec{n}_E \circ (\vec{x} - \overrightarrow{OG}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 96 \\ 72 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 12 \\ x_3 - 5 \end{pmatrix} = 96x_2 - 1152 + 72x_3 - 360 = 0$$

$$\Rightarrow \quad E\colon 96x_2 + 72x_3 - 1512 = 0 \qquad |:24$$

$$\Rightarrow \quad E\colon 4x_2 + 3x_3 - 63 = 0$$

Schattenwurf der Satellitenanlage

Die Gerade g_S beschreibt den Sonnenstrahl durch den Punkt z und ergibt sich aus den Koordinaten des Punktes z und dem gegebenen Vektor der Ausbreitungsrichtung:

$$g_S: \vec{x} = \overrightarrow{OZ} + \lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 15 \\ 27 \\ 17 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

Der Punkt R des Schattenwurf ergibt sich als Schnittpunkt von g_S und E. Um diesen zu bestimmen wird g_S komponentenweise in E eingesetzt:

$$\begin{aligned}
& & 4x_2 + 3x_3 - 63 &= 0 & \\
&\Rightarrow & 4(27 - 9\lambda) + 3(17 - 4\lambda) - 63 &= 0 & \\
&\Longleftrightarrow & 108 - 36\lambda + 51 - 12\lambda - 63 &= 0 & \\
&\Longleftrightarrow & 96 - 48\lambda &= 0 & |-96 \\
&\Longleftrightarrow & -48\lambda &= -96 & |:(-48) \\
&\Longleftrightarrow & \lambda &= 2 &
\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Gleichung der Gerade ergeben sich die Koordinaten des Punktes R:

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 15 \\ 27 \\ 17 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad R\,(5\,|\,9\,|\,9)$$

Die Sonnenkollektorfläche wird beschrieben durch die Punkte I, J, N und P.
Der Bereich der x_1-Koordinaten reicht dabei von $x_1 = 3$ (Punkt J) bis $x_1 = 9$ (Punkt I). Der Punkt R liegt dabei mit $x_1 = 5$ innerhalb des Bereichs.
Der Bereich des x_2-Koordinaten reicht von $x_2 = 9{,}6$ (Punkt N) bis $x_2 = 11{,}7$ (Punkt I). Der Punkt R liegt mit $x_2 = 9$ **nicht** innerhalb dieses Bereichs (gleiches gilt für den Bereich der x_3-Koordinaten.
Der Schattenwurf zum Zeitpunkt des vermuteten Leistungsmaximums liegt also nicht innerhalb der Sonnenkollektorfläche.

1 Für eine ganzrationale Funktion g vierten Grades mit ihrer Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$ gelten die beiden folgenden wahren Aussagen:

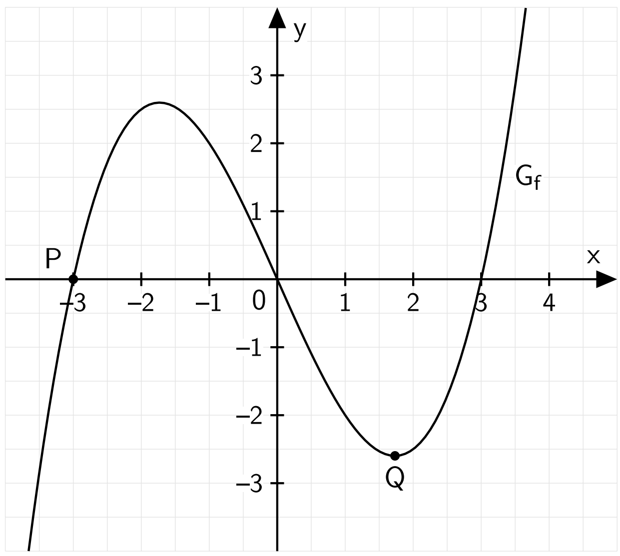
(a) $g'(3) = 0$

(b) $g(-x) - g(x) = 0$ für alle $x \in D_g$

Formulieren Sie für (a) und (b) jeweils eine sich mit Sicherheit aus der jeweiligen Aussage ergebende Eigenschaft des Graphen von g in Worten. **3 BE**

2.0 Die ganzrationale Funktion f mit ihrer Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ hat den Grad drei.

Nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen von f. Auf G_f liegen die Punkte $P\left(x_P \mid y_P\right)$ und $Q\left(x_Q \middle| y_Q\right)$.



2.1 Geben Sie jeweils an, ob $f'(x_P)$, $f''(x_P)$, $f'(x_Q)$ und $f''(x_Q)$ größer, kleiner oder gleich Null ist. **4 BE**

2.2 Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.
Hinweis: Ganzzahlige Werte können der Abbildung in 2.0 entnommen werden. **4 BE**

3 Zur Bestimmung des Alters kohlenstoffhaltiger Fossilien wird die C – 14 Methode eingesetzt. Diese nutzt aus, dass das Verhältnis von C-14-Atomen zu den C-12-Atomen in lebenden Organismen annähernd konstant ist. Nach dem Absterben des Organismus halbiert sich die Anzahl der C-14-Atome ca. alle 5730 Jahre. Die Anzahl der C-12-Atome bleibt konstant.

Für die Anzahl N(t) der C-14-Atome in einem abgestorbenen Organismus gilt somit nachfolgender Zusammenhang, wobei t die Zeit in Jahren nach Absterben des Organismus und N_0 die Anzahl der C-14-Atome zum Zeitpunkt $t = 0$ beschreibt:

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}\cdot t} \quad ; t \in \mathbb{R}_0^+$$

Das Analyselabor Yeti 3.0 kann mit dieser Methode eine Altersbestimmung durchführen, wenn noch mindestens 3,8 % vom anfänglichen Wert N_0 vorhanden sind.

Begründen Sie, ob Yeti 3.0 kohlenstoffhaltige Fossilien bis zu einem Alter von 60000 Jahren auf ihr Alter hin untersuchen kann. Ermitteln Sie dazu überschlagsmäßig, wie viel Prozent der ursprünglichen C-14-Atome nach 57300 Jahren noch vorhanden sind. **4 BE**

4 Bestimmen Sie rechnerisch die Lösung der Gleichung $e^x - 1 = \frac{6}{e^x}$ für $x \in \mathbb{R}$ mithilfe einer geeigneten Substitution. **4 BE**

5 Gegeben sind die folgenden Funktionen mit ihrer jeweiligen Definitionsmenge:

$t : x \mapsto e^x + 2$ mit $D_t = \mathbb{R}$ $\qquad$ $u : x \mapsto -e^{-x} + 4$ mit $D_u = \mathbb{R}$

Nachfolgend wird beschrieben, wie der Graph der Funktion t in den Graphen Funktion u übergeführt werden kann. Es hat sich in dieser Beschreibung genau ein Fehler eingeschlichen.

„Der Graph von u entsteht, indem man zunächst den Graphen von t ...

1.) ... an der x-Achse spiegelt,

2.) ... anschließend an der y-Achse spiegelt und

3.) ... danach um 2 LE parallel zur y-Achse nach oben verschiebt.“

Geben Sie an, in welchem der Schritte 1.) bis 3.) der Fehler ist, und korrigieren Sie diesen. **3 BE**

2.0 Gegeben ist die reelle Funktion $g_a: x \longmapsto -\frac{1}{2}x^3 - (a-1)x^2 + (a-4)x$ mit $x,a \in \mathbb{R}$.
Der Graph von g_a wird mit G_{g_a} bezeichnet.

2.1 Begründen Sie, ob G_{g_a} für einen Wert von a achsensymmetrisch zur y-Achse ist. **2 BE**

2.2 Bestimmen Sie sämtliche Werte des Parameters a, für die die Funktion g_a genau eine Nullstelle besitzt. Diese eine Nullstelle soll dabei eine einfache Nullstelle sein. **6 BE**

2.3.0 Nun gilt $a = 4$ und damit $g_4(x) = -\frac{1}{2}x^3 - 3x^2$ mit $D_{g_4} = \mathbb{R}$.

2.3.1 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_{g_4} und bestimmen Sie die jeweilige Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_{g_4}. **7 BE**

2.3.2 Berechnen Sie die Nullstellen von g_4 und zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse sowie weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen von g_4 für $-6 \leq x \leq 1$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein.
Maßstab: x-Achse: $1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$, y-Achse: $2\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$ **5 BE**

2.3.3 Die Gerade G_h durch die beiden Extrempunkte von G_{g_4} schließt zusammen mit G_{g_4} im III. Quadranten zwei endliche Flächenstücke ein.
Zeigen Sie rechnerisch, dass diese beiden Flächenstücke gleich groß sind. **5 BE**

3.0 Bei einem Versuch im physikalischen Praktikum werden Probekörper zunächst erwärmt. Anschließend werden beim Abkühlen die Temperaturen der Probekörper gemessen, dokumentiert und gemäß dem Newtonschen Abkühlungsgestz mit einer geeigneten Funktion modelliert.

Für den Körper K ergibt sich die Funktion $c: t \longmapsto 60 \cdot e^{-kt} + 20$, wobei t die Zeit in Minuten ab Messbeginn zum Zeitpunkt $t = 0$ und $c(t)$ die Temperatur des Körpers K in Grad Celsius zum Zeitpunkt t angibt. Der Koeffizient k mit $k \in \mathbb{R}^+$ ist eine Konstante mit der Einheit 1/min.
Auf das Mitführen von Einheiten kann bei den folgenden Berechnungen verzichtet werden.

3.1 Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte von c für $t \to +\infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. **3 BE**

3.2 15 Minuten nach Beginn der Messung ist die Temperatur des Körpers K bereits um 20 % gesunken. Berechnen Sie damit den Wert der Abkühlkonstante k. **4 BE**

1.1 **Ermitteln der Gleichung von g**

Aus der Zeichnung können beispielsweise die Punkte $(0\,|\,40)$ und $R\,(60\,|\,30)$ abgelesen werden, welche beide auf G_g liegen. Da es sich um eine lineare Funktion handelt, wird $g(x) = m\cdot x + t$ als Ansatz gewählt. Aus dem Punkt $(0\,|\,40)$ kann direkt der y-Achsenabschnitt $t = 40$ abgelesen werden. Der Wert von m ergibt sich aus den Koordinaten beider Punkte:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30-40}{60-0} = \frac{-10}{60} = -\frac{1}{6}$$

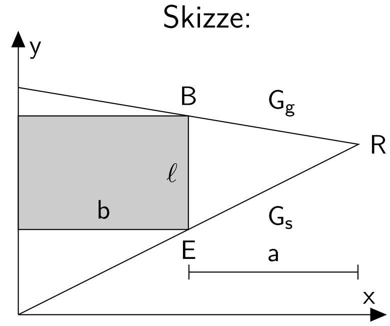
Die Funktionsgleichung lautet $\underline{\underline{g(x) = -\frac{1}{6}x + 40}}$.

1.2 **Bestimmen der Flächenmaßzahl A(a)**

Wie nebenstehender Skizze entnommen werden kann, gilt für die Maßzahl der Fläche:

$$A(a) = \ell(a)\cdot b(a)$$

Skizze:



Da Punkt R bei $x = 60$ liegt, müssen sich die beiden Längen b und a zudem zu 60 ergänzen, sodass gilt:

$$a + b = 60 \quad\Longleftrightarrow\quad b(a) = 60 - a$$

Dieser Wert entspricht außerdem der x-Koordinate von Punkt E und B, also

$$x_B = x_E = 60 - a$$

Die Länge ℓ ergibt sich aus der Differenz der y-Koordinaten von Punkt B und E, welche wiederum aus den Funktionsgleichungen von s und g bei $x_B = x_E$ bestimmt werden können:

$$\begin{aligned}\ell(a) &= y_B - y_E = g(x_B) - s(x_E) = g(60-a) - s(60-a)\\ &= \left(-\frac{1}{6}\cdot(60-a) + 40\right) - (0{,}5\cdot(60-a))\\ &= \left(-10 + \frac{a}{6} + 40\right) - \left(30 - \frac{a}{2}\right) = 30 + \frac{a}{6} - 30 + \frac{a}{2} = \frac{a}{6} + \frac{3a}{6} = \frac{4a}{6} = \frac{2}{3}a\end{aligned}$$

Durch Einsetzen ergibt sich dann die Maßzahl des Flächeninhaltes:

$$A(a) = \ell(a)\cdot b(a) = \frac{2}{3}a\cdot(60-a) = \underline{\underline{40a - \frac{2}{3}a^2}}$$

1.3 **Ermitteln des Wertes von a für maximalen Flächeninhalt**

Es wird zunächst die erste Ableitung der Funktion bestimmt:

$$\begin{aligned}A(a) &= 40a - \frac{2}{3}a^2\\ A'(a) &= 40 - \frac{2}{3}\cdot 2a = 40 - \frac{4}{3}a\end{aligned}$$

Weiterhin wird die Nullstelle der Ableitung bestimmt:

1.0 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \longmapsto \frac{1}{4}(x^3 + 4x^2 - 4x)$ mit ihrer Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

1.1 Berechnen Sie die Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen von f auf zwei Nachkommastellen gerundet. **6 BE**

1.2 Die Funktion f besitzt die Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = -2\sqrt{2} - 2$ und $x_3 = 2\sqrt{2} - 2$.

Zeichnen Sie mithilfe dieser Information und unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus Teilaufgabe 1.1 sowie weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion f im Bereich $-5 \leq x \leq 2$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein.
Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE=1 cm **4 BE**

1.3 Der Graph der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = -x$ und der Graph von f schließen zusammen im II. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Zeichnen Sie den Graphen von g in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.2 ein, kennzeichnen Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.
Die ganzzahligen Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen von f und g können der Zeichnung entnommen werden. **5 BE**

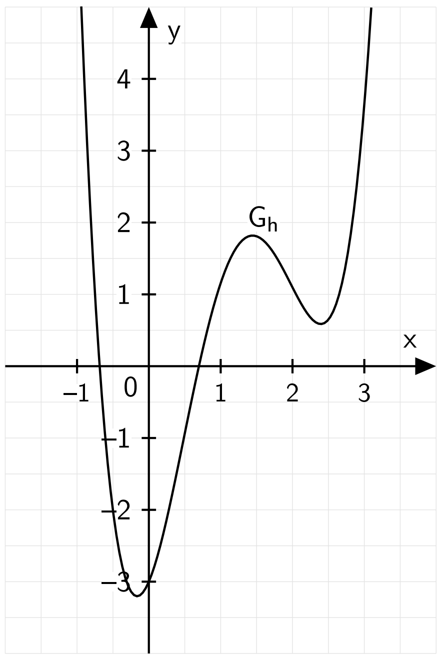
2.0 Gegeben ist die Funktion $f_k\colon x \longmapsto \frac{1}{4}(x^3 - kx^2 + kx)$ mit ihrer Definitionsmenge $D_{f_k} = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$.

2.1 Ermitteln Sie alle Werte des Parameters k so, dass der Graph der Funktion f_k an zwei Stellen waagrechte Tangenten besitzt. **6 BE**

2.2 Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle des Graphen der Funktion f_k in Abhängigkeit vom Wert des Parameters k. **5 BE**

3 Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h einer Funktion h mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$.
Begründen Sie mithilfe der Abbildung, ob folgende Aussagen jeweils wahr oder falsch sind.

Hinweis:
Antworten mit falscher oder fehlender Begründung werden mit 0 BE bewertet.



a) $h(x) + 3 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

b) $\int\limits_0^1 h(x)\,dx < 0$

c) Jede Stammfunktion H von h hat genau zwei Extremstellen.

d) $h''(3) < h(0)$

4 BE

4.0 Auf der Internetseite der Welthungerhilfe war am 12.05.2020 über eine schwere Heuschreckenplage in Ostafrika zu lesen: „Die Vermehrung der Heuschrecken ist dabei exponentiell: In drei Monaten kann sich die Population verzwanzigfachen, in sechs Monaten ist die Zahl der Heuschrecken 400-mal, nach neun Monaten 8.000-mal so hoch." Ergebnisse sind ggf. auf zwei Nachkommastellen zu runden.

4.1 Bestätigen Sie, dass sich die Heuschrecken laut den oben genannten Daten tatsächlich exponentiell vermehren.
Berechnen Sie den Faktor, um den sich die Heuschreckenpopulation monatlich vervielfacht.

5 BE

4.2 Die Anzahl N(t) der Heuschrecken der Population nach t Monaten lässt sich näherungsweise wie folgt darstellen: $N(t) = N_0 \cdot e^t$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$. Dabei ist N_0 die Anzahl der Heuschrecken der Population zum Zeitpunkt $t = 0$.
Ermitteln Sie die Verdopplungszeit der Heuschreckenpopulation. **2 BE**

4.3 In einem angrenzenden Gebiet herrschen ungünstigere Bedingungen für die Heuschrecken. Daher vervielfacht sich die Anzahl an Heuschrecken in diesem Gebiet nur mit einem Faktor von $\sqrt{e}$ pro Monat.
Geht man davon aus, dass sich in beiden Gebieten zu einem Zeitpunkt $t = 0$ jeweils gleich viele Heuschrecken N_0 aufhalten, so lässt sich der Gesamtbestand $\tilde{N}(t)$ nach t Monaten näherungsweise wie folgt darstellen: $\tilde{N}(t) = N_0 \cdot e^t + N_0 \cdot \sqrt{e}^t$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$.

Berechnen Sie unter Verwendung der Substitution $u = \sqrt{e}^t$ mit $u > 0$, zu welchem Zeitpunkt sich der Gesamtbestand verzehnfacht hat. **6 BE**

1.0 Gegeben ist die Funktion $f'(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 4x^2 - 4x)$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

1.1 **Ermitteln der Nullstellen der ersten Ableitung**

Zunächst wird die erste Ableitung der gegebenen Funktion bestimmt:

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(x^3 + 4x^2 - 4x\right)$$
$$f'(x) = \frac{1}{4}(3x^2 + 4 \cdot 2x - 4) = \frac{1}{4}(3x^2 + 8x - 4)$$

Für die Nullstellen der ersten Ableitung kann dann die Lösungsformel verwendet werden:

$$x_{1;2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 48}}{6} = \frac{-8 \pm \sqrt{112}}{6}$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{-8 - \sqrt{112}}{6} \approx -3{,}10 \quad \text{oder} \quad x_2 = \frac{-8 + \sqrt{112}}{6} \approx 0{,}43$$

Koordinaten der relativen Extrempunkte

Die ermittelten Stellen x_1 und x_2 sind Stellen, an denen der Graph eine waagrechte Tangente besitzt. Da $f'(x)$ eine Parabel ist, liegt an beiden Nullstellen ein Vorzeichenwechsel vor, sodass es sich bei beiden Stellen tatsächlich um einen relativen Extrempunkt handelt (nach der Art der Extrempunkt ist nicht gefragt). Durch Einsetzen können noch die zugehörigen Funktionswerte bestimmt werden:

$$f(x_1) = f\left(\frac{-8 - \sqrt{112}}{6}\right) = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{-8 - \sqrt{112}}{6}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{-8 - \sqrt{112}}{6}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{-8 - \sqrt{112}}{6}\right)\right) \approx 5{,}26$$
$$f(x_2) = f\left(\frac{-8 + \sqrt{112}}{6}\right) = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{-8 + \sqrt{112}}{6}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{-8 + \sqrt{112}}{6}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{-8 + \sqrt{112}}{6}\right)\right) \approx -0{,}23$$

Die gerundeten Koordinaten der beiden Extrempunkte lauten $\underline{\underline{(-3{,}10 \mid 5{,}26)}}$ und $\underline{\underline{(0{,}43 \mid -0{,}23)}}$.

1.2 Für die graphische Darstellung wird aus den bekannten und weiteren Werten eine Wertetabelle als Hilfestellung erstellt. Dabei sind die Nullstellen $x = 0$, $x = -2\sqrt{2} - 2 \approx -4{,}82$ und $x = 2\sqrt{2} - 2 \approx 0{,}83$ gegeben.

x	–5	–4,82	–3,10	–2	–1	0	0,43	0,83	2
f(x)	–1,25	0	5,26	4	1,75	0	–0,23	0	4

Mithilfe dieser Werte kann nun die graphische Darstellung erfolgen:

2021

Aufgaben Index

Analysis

A

anwendungsbezogene Aufgaben, Muster mHm AI 3.0, Muster mHm AII 2.0, 2019 oHm A 3, 2019 mHm AI 3.0, 2019 mHm AII 2.0, 2020 mHm AI 3.0, 2020 mHm AII 1.0, 2020 mHm AII 3.0, 2021 oHm A 3, 2021 mHm AI 3.0, 2021 mHm AII 4.0

D

Definitionsbereich/-menge, Muster mHm AI 3.1

E

Extrema, Muster mHm AI 1.3, Muster mHm AI 3.3, Muster mHm AII 2.2.5, 2019 mHm AI 1.2, 2019 mHm AII 2.4.1, 2020 oHm A 2.2.2, 2020 mHm AI 2.2.1, 2020 mHm AII 1.1, 2020 mHm AII 3.2, 2021 mHm AI 1.3, 2021 mHm AI 2.3.1, 2021 mHm AII 1.1

F

Fläche, Muster oHm AI 2.2, Muster oHm AII 1.3, Muster mHm AI 2.3, 2019 oHm A 4.1, 2019 mHm AI 1.4, 2019 mHm AII 1.3.2, 2020 oHm AI 1.3, 2020 mHm AI 2.2.3, 2020 mHm AII 1.3, 2020 mHm AII 3.3.2, 2021 mHm AI 2.3.3, 2021 mHm AII 1.3

Funktionsschar, Muster oHm AI 1.0, Muster oHm AII 2.0, Muster mHm AI 1.0, Muster mHm AII 1.0, 2019 oHm A 1, 2019 mHm AI 2, 2019 mHm AII 1.0, 2020 oHm A 2.0, 2020 mHm AI 2.0, 2020 mHm AII 2, 2021 mHm AI 2.0, 2021 mHm AII 2.0

Funktionsterm bestimmen, Muster mHm AI 2.1, Muster mHm AII 1.1, Muster mHm AII 2.2.1, 2019 oHm A 3, 2019 mHm AI 1.1, 2019 mHm AI 3.1, 2019 mHm AII 2.2, 2020 mHm AI 1, 2020 mHm AI 3.2, 2021 oHm A 2.2, 2021 oHm A 5, 2021 mHm AI 1.1, 2021 mHm AI 1.2, 2021 mHm AI 3.2

G

Graphen
- Funktionsgraph vorgegeben, Muster oHm AI 2.0, Muster oHm AII 1.0, Muster mHm AI 2.0, 2019 oHm A 2.0, 2019 oHm 4.2, 2019 mHm AI 3.5, 2019 mHm AII 2.0, 2020 oHm A 1.0, 2020 mHm AI 3.1, 2020 mHm AII 3.3.0, 2021 oHm A 2.0, 2021 mHm AI 1.0, 2021 mHm AII 3
- graphische Darstellung, Muster oHm AI 2.1, Muster oHm AI 2.2, Muster oHm AII 1.3, Muster mHm AI 2.3, Muster mHm AI 2.4, Muster mHm AI 3.4, Muster mHm AII 1.6, MUster mHm AII 2.1, Muster mHm AII 2.2.3, 2019 mHm AI 1.3, 2019 mHm AI 1.4, 2019 mHm AII 1.3.1, 2020 mHm AI 2.2.2, 2020 mHm AI 2.2.3, 2020 mHm AII 1.2, 2020 mHm AII 1.3, 2021 mHm AI 2.3.2, 2021 mHm AII 1.2

Grenzwert, Muster oHm AI 3.3, Muster oHm AII 2.2, Muster mHm AII 2.2.2, 2019 oHm A 5.1, 2019 mHm AI 3.4, 2020 oHm A 2.2.1, 2021 mHm AI 3.1

I

Integral, Muster oHm AII 2.3, Muster mHm AI 1.3, Muster mHm AII 1.5, 2019 mHm AII 1.3.2, 2019 mHm AII 2.4.2, 2021 mHm AII 3

K

Krümmung, Muster mHm AI 2.2, 2019 oHm A 4.1, 2021 mHm AII 2.2

M

Monotonie, Muster oHm AI 3.2, 2019 mHm AI 3.2, 2020 mHm AII 3.2, 2021 mHm AI 2.3.1

N

Nullstellen, Muster oHm AI 1.1, Muster oHm AI 3.1, Muster oHm AII 2.2, Muster mHm AI 1.3, Muster mHm AII 1.2, 2019 oHm A 2.2, 2019 mHm AI 2.2, 2019 mHm AII 1.1, 2020 oHm A 2.1, 2020 mHm AI 2.1, 2020 mHm AII 2, 2021 mHm AI 2.2, 2021 mHm AI 2.3.2

S

Schnittpunkte, Muster oHm AII 1.1, Muster mHm AI 1.3, 2019 oHm A 5.2

Stammfunktion, Muster oHm AII 2.3, 2021 mHm AII 3

Steigung, Muster oHm AII 1.2, Muster mHm AI 1.2, Muster mHm AII 1.3, 2019 oHm A 4.1, 2019 mHm AII 1.2, 2020 mHm AI 3.1

Symmetrie, 2019 oHm AI 2.1, 2021 mHm AI 2.1

W

waagrechte Tangente, Muster mHm AI 1.1, 2019 oHm A 1, 2021 mHm AII 2.1

Wendepunkt, Muster mHm AII 1.4, Muster mHm AII 2.2.6, 2019 mHm AI 3.3, 2020 mHm AI 3.3

Wendetangete, Muster mHm AI 1.2, 2019 mHm AII 1.2, Muster mHm AI 3.3

Wertemenge, Muster oHm AI 3.3, 2020 oHm AI 1.2

Analytische Geometrie

A

Abstand, Muster oHm BI 2, Muster mHm BI 4.1, Muster mHm BII 1.6, 2019 mHm BI 1.1, 2019 mHm BII 2.2.1, 2020 oHm B 2.2, 2020 mHm BI 1.5
  kürzester Abstand, 2019 mHm BI 1.4

B

Basis, 2021 oHm B 2

besondere Lage
  Gerade, Muster oHm BI 1.1, 2020 oHm B 2.1
  Ebene, Muster oHm BI 1.1, 2020 oHm B 2.1

E

Ebenengleichung, Muster mHm BI 1, Muster mHm BII 1.2, 2019 oHm B 3.2, 2020 mHm BI 1.3, 2020 mHm BII 2.3, 2021 mHm BI 1.2, 2021 mHm BII 1.1

F

Fläche, 2019 mHm BI 1.3, 2020 oHm B 1.1, 2020 mHm BI 1.2, 2020 mHm BII 2.2, 2021 mHm BI 1.5, 2021 mHm BII 1.3

G

gegenseitige Lage

Punkt - Punkt, 2019 oHm B 3.1
Punkt - Gerade, Muster oHm BII 1.2, Muster oHm BII 2.1, Muster mHm BII 1.3
Punkt - Ebene, Muster oHm BII 1.2, 2021 oHm B 1.1
Gerade - Gerade, Muster oHm BII 2.1
Gerade - Ebene, Muster oHm BI 1.2, Muster mHm BII 2,2019 mHm BII 2.2.3, 2020 mHm BI 1.6, 2020 mHm BII 2.3
Ebene - Ebene, Muster mHm BI 3

Geradengleichung, Muster oHm BII 1.1, Muster oHm BII 2.2, 2021 oHm B 1.1

K

Koordinaten bestimmen, Muster mHm BII 1.1, 2019 mHm BII 2.1, 2020 mHm BI 1.1, 2020 mHm BII 2.1, 2021 mHm BI 1.1, 2021 mHm BI 1.4, 2021 mHm BII 1.4, 2021 mHm BII 1.5

L

lineare Unabhängigkeit, 2020 oHm B 1.2, 2020 oHm B 3.2

Linearkombination, 2019 oHm B 2

M

Mittelpunkt, 2020 mHm BII 2.1

S

Schnittgerade, Muster oHm BI 1.3, Muster mHm BI 2, Muster mHm BII 1.3, 2019 mHm BII 1.2

Schnittpunkt, Muster oHm BII 1.3, 2021 oHm B 1.1

Schwerpunkt, 2019 oHm B 2, 2020 mHm BI 1.5

Spiegelpunkt, 2019 mHm BII 1.1

V

Veranschaulichung, 2019 oHm B 1, 2019 mHm BI 1.4, 2021 oHm B 1.2

Volumen, Muster mHm BI 4.2, Muster mHm BII 1.4, 2020 oHm B 3.1

W

Winkel, Muster oHm BI 2, Muster oHm BII 2.1, Muster mHm BI 4.3, Muster mHm BII 1.5, 2019 mHm BI 1.1, 2019 mHm BI 1.2, 2019 mHm BII 2.2.2, 2020 mHm BI 1.4, 2020 mHm BII 1, 2021 mHm BI 1.3, 2021 mHm BII 1.2

DEINE NEUE LERNPLATTFORM UNTER

HTTPS://LERN.DE

ODER

HTTPS://ABITUR.GURU

PERFEKT VORBEREITET AUF DIE ABI-PRÜFUNG FOS·BOS 12 Bayern 2022

ENTWICKELT VON PÄDAGOGEN

- An den **LehrplanPLUS** angepasste Original-Prüfungen
- Anschauliche, ausführliche und nachvollziehbare Lösungswege
- Miniskript mit Beispielen zzgl. Übungsteil mit ausführlichen Lösungen
- Mit Musterprüfungen im Stil der neuen Fachabiturprüfung
- Mit Operatoren als Handlungsanweisungen
- Inkl. neuer Anpassungen für die Prüfung 2022

Abi-Trainer für FOS · BOS 12 MT 2022

DIGITALES COACHING

- Neue **Lernplattform** mit geschützem Mitgliederbereich
- Themenbezogene, kurze, verständliche Lernvideos
- Individuelles Online-Coaching
- Prüfungsvorbereitung Online
- Immer auf dem aktuellsten Stand

Alle weiteren Informationen auf www.lern.de

SCAN ME

Hier wachsen kluge Köpfe

lernverlag® www.lern-verlag.de

Bestell-Nr. : EAN 9783743000766

FOS·BOS 12. Klasse | Fachabitur | Bayern

ISBN 978-3-7430-0076-6

€ 11,90

9 783743 000766 >

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
lernverlag
Fürstenrieder Straße 52
80686 München
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de