13. Klasse

FOS·BOS Abitur Bayern

Mathematik Technik

- Die ideale Prüfungsvorbereitung -

FOS·BOS 2022

BLICK ins BUCH
inkl. Prüfung 2021

DIGITALES COACHING

FOS·BOS 13

FOS·BOS 13. Klasse | Abitur | Bayern

LehrplanPLUS

lernverlag
www.lern-verlag.de

Abiturprüfung
Mathematik Technik
FOS | BOS 13. Klasse
Bayern 2022

erstellt

für Schülerinnen und Schüler
der Beruflichen Oberschule
technischer Zweig in Bayern

INKL.
Original-Prüfung
2021
mit Lösungen

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Vorwort

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler,
liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,

in diesem Prüfungsbuch **Abiturprüfung Mathematik Technik FOS/BOS Bayern 13. Klasse 2022** sind die zentral gestellten Original-Prüfungen der letzten Jahren nach LehrplanPLUS zusammengestellt worden. Dazu gibt es schülergerechte, lehrplankonforme und ausführliche Lösungen, die für den Schüler leicht verständlich und nachvollziehbar erstellt worden sind.
Das Prüfungsvorbereitungsbuch ist eine ideale Unterstützung während der Abschlussklasse und dient zur Vorbereitung auf eine erfolgreiche Abschlussprüfung.

Hinweise

Die Abschlussprüfung 2022 findet nach Vorgaben des *Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus* am **31.05.2022** statt und dauert **180 Minuten**. (Stand 01.09.2021) Als **Hilfsmittel** ist ein nichtprogrammierbarer elektronischer Taschenrechner und die Merkhilfe zugelassen.

Neues - Lernplattform kommt

Wir haben eine neue **Lernplattform** eingerichtet und bauen diese sukzessive auf. Hier findet man im gesicherten Mitgliederbereich hilfreiche Erklär- und Lösungsvideos zu vielen Prüfungsthemen und zu den Lösungen der Original-Prüfungen dieses Buches. Jetzt bei **https://lern.de** oder **https://abitur.guru** einen Platz sichern.
Zeit- und ortsunabhängig online für einzelne Arbeiten in der Schule oder das Fachabitur 2022 an Beruflichen Oberschulen in Bayern lernen.

Tipps

Fangen Sie rechtzeitig mit den Vorbereitungen auf die Abschlussprüfung an und arbeiten Sie kontinuierlich alte Prüfungen durch. Wiederholen Sie die einzelnen Prüfungen mehrmals, um die notwendige Sicherheit zu erlangen. Zur Lernkontrolle können Sie den Prüfungsplaner im Innenteil dieses Prüfungsvorbereitungsbuch verwenden.
Üben Sie also, so oft Sie können.

Notenschlüssel

Der Notenschlüssel wird vom *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* festgelegt. In der folgenden Tabelle finden Sie den Notenschlüssel.

Notenschlüssel

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
−	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
−	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
−	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
−	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
−	1	26	20
6	0	19	0

Impressum

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
Geschäftsführer: Sascha Jankovic
Fürstenrieder Str. 52
80686 München
Amtsgericht München: HRB 205623
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de – www.lern-verlag.de
lern.de, cleverlag und lernverlag sind eingetragene Markenzeichen von Sascha Jankovic, Inhaber und Verleger.
Druck: Deutschland
Lösungen:
StD Roland Wittmann (Staatl. Berufliche Oberschule Neuburg a.d. Donau), Simon Rümmler, Sascha Jankovic und das Team der lern.de Bildungsgesellschaft mbH

Wir danken dem *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* für die freundliche Genehmigung, die Original-Prüfungen abdrucken zu dürfen. Die Lösungsvorschläge liegen nicht in der Verantwortung des Ministeriums.

7. ergänzte Auflage ©2021 **1. Druck**
ISBN-Nummer: 978-3-7430-0077-3
Artikelnummer:
EAN 9783743000773

Aktuelles Rund um die Prüfung 2022 und diesem Buch

Als kleiner Verlag schreiben wir für alle Schüler:innen nachvollziehbare, verständliche und ausführliche Lösungen zu den Original-Prüfungen und versuchen unsere Titel auch während des Schuljahres immer aktuell zu halten. Da wir seit über 20 Jahren individuelle Lernförderung durchführen, stehen bei uns alle Schüler:innen an erster Stelle, wenn es um Fragen rund um das Buch, Verständnisprobleme bei dem ein oder anderen Thema oder Wünsche geht.
Egal ob es um übersehene Rechtschreibfehler, Rechenfehler oder auch Wünsche von Lehrer:innen oder Schüler:innen geht, wir setzen uns sofort hin und versuchen Gewünschtes umzusetzen. Es kostet niemanden etwas, und alle profitieren davon, auch wenn wir Mehrarbeit durch diesen kostenlosen Service haben.

Wir erreichen Sie uns am besten?

Schreiben Sie uns eine E-Mail an **kontakt@lern-verlag.de**

Schreiben Sie uns eine Nachricht, schicken Sie ein Foto von der betroffenen Seite. Wir prüfen, ändern und veröffentlichen bei Bedarf im kostenlosen Downloadbereich des lernverlags die durchgeführten Änderungen.

WhatsApp-Business
+49 89 54 64 52 00

Sie können uns gerne unter der selben Nummer anrufen.

Digitales zu diesem Buch

Unter **https://lern.de** bauen wir gerade eine Lernplattform auf.
Du suchst ein Video über Polynomdivision oder Vektoren und bekommst aktuell auf anderen Plattformen 50 Videos mit unterschiedlichen Erklärungen angezeigt? Das soll sich ändern. Ein Begriff und maximal 3 Videos, die zusammenhängen, sollen angezeigt werden.
Wir arbeiten unter Hochdruck daran, kurze animierte Erklärvideos, passend zum Unterrichtssoff und „**ON-TOP**" Lösungsvideos zu den Original-Prüfungen zu erstellen.
Schau öfters einmal vorbei oder melde dich am besten zu unserem **Newsletter** an, der **maximal zweimal pro Monat** verschickt wird.

Änderungen/Hinweise in dieser Neuauflage 2021/2022 - ISBN: 978-3-7430-0077-3

- Aus pädagogischen Gründen und zu Übungszwecken wurden keine Kürzungen durchgeführt
- Aktuelles erstellt; Downloadbereich Verlagsseite überarbeitet
- Diese ergänzte Auflage mit 294 Seiten ist durch die Original-Prüfung 2021 mit Lösungen und ohne Kürzungen noch umfangreicher als die Vorauflage mit 254 Seiten
- **Original-Prüfung 2021 inkl. ausführlichen Lösungen eingefügt**

Unsere Autoren

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Technik Fachabitur**:
StD Roland Wittmann (Neuburg a. d. Donau); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Technik Abitur**:
StD Roland Wittmann (Neuburg a. d. Donau); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Nichttechnik Fachabitur**:
StR Verena Reffler (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Nichttechnik Abitur**:
StD Dr. Michael Fuchs (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Alle Prüfungsteile, die identisch in Nichttechnik und Technik abgeprüft werden, sind dementsprechend doppelt korrigiert.

Miniskript und Übungsaufgaben:
StD Dr. Michael Fuchs (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Musterprüfungen Fachabitur und Abitur:
Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Übungsaufgaben im Miniskript:
Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Die Autoren wünschen viel Erfolg bei der **Abschlussprüfung 2022**.

Inhaltsverzeichnis

MINISKRIPT - Analysis **Seite**

MINISKRIPT - Stochastik

ÜBUNGSTEIL - Analysis

ÜBUNGSTEIL - Stochastik

Operatoren

Operatoren sind bestimmte Handlungsanweisungen, die sicherstellen, dass bei bestimmten Aufgabenstellungen stets das Gleiche verstanden und umgesetzt wird. In der folgenden Tabelle haben wir Ihnen die gängigsten Operatoren aufgelistet und die entsprechende Bedeutung dazu hingeschrieben.

Operator	Bedeutung für den Lösungsansatz
berechnen Sie	Sie berechnen das Ergebnis und die Lösungswege müssen nachvollziehbar und vollständig sein.
bestimmen bzw. ermitteln Sie	Sie berechnen das Ergebnis oder beschreiben das Ergebnis durch die in der Angabe vorhandenen Informationen.
begründen Sie	Sie begründen durch die Informationen in der Angabe ihr Ergebnis und bestätigen durch Herleitungen Ihre Schlussfolgerungen.
beweisen, zeigen Sie	Das Ergebnis wird im gegebenen Sachverhalt bewiesen, eventuell auch durch eine Herleitung.
entscheiden Sie	Es werden mehrere Alternativen angeben, und Sie entscheiden sich für eine.
erläutern Sie	Sie geben die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts anhand von Beispielen wieder.
interpretieren Sie	Sie analysieren die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts wieder und interpretieren diese.
nennen Sie, geben Sie an	Sie nennen Fakten oder Sachverhalten ohne diese wiederzugeben.
prüfen Sie	Sie prüfen den gegebenen Sachverhalt auf Wahrheit.
untersuchen Sie	Sie untersuchen den Sachverhalt, berechnen ein Ergebnis und arbeiten Merkmale heraus.
skizzieren Sie	Sie stellen den Sachverhalt vereinfacht und übersichtlich dar.
zeichnen Sie	Sie erstellen eine exakte grafische Darstellung des Sachverhaltes.

Hinweis zur Prüfung 2022

Sonderregelung für die Abiturprüfung 2022 an der FOSBOS:
Nicht prüfungsrelevant (Stand: 18.06.2021):

- Aus LB 3: berechnen uneigentliche Integrale 1. und 2.Art, um damit Maßzahlen der Flächeninhalte von Flächen zu ermitteln, die in x-oder y-Richtung unbegrenzt sind

- Aus LB 8: bestimmen für kombinatorische Problemstellungen die Anzahl der Belegungsmöglichkeiten für ein k-Tupel mithilfe des allgemeinen Zählprinzips. Damit erschließen sie sich unter anderem die Anzahl der Möglichkeiten für die Bildung eines Passworts

Bitte fragen Sie bzgl. Änderungen bei Ihrer Lehrkraft nach!

Polynome

Liebe Schülerinnen und Schüler,
die nachfolgende Übersicht zu den ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen) ist eine enorm wichtige Grundlage für viele Themen der Abschlussprüfung.
Versuchen Sie deshalb bitte, die Übersicht auf „**Verständnis**“ zu lernen und in unterschiedlichen Abständen immer wieder zu wiederholen.

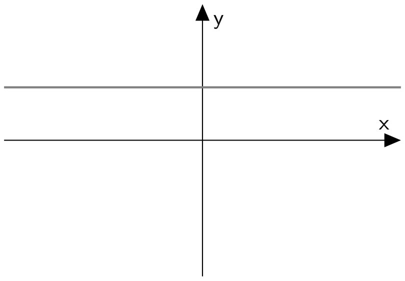
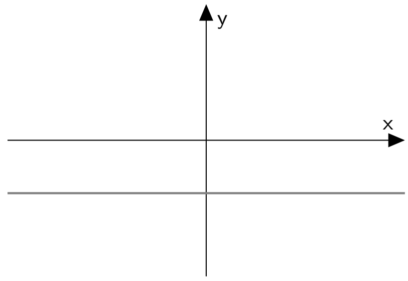
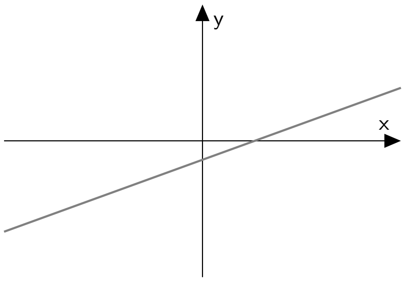
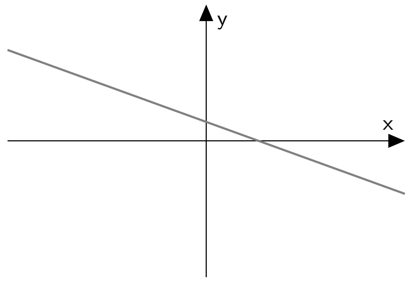
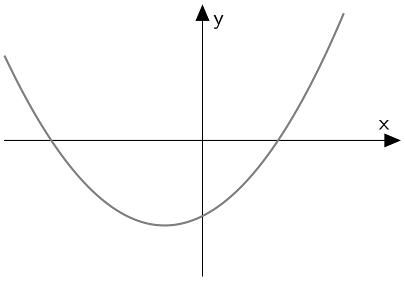
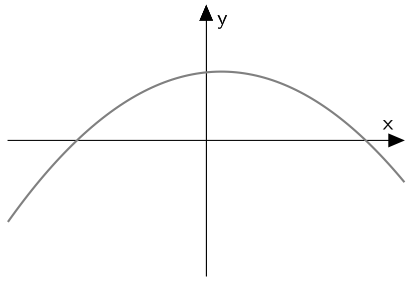
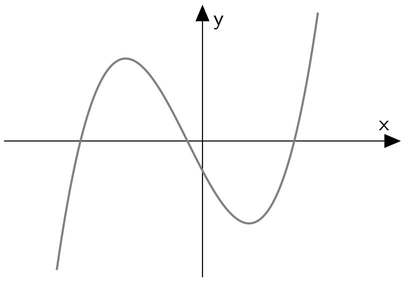
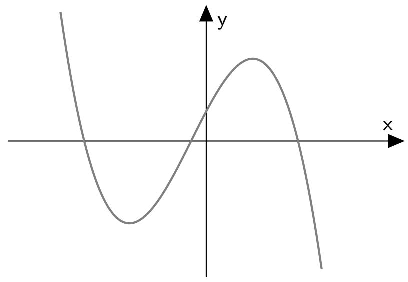
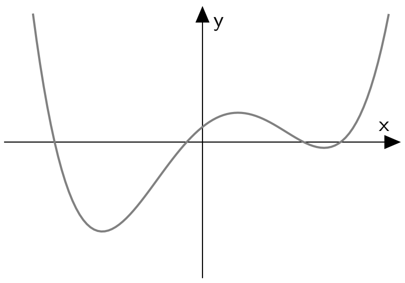
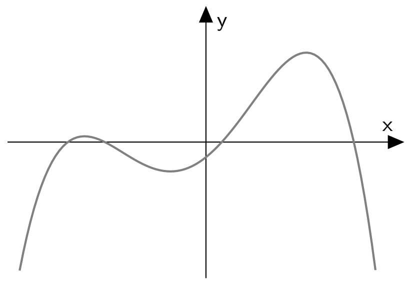
Nachfolgend ein kleiner „Fahrplan“ zum Lernen der Übersicht.

- **Prägen** Sie sich als erstes am besten die Spaltenüberschriften **ein**.
- **Lernen** Sie jetzt die „**Namen**“ der einzelnen Funktionstypen (diese sind übrigens identisch mit den dazugehörigen Gleichungstypen!). Hierzu sei angemerkt, dass es einen grundlegenden Unterschied zwischen Funktionen und dazugehörigen Gleichungen gibt!
  - Mit Funktionen werden die zu den Variablen (häufig x) gehörenden „y-Werte“, „Steigungswerte“ und „Krümmungswerte“ definiert bzw. berechnet.
  - Funktionen kann man ableiten.
  - Nur Gleichungen kann man LÖSEN. Hierzu benötigt man entsprechende „**Werkzeuge**“.
- **Beachten** Sie dabei die **Definition** der **Koeffizienten** $(a, b, c, \ldots)$. Auch hier ist auffallend, dass bis auf die konstanten Funktionen der sogenannte „Leitkoeffizient“ a niemals null sein darf. Dies ist „logisch“, da ja der „namensgebende“ Bestandteil des Funktionsterms nicht fehlen darf. Koeffizienten sind sogenannte „**Nebenwirker**“, die neben den Variablen (häufig x) für die entsprechenden Funktionswerte „mitverantwortlich“ sind.
- **Lernen** Sie jetzt die **Graphentypen**, die zu den verschiedenen Funktionstypen gehören.
  - Der Leitkoeffizient (a) gibt dabei an, wohin der dazugehörige Graph für große y-Werte verläuft. Ist der Leitkoeffizient positiv (> 0) verläuft der dazugehörige Graph nach rechts oben, ist er negativ (< 0) nach rechts unten. Einzig bei den konstanten Funktionen verlaufen die Graphen für positive Leitkoeffizienten „über“– bzw. „unterhalb der x-Achse“.
- Abschließend **lernen** Sie die **Gleichungstypen** und dazugehörigen „**Werkzeuge**“.

  Verlieren Sie hier bitte nicht die Geduld, es lohnt sich für viele spätere Themen. Und keine Angst, es sind **nur sechs** verschiedene „**Werkzeuge**“!

Die Autoren, V. Reffler, Dr. M. Fuchs, S. Rümmler, S. Jankovic und das Team von lern.de

Funktionstyp und allgemeine Funktionsgleichung	dazugehörige Gleichungen und „Werkzeuge“ zum Lösen
Konstante **Funktion** $f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ Funktionsgrad: 0	*Konstante* Funktions**gleichung** $a = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$ Keine „Werkzeuge“ notwendig
Lineare **Funktion** $f(x) = ax + b$ mit $a; b \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 1	*Lineare* Funktions**gleichung** $ax + b = 0$ mit $a; b \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Äquivalenzumformung
Quadratische **Funktion** $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a; b; c \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 2	*Quadratische* Funktions**gleichung** $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a; b; c \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Ausklammern ($c = 0$) - Radizieren ($b = 0$) - „Mitternachtsformel“ (vollständige Gleichung)
Kubische **Funktion** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a; b; c; d \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 3	*Kubische* Funktions**gleichung** $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit $a; b; c; d \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Ausklammern ($d = 0$) - Polynomdivision (zum Vereinfachen der Funktion)
(Polynom)**Funktion** *4. Grades* $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $a; b; c; d; e \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ Funktionsgrad: 4	Funktions**gleichung** *4. Grades* $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ mit $a; b; c; d; e \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ - Ausklammern ($e = 0$) - Polynomdivision (zum Vereinfachen der Funktion) - Substitution ($b = 0 \ \wedge \ d = 0$)

mögliche Graphentypen für $a > 0$	**mögliche** Graphentypen für $a < 0$
 Parallele **Gerade** über der x-Achse	 Parallele **Gerade** unter der x-Achse
 Steigende **Gerade**	 Fallende **Gerade**
 Nach oben geöffnete **Parabel**	 Nach unten geöffnete **Parabel**
 „N-Form“	 „S-Form“
 „W-Form“	 „M-Form“

Finden von Stammfunktionen

4. Es handelt sich um eine unecht gebrochen-rationale Funktion (ZG≥NG), es lässt sich eine Polynomdivision durchführen.
$\Rightarrow$ Umformen durch Polynomdivision, dann nach bekannten Regeln integrieren

Beispiel

Gesucht ist die Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{x^2+4x+5}{x+3}$, womit erneut das einleitende Beispiel der unecht gebrochen-rationalen Funktionen aufgegriffen wird (ausführliche Polynomdivision siehe Anfang des Kapitels „gebrochen-rationale Funktion“).

$$\text{Polynomdivision:} \quad f(x) = (x^2+4x+5) : (x+3) = x+1+\frac{2}{x+3}$$
$$\text{integrieren:} \quad F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2\ln(|x+3|)$$

Finden von Stammfunktionen

5. In der Aufgabenstellung ist bereits eine Stammfunktion vorgegeben.

Partielle Integration

Für die Ableitung eines Produktes $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ wird die Produktregel verwendet:

$$f'(x) = (u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Es können nun wiederum beide Seiten integriert werden. Das Integral der rechten Seite wird in zwei Summanden aufgeteilt und danach umgeformt:

$$\begin{aligned} & \int (u(x) \cdot v(x))' dx = \int (u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)) dx \\ \iff \quad & u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx \qquad \Big| - \int u'(x) \cdot v(x) dx \\ \iff \quad & u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx = \int u(x) \cdot v'(x) dx \end{aligned}$$

Durch Umsortieren der Terme gelangt man somit ausgehend von der Produktregel der Ableitung zu einer wichtigen Regel der Integration:

Partielle Integration

Die partielle Integration ist eine Möglichkeit bestimmte Integrale oder Stammfunktionen zu berechnen.

$$\text{unbestimmt:} \quad \int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx$$

$$\text{bestimmt:} \quad \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x) dx$$

Ziel dieses Verfahrens ist, anstatt des ursprünglichen schwierigen Integrals zu einem leichteren Integral zu gelangen. Dabei kann folgenden Schritten gefolgt werden:

1. Festlegung von $u(x)$ und $v'(x)$ im gegebenen Integral. Wird dies falsch festgelegt kann das Integral eventuell nicht gelöst werden. Da eine Vereinfachung das Ziel ist, gilt als Faustregel:
   - für $u(x)$ werden Logarithmusfunktionen bevorzugt
   - für $v'(x)$ werden Exponentialfunktionen bevorzugt
2. Bestimmen der Terme von $u'(x)$ und $v(x)$.
3. Einsetzen in die Formel, Lösen des verbleibenden Integrals.

Beispiel

Gesucht ist eine Stammfunktion $F(x)$ der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$.

1. Schritt: Festlegung von $u(x)$ und $v'(x)$ im gegebenen integral. Die Auswahl wird anhand der Faustregel „für $v'(x)$ werden Exponentialfunktionen bevorzugt“ getroffen:

$$F(x) = \int \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v'(x)} dx \quad \Rightarrow \quad u(x) = x \quad v'(x) = e^x$$

2. Schritt: Bestimmen der Terme von $u'(x)$ und $v(x)$:

$$u(x) = x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 1$$
$$v'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad v(x) = \int v'(x)dx = \int e^x dx = e^x$$

3. Schritt: Einsetzen in die Formel:

$$\int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)dx$$
$$F(x) = \int x \quad \cdot e^x \quad dx = x \quad \cdot e^x \quad - \int e^x \quad \cdot 1 \quad dx$$

Das nun verbleibende Integral kann berechnet werden, sodass final gilt:

$$F(x) = e^x \cdot x - \int e^x dx = e^x \cdot x - e^x = (x-1) \cdot e^x$$

(Hinweis: Da laut Angabe **eine** Stammfunktion gesucht ist, wurde die Integrationskonstante $C = 0$ gesetzt)

Weitere Methoden

Zwei weitere Methoden bieten die Möglichkeit, Integrale mithilfe von partieller Integration zu lösen:

- mehrfache partielle Integration:
  Es ist möglich, dass das Integral, das nach der partiellen Integration verbleibt, erneut nicht einfach lösbar ist. Eventuell muss deshalb mehrfach nacheinander partiell integriert werden um zur Lösung zu gelangen. Bsp.: $x^2 \cdot e^x$
- Multiplikation mit Faktor eins:
  Für die Integration mancher Funktionen müssen diese mit eins multipliziert werden, sodass die Regel der partiellen Integration angewendet werden kann (siehe nachfolgendes Bsp.)

Beispiel

Gesucht ist der Wert des Integrals $\int_{0,5}^{2} \ln(2x)dx$, wobei dieses explizit mithilfe der partiellen Integration berechnet werden soll.
Hierbei handelt es sich um ein Integral, dass sich mithilfe von partieller Integration lösen lässt, wenn der Integrand mit eins multipliziert wird:

$$\int_{0,5}^{2} \ln(2x)dx = \int_{0,5}^{2} \ln(2x) \cdot 1dx$$

An dieser Stelle kann den eingangs beschriebenen Schritten gefolgt werden.

1. Schritt: Festlegung von u(x) und v′(x). Hier wird nun nach der Faustregel „für u(x) werden Logarithmusfunktionen bevorzugt“ entschieden.

$$\int_{0,5}^{2} \underbrace{\ln(2x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{1}_{v'(x)} dx \quad \Rightarrow \quad u(x) = \ln(2x) \quad v'(x) = 1$$

2. Schritt: Bestimmen der Terme von u′(x) und v(x):

$$u(x) = \ln(2x) \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$$
$$v'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad v(x) = \int v'(x)dx = \int 1dx = x$$

3. Schritt: Einsetzen in die Formel:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x)dx$$
$$\int_{0,5}^{2} \ln(2x) \cdot 1 \, dx = [\ln(2x) \cdot x]_{0,5}^{2} - \int_{0,5}^{2} x \cdot \frac{1}{x} dx$$

Der resultierende Term kann zusammengefasst und das Endergebnis berechnet werden:

$$\int_{0,5}^{2} \ln(2x)dx = \int_{0,5}^{2} \ln(2x) \cdot 1dx = [\ln(2x) \cdot x]_{0,5}^{2} - \int_{0,5}^{2} x \cdot \frac{1}{x}dx$$
$$= (\ln(2 \cdot 2) \cdot 2 - (\ln(2 \cdot 0,5) \cdot 0,5)) - \int_{0,5}^{2} \frac{x}{x}dx = (\ln(4) \cdot 2 - (0 \cdot 0,5)) - \int_{0,5}^{2} 1dx$$
$$= 2 \cdot \ln(4) - [x]_{0,5}^{2} = 2 \cdot \ln(4) - (2 - 0,5) = 2 \cdot \ln(4) - 1,5$$

Aufgaben - Partielle Integration

1. Ermitteln Sie für folgende Funktionen jeweils eine Stammfunktion:

   a) $f(x) = x \cdot \ln(x)$ b) $g(x) = e^x \cdot x^2$ c) $h(x) = x^2 \cdot \ln(x)$

2. Berechnen Sie den exakten Wert der folgenden bestimmten Integrale:

   a) $\int_0^3 2x \cdot e^{-x}dx$ b) $\int_1^2 \ln(x) \cdot x^5dx$ c) $\int_1^2 e^{2x} \cdot (-4x^2)dx$

Kurzlösungen:
(ausführliche Lösungen finden Sie auf unserer Verlagsseite - Download)

1. Als Integrationskonstante wird jeweils C = 0 gesetzt:
   a) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x^2(\ln(x) - \frac{1}{2})$
   b) $G(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$
   c) $H(x) = \frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \frac{1}{9}x^3 = \frac{1}{3}x^3(\ln(x) - \frac{1}{3})$
2. a) $2 - 8e^{-3}$
   b) $\frac{32}{3} \ln(2) - \frac{7}{4}$
   c) $-5e^4 + e^2$

Aufgabe 1 - Kurvendiskussion: FOS13 MT 2012, AI 2
Themen: Extrempunkte, Stammfunktion

4 Gegeben ist weiter die Funktion $g\colon x \mapsto \dfrac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}_0^+$.

4.1 Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte des Graphen von g. $\left(\text{Teilergebnis: } g'(x) = \dfrac{2 - e^x}{2e^x\sqrt{e^x - 1}}\right)$ **7 BE**

4.2 Zeigen Sie, dass für $x > 0$ folgende Beziehung für g(x) erfüllt ist: $g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{e^x - 1}} - g'(x)$, und ermitteln Sie damit eine Stammfunktion von g. **7 BE**

Lösungsvorschlag A1 Kurvendiskussion: FOS13 MT 2012, AI 2

1 Gegeben ist die Funktion $g(x) = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x}$ mit $D_g = \mathbb{R}_0^+$

1.1 Mithilfe von Quotienten- und Kettenregel wird die erste Ableitung bestimmt.

Ermitteln der ersten Ableitung

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x} \\
g'(x) &= \left[\frac{(\sqrt{e^x - 1})' \cdot e^x - \sqrt{e^x - 1} \cdot (e^x)'}{(e^x)^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\
&= \left[\frac{(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} \cdot (e^x - 1)' \cdot e^x - \sqrt{e^x - 1} \cdot e^x}{(e^x)^2}\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} e^x \cdot \cancel{e^x} - \sqrt{e^x - 1} \cdot \cancel{e^x}}{(e^x)^{\cancel{2}1}} && \text{(Anwendung und Kürzen)} \\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{e^x-1}} \cdot e^x - \sqrt{e^x - 1}}{e^x} && \text{(Erweitern des Bruchs)} \\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{e^x-1}} \cdot e^x - \sqrt{e^x - 1}}{e^x} \cdot \frac{2\sqrt{e^x - 1}}{2\sqrt{e^x - 1}} && \text{(Ausmultiplizieren)} \\
&= \frac{e^x - 2(e^x - 1)}{2e^x\sqrt{e^x - 1}} && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= \frac{2 - e^x}{2e^x\sqrt{e^x - 1}} && \text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}
$$

Koordinaten und Art der Extrempunkte

Die Nullstellen der ersten Ableitung sind die möglichen Extremstellen der Funktion $g(x)$. Für die Nullstellen der ersten Ableitung muss der Zählerterm der ersten Ableitung den Wert Null annehmen. Es gilt also

$$g'(x) = 0 \iff 2 - e^x = 0 \iff 2 = e^x \iff x = \ln(2)$$

Das Vorzeichen des Zählerterms entscheidet außerdem über das Vorzeichen der Ableitung. Mit der eben bestimmten Nullstelle des Zählerterms gilt dann:

$$
\begin{aligned}
x < \ln(2) &\iff 2 - e^x > 0 \iff g'(x) > 0 \\
x > \ln(2) &\iff 2 - e^x < 0 \iff g'(x) < 0
\end{aligned}
$$

Unter Berücksichtigung des Definitionsbereichs ist der Graph der Funktion also streng monoton steigend im Intervall $[0; \ln(2)]$ und streng monoton fallend in $[\ln(2); \infty[$. Somit liegt bei $x = \ln(2)$ ein Hochpunkt vor. Es wird noch der Funktionswert an dieser Stelle bestimmt.

$$g(\ln(2)) = \frac{\sqrt{e^{\ln(2)} - 1}}{e^{\ln(2)}} = \frac{\sqrt{2 - 1}}{2} = \frac{1}{2}$$

Damit existiert der Hochpunkt $\underline{\underline{HOP\left(\ln(2) \,\middle|\, \frac{1}{2}\right)}}$. Da der Graph der Funktion in $[0; \ln(2)]$ fällt und stetig ist, muss zusätzlich ein Randminimum bei $x = 0$ existieren.

$$g(0) = \frac{\sqrt{e^0 - 1}}{e^0} = \frac{\sqrt{0}}{1} = 0$$

Übungsteil

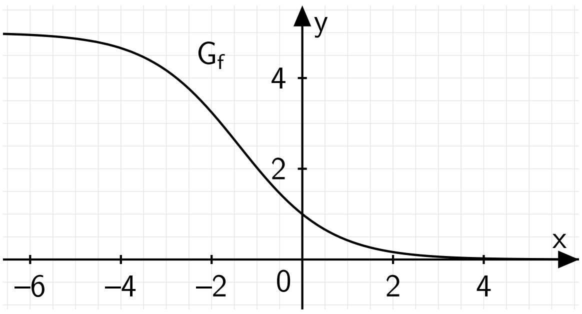
1.0 Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

1.1 Der Graph von g schneidet die x-Achse im Punkt X_0 und besitzt die Asymptote a. Geben Sie die Koordinaten von X_0 und die Gleichung von a an. **4 BE**

1.2 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen der Funktion g.

[Mögliches Teilergebnis: $g'(x) = -\frac{-1}{x^2+1}$] **4 BE**

2.0 Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{5}{4e^x+1}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Ein Ausschnitt des Graphen von f ist in der nebenstehenden Abbildung zu sehen. Der Term der Ableitung von f lautet $f'(x) = \frac{-20e^x}{(4e^x+1)^2}$.



2.1 Begründen Sie, warum f eine Umkehrfunktion besitzt, und geben Sie die Definitionsmenge der Umkehrfunktion von f an. **2 BE**

2.2 Weisen Sie nach, dass der Punkt $Q\,(2{,}5\,|\,-\ln(4))$ auf dem Graphen der Umkehrfunktion von f liegt, und ermitteln Sie die Steigung der Tangente an den Graphen der Umkehrfunktion von f im Punkt Q. **4 BE**

2.3 Untersuchen Sie, ob f eine Lösung der Differentialgleichung $y \cdot (1-y) = y' \cdot (e^{-x}-1)$ ist. **3 BE**

3 Zeigen Sie, dass gilt: $\int_1^4 (\ln(x) \cdot \sqrt{x})dx = \frac{32}{2}\ln(2) - \frac{28}{9}$. **5 BE**

1.1 **Koordinaten von X_0**

Schnitt mit der x-Achse heißt $y = g(x) = 0$. Wegen $\arctan(0) = 0$ gilt also:

$$\begin{aligned} & g(x) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \frac{x+1}{x-1} = 0 \\ \Rightarrow \quad & x+1 = 0 \qquad |-1 \\ \Longleftrightarrow \quad & x = -1 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $X_0\,(-1\,|\,0)$.

Gleichung der Asymptote

Es wird zunächst das Verhalten des Arguments des arctan für $x \to \pm\infty$ betrachtet. Da Zählergrad und Nennergrad gleich sind, ergibt sich der Grenzwert aus den Leitkoeffizienten:

$$x \to \pm\infty: \quad \frac{x+1}{x-1} = \frac{\mathbf{1}x+1}{\mathbf{1x}-1} \to \frac{1}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad x \to \pm\infty: \quad g(x) = \arctan\left(\underbrace{\frac{x+1}{x-1}}_{\to 1}\right) \to \frac{\pi}{4}$$

Demnach lautet die Gleichung der waagrechte Asymptote $\underline{\underline{y = \frac{\pi}{4}}}$.

1.2 **Ermitteln der ersten Ableitung**

Mithilfe von Ketten- und Quotientenregel wird die erste Ableitung bestimmt:

$$\begin{aligned} g(x) &= \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\ g'(x) &= \left[\frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + 1} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\ &= \left[\frac{1}{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} + 1} \cdot \left(\frac{(x+1)' \cdot (x-1) - (x+1) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2}\right)\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\ &= \frac{1}{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} + \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}} \cdot \left(\frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2}\right) && \text{(Anwendung)} \\ &= \frac{1}{\frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{(x-1)^2}} \cdot \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} && \text{(Brüche multiplizieren)} \\ &= \frac{-2}{\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{\cancel{(x-1)^2}} \cdot \cancel{(x-1)^2}} && \text{(Kürzen)} \\ &= \frac{-2}{(x+1)^2 + (x-1)^2} && \text{(binom. Formel)} \\ &= \frac{-2}{x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1} && \text{(Zusammenfassen)} \\ &= \frac{-2}{2x^2 + 2} && \text{(Ausklammern)} \\ &= \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}(x^2+1)} && \text{(Kürzen)} \end{aligned}$$

2020

$$= \frac{-1}{x^2+1} \qquad \text{(Zur Kontrolle angegeben)}$$

Monotonieverhalten

Der Nennerterm x^2+1 der ersten Ableitung beschreibt eine nach oben geöffnete und nach oben verschobene Normalparabel, nimmt also nur positive Werte an. Wegen dem negativen Vorzeichen im Nenner ist damit $g'(x) < 0$ für alle $x \in D_g$. Damit ist G_g auf dem ganzen Definitionsbereich, also in $]-\infty; 1[$ und $]1; \infty[$ streng monoton fallend.

2.1 **Begründung der Umkehrbarkeit**

In der gegebenen ersten Ableitung gilt $e^x > 0$ und $(4e^x+1)^2 > 0$. Wegen dem negativen Vorzeichen im Zählerterm der ersten Ableitung ist $f'(x) < 0$. Der Funktionsgraph G_f ist also streng monoton fallend in $D_f = \mathbb{R}$. Somit ist f umkehrbar.

Definitionsmenge der Umkehrfunktion

Diese entspricht der Wertemenge der Funktion f, welche sich, da G_f streng monoton fallend ist, aus dem Verhalten für $x \to \pm\infty$ ergibt.

$$\begin{aligned} x \to -\infty: \quad & f(x) = \frac{5}{\underbrace{4e^x}_{\to 0^+}+1} \to \frac{5}{1} = 5 \\ x \to \infty: \quad & f(x) = \frac{5}{\underbrace{4e^x}_{\to \infty}+1} \to 0 \end{aligned}$$

Die Wertemenge der Funktion f, die der Definitionsmenge der Umkehrfunktion entspricht, ergibt sich damit zu $W_f = \underline{\underline{D_{f^{-1}} =]0; 5[}}$.

2.2 **Nachweis der Koordinaten des Punktes Q**

Um zu zeigen, dass $Q\,(2{,}5\,|-\ln(4))$ auf $G_{f^{-1}}$ liegt, muss gezeigt werden, dass $(-\ln(4)\,|\,2{,}5)$ auf G_f liegt. Dafür wird in die Funktionsgleichung eingesetzt:

$$f(-\ln(4)) = \frac{5}{4e^{-\ln(4)}+1} = \frac{5}{\frac{4}{e^{\ln(4)}}+1} = \frac{5}{\frac{4}{4}+1} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Da $(-\ln(4)\,|\,2{,}5)$ auf G_f liegt, liegt $Q\,(2{,}5\,|-\ln(4))$ auf $G_{f^{-1}}$.

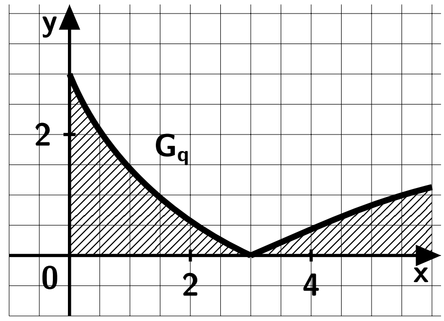
Steigung der Tangente

Um die Steigung der Tangente an den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} zu bestimmen, wird verwendet, dass $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ gilt. Damit gilt:

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(2{,}5) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(2{,}5))} = \frac{1}{f'(-\ln(4))} = \frac{(4e^{-\ln(4)}+1)^2}{-20e^{-\ln(4)}} = \frac{(\frac{4}{e^{\ln(4)}}+1)^2}{\frac{-20}{e^{\ln(4)}}} \\ &= \frac{(\frac{4}{4}+1)^2}{\frac{-20}{4}} = 2 \cdot \frac{4}{-20} = \underline{\underline{-\frac{4}{5}}} \end{aligned}$$

1 In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion q mit der Definitionsmenge $D_q = [0; 6]$ zu sehen. Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von q und der x-Achse soll mithilfe der Streifenmethode näherungsweise berechnet werden.

Ermitteln Sie die Obersumme O_4 für die schraffierte Fläche auf eine Nachkommastelle genau, und zwar bei einer Überdeckung mit 4 Rechtecken gleicher Breite. Entnehmen Sie benötigte Werte der Abbildung.



3 BE

2.0 Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 2 \cdot \arctan(3-5x-2x^2)$ und der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

2.1 Ermitteln Sie die Nullstellen von f und bestimmen Sie die Gleichung der Asymptote des Graphen von f. **4 BE**

2.2 Ermitteln Sie die x-Koordinate und die Art des Extrempunkts des Graphen von f. **5 BE**

3.0 Nun wird die Funktion $h : x \mapsto \frac{1}{2} - \frac{1}{1-e^x}$ mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ betrachtet.s

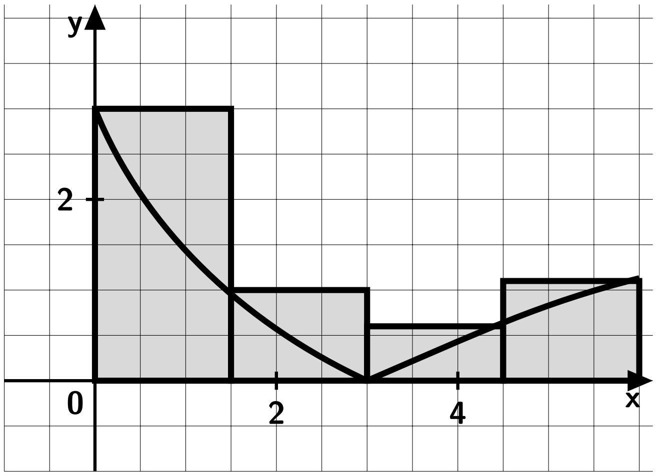
3.1 Untersuchen Sie, ob der Graph von h punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist. **3 BE**

3.2 Zeigen Sie, dass gilt: $1 + \frac{e^x}{1-e^x} = \frac{1}{1-e^x}$, und geben Sie eine Stammfunktion von h an. **4 BE**

3.3 Die Funktion h ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich). Ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von h. **3 BE**

1 **Obersumme der schraffierten Fläche**

Die Definitionsmenge ist [0; 6]. Da darauf 4 gleiche Intervalle aufgeteilt werden sollen, ergibt sich als Intervallbreite $\Delta x = 6 : 4 = 1{,}5$. Als Hilfestellung werden die Streifen in der Darstellung markiert:



Die Streifen werden dabei so gezeichnet, dass die linke oder rechte obere Ecke (je nachdem wo der höhere Funktionswert liegt) jeweils auf dem Graphen von q liegt. Basierend darauf kann nun eine Abschätzung der Obersumme erfolgen. Die Funktionswerte werden der Abbildung entnommen:

$$O_4 = \Delta x \cdot (q(0) + q(1{,}5) + q(4{,}5) + q(6)) \approx 1{,}5 \cdot (3 + 0{,}9 + 0{,}6 + 1{,}1) = \underline{\underline{8{,}4}}\,[\text{FE}]$$

2.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2 \cdot \arctan(3 - 5x - 2x^2)$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

2.1 **Nullstellen**

Die Nullstellen der arctan-Funktion liegen bei $\arctan(0) = 0$, also muss das Argument, hier also $3 - 5x - 2x^2$ gleich null sein:

$$\begin{aligned}
& & f(x) &= 0 \\
&\Rightarrow & 3 - 5x - 2x^2 &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & -2x^2 - 5x + 3 &= 0 \\
&\Rightarrow & x_{1;2} &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3}}{2 \cdot (-2)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2 \cdot (-2)} = \frac{5 \pm 7}{-4} \\
&\Rightarrow & \underline{\underline{x_1 = \frac{1}{2}}} &\quad \text{oder} \quad \underline{\underline{x_2 = -3}}
\end{aligned}$$

Gleichung der Asymptote

Um eine Gleichung der Asymptote zu finden, wird das Verhalten der Funktionswert für $x \to \pm\infty$ betrachtet:

$$x \to \pm\infty: \quad f(x) = 2 \cdot \overbrace{\arctan(\underbrace{3 - 5x - 2x^2}_{\to -\infty})}^{\to -\frac{\pi}{2}} \to 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$$

Es liegt eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $\underline{\underline{y = -\pi}}$ vor.

1.0 Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto 3 \cdot \ln\left(\frac{x^2 - 4x + 4}{4x - 14}\right)$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

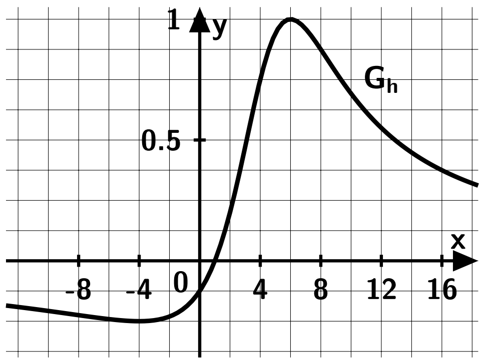
1.1 Weisen Sie nach, dass gilt: $D_f =]3{,}5; +\infty[$. Untersuchen Sie außerdem, ob G_f die x-Achse schneidet. **7 BE**

1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \to 3{,}5$ und für $x \to +\infty$ und geben Sie Art und Gleichung der Asymptote von G_f an. **6 BE**

1.3 Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten des Extrempunkts von G_f und geben Sie die Wertemenge von f an.

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = 3 \cdot \frac{x-5}{(x-2) \cdot (x-3{,}5)}$] **7 BE**

2.0 Gegeben sind die Funktionen $h : x \mapsto \frac{4x - 4}{(x-4)^2 + 16}$ und $H : x \mapsto \int\limits_0^x h(t)dt$ mit den Definitionsmengen $D_h = \mathbb{R}$ und $D_H = \mathbb{R}$. Ihre Graphen werden mit G_h bzw. G_H bezeichnet. Ein Ausschnitt von G_h ist in der nebenstehenden Abbildung zu sehen.



2.1 Geben Sie das Steigungsverhalten und das Krümmungsverhalten von G_H an. **5 BE**

2.2 Gegeben ist nun zusätzlich der Punkt $P\,(1\,|\,H(1))$. Geben Sie zunächst ohne weitere Berechnungen die Bedeutung von P für den Graphen von H an.

Berechnen Sie anschließend (z. B. mithilfe einer geeigneten Substitution) die y-Koordinate des Punktes P auf 3 Nachkommastellen genau. **8 BE**

3.0 In einem zylindrischen Gefäß befinden sich 240 Liter Wasser, in dem zum Zeitpunkt $t = 0$ eine bestimmte Menge Salz der Masse m_0 gelöst ist. Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ wird dem Gefäß zusätzliches Salzwasser mit konstanter Salzkonzentration gleichmäßig zugeführt und dort gründlich verrührt, während ebenso gleichmäßig ein Teil des durchmischten Salzwassers aus dem Gefäß abfließt. Dabei ist die in gleichen Zeitintervallen zugeflossene Flüssigkeitsmenge stets genauso groß wie die abgeflossene Flüssigkeitsmenge.

Die Masse des Salzes, welches zu einem bestimmten Zeitpunkt t im Gefäß im Wasser gelöst ist, wird durch die Funktion $m : t \mapsto m(t)$ beschrieben. Dabei wird t in Minuten und m(t) in kg angegeben. Die zeitliche Entwicklung der Masse m(t) des gelösten Salzes wird für $t \geq 0$ durch die folgende Differenzialgleichung beschrieben: $\dot{m}(t) + \frac{1}{120} \cdot m(t) = \frac{1}{5}$.

Auf das Mitführen der Einheiten kann bei nachfolgenden Berechnungen verzichtet werden.

3.1 Weisen Sie nach, dass die Funktion m_D mit der Gleichung $m_D(t) = D \cdot e^{-\frac{1}{120} \cdot t} + 24$ für beliebige Werte von $D \in \mathbb{R}$ eine Lösung der obigen Differenzialgleichung ist. Berechnen Sie außerdem, wie viel Salz zum Zeitpunkt $t = 0$ in dem Gefäß im Wasser gelöst sein muss, wenn es 48,6 Minuten dauert, bis in dem Gefäß im Wasser 12,0 kg Salz gelöst sind. **7 BE**

3.2 Begründen Sie, warum für $t \to +\infty$ der Wert von $\dot{m}(t)$ gegen 0 geht. Untersuchen Sie das Verhalten von m(t) für $t \to +\infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. **3 BE**

1.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3 \cdot \ln\left(\dfrac{x^2-4x+4}{4x-14}\right)$ mit $D_f \subset \mathbb{R}$.

1.1 **Definitionsmenge**

Der Logarithmus ist nur für Zahlen größer null definiert. Demnach muss der Term $\dfrac{x^2-4x+4}{4x-14}$ größer als null sein. Zunächst werden die Nullstellen von Zähler- und Nennerterm ermittelt:

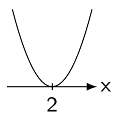
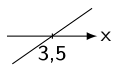
$$x^2-4x+4=0$$

$$\Rightarrow \qquad x_{1;2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} = \frac{4\pm 0}{2} = 2$$

Der Zählerterm besitzt eine doppelte Nullstelle bei $x = 2$. Für den Nennerterm gilt:

$$\begin{aligned} & & 4x-14 &= 0 & &|+14\\ &\iff & 4x &= 14 & &|:4\\ &\iff & x &= 3{,}5 & & \end{aligned}$$

Damit kann nun eine Vorzeichentabelle erstellt werden:

x	$x<2$	$x=2$	$2<x<3{,}5$	$x=3{,}5$	$3{,}5<x$	Skizzen
Zähler: x^2-4x+4	$+$	0	$+$	$+$	$+$	
Nenner: $4x-14$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\dfrac{x^2-4x+4}{4x-14}$	$-$	0	$-$	n.def.	$+$	

Der Bruchterm ist größer null für $x > 3{,}5$ und demnach ist die Funktion definiert für $\underline{\underline{D_f =]3{,}5;\ \infty[}}$.

Schnitt mit der x-Achse

Für den Logarithmus gilt allgemein $\ln(1) = 0$, also liegt ein Schnitt mit der x-Achse/eine Nullstelle vor, wenn der Bruchterm den Wert 1 annimmt:

$$\begin{aligned} & & \frac{x^2-4x+4}{4x-14} &= 1 & &|\cdot(4x-14)\\ &\iff & x^2-4x+4 &= 4x-14 & &|-(4x-14)\\ &\iff & x^2-8x+18 &= 0 & & \end{aligned}$$

Für diesen Term kann nun die Diskriminante betrachtet werden:

$$D = (-8)^2 - 4\cdot 1\cdot 18 = 64-72 = -8 < 0$$

Da die Diskriminante kleiner null ist, liegt keine Lösung und damit auch kein Schnitt von G_f mit der x-Achse vor.

1.2 **Verhalten der Funktionswerte für $x \to 3{,}5$ und $x \to \infty$**

Es wird jeweils separat das Verhalten des Bruchterms betrachtet und damit dann das Verhalten der Funktionswerte:

$$x \to 3{,}5^+: \quad \frac{\overbrace{x^2-4x+4}^{\to 15{,}75}}{\underbrace{4x-14}_{\to 0^+}} \to \infty \quad \Rightarrow \quad x \to 3{,}5^+: f(x) = 3 \cdot \ln\left(\underbrace{\frac{x^2-4x+4}{4x-14}}_{\to\infty}\right) \to \infty$$

$$x \to \infty: \quad \frac{\overbrace{x^2-4x+4}^{\to \infty}}{\underbrace{4x-14}_{\to \infty}} \to \infty \quad \Rightarrow \quad x \to \infty: f(x) = 3 \cdot \ln\left(\underbrace{\frac{x^2-4x+4}{4x-14}}_{\to\infty}\right) \to \infty$$

Der Grenzwert des Bruchs für $x \to \infty$ ergibt sich, da der Zählergrad ($ZG = 2$) größer als der Nennergrad ($NG = 1$) des Bruches ist.

Gleichung der Asymptote

Aus dem Verhalten für $x \to 3{,}5^+$ ergibt sich die Gleichung einer senkrechten Asymptote zu $\underline{\underline{x = 3{,}5}}$.

1.3 **Ermitteln der ersten Ableitung**

Die erste Ableitung wird mithilfe von Ketten- und Quotientenregel bestimmt:

$$f(x) = 3 \cdot \ln\left(\frac{x^2-4x+4}{4x-14}\right)$$

$$f'(x) = 3 \cdot \left[\frac{1}{\frac{x^2-4x+4}{4x-14}} \cdot \left(\frac{x^2-4x+4}{4x-14}\right)'\right] \qquad \text{(Ansatz Kettenregel)}$$

$$= 3 \cdot \left[\frac{4x-14}{x^2-4x+4} \cdot \frac{(x^2-4x+4)' \cdot (4x-14) - (x^2-4x+4) \cdot (4x-14)'}{(4x-14)^2}\right]$$

(Ansatz Quotientenregel)

$$= 3 \cdot \frac{\cancel{4x-14}}{x^2-4x+4} \cdot \frac{(2x-4) \cdot (4x-14) - (x^2-4x+4) \cdot 4}{(4x-14)^{\cancel{2}1}} \qquad \text{(Kürzen)}$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{x^2-4x+4} \cdot \frac{8x^2-16x-28x+56-4x^2+16x-16}{4x-14} \qquad \text{(Zusammenfassen)}$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{x^2-4x+4} \cdot \frac{4x^2-28x+40}{4x-14} \qquad \text{(4 ausklammern)}$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{x^2-4x+4} \cdot \frac{\cancel{4} \cdot (x^2-7x+10)}{\cancel{4} \cdot (x-3{,}5)} \qquad \text{(Kürzen)}$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{x^2-4x+4} \cdot \frac{x^2-7x+10}{x-3{,}5}$$

Um weiter vereinfache zu können werden die quadratischen Terme faktorisiert dargestellt. Für den Term x^2-4x+4 wurde bereits ermittelt, dass $x = 2$ eine doppelte Nullstelle ist, sodass $x^2-4x+4 = (x-2)(x-2)$ gilt. Für den Term $x^2-7x+10$ gilt:

$$x_{1;2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

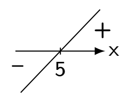
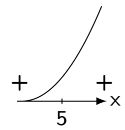
$$\Rightarrow \quad x_1 = 2 \quad \text{oder} \quad x_2 = 5$$

Entsprechend ist $x^2 - 7x + 10 = (x-2) \cdot (x-5)$ und für die Ableitung gilt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3 \cdot \frac{1}{x^2 - 4x + 4} \cdot \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 3{,}5} \\
&= 3 \cdot \frac{1}{(x-2) \cdot \cancel{(x-2)}} \cdot \frac{\cancel{(x-2)} \cdot (x-5)}{x - 3{,}5} && \text{(Kürzen)} \\
&= 3 \cdot \frac{1}{x-2} \cdot \frac{x-5}{x-3{,}5} && \text{(Zusammenfasen)} \\
&= 3 \cdot \frac{x-5}{(x-2) \cdot (x-3{,}5)} && \text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}$$

Art und Koordinaten des Extrempunkts

Der Nennerterm der ersten Ableitung besitzt zwei direkt ablesbare Nullstellen $x = 2$ und $x = 3{,}5$. Da es sich um eine nach oben geöffnete Parabel handelt, ist das Vorzeichen der Parabel rechts der Nullstelle $x = 3{,}5$ stets positiv. Wegen $D_f =]3{,}5; \infty[$ ist der Nennerterm der ersten Ableitung als stets positiv. Der Zählerterm beschreibt eine steigende Gerade mit ablesbarer Nullstelle $x = 5$. Es gilt:

x	$3{,}5 < x < 5$	$x = 5$	$3 < x$	Skizzen
$f'(x)$-Zähler: $x - 5$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$-Nenner: $(x-2) \cdot (x-3{,}5)$	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	
G_f	$\searrow$	TIP	$\nearrow$	

Aus dem Monotonieverhalten folgt, dass bei $x = 5$ ein absoluter Tiefpunkt von G_f vorliegt. Für den Funktionswert an dieser Stelle gilt:

$$f(5) = 3 \cdot \ln\left(\frac{5^2 - 4 \cdot 5 + 4}{4 \cdot 5 - 14}\right) = 3 \cdot \ln\left(\frac{9}{6}\right) = 3 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Der absolute Tiefpunkt von G_f hat die Koordinaten $\underline{\underline{TIP\left(5 \,\middle|\, 3\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)}}$.

Wertemenge

Aus den Koordinaten des absoluten Tiefpunkts ergibt sich $y = 3\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ als untere Grenze der Wertemenge. In Teilaufgabe 1.2 wurde außerdem gezeigt, dass die Funktionswerte an den Rändern der Definitionsmenge gegen ∞ verlaufen. Demnach ist $\underline{\underline{W_f = \left[3\ln\left(\frac{3}{2}\right); \infty\right[}}$.

2.0 Gegeben sind nun die Funktionen $h(x) = \dfrac{4x - 4}{(x-4)^2 + 16}$ und $H(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)dt$ mit $D_h = D_H = \mathbb{R}$.

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Ein Schreiner hat sich auf die Herstellung maßangefertigter Möbel spezialisiert. Er fertigt seine Möbel aus Fichten- oder Buchenholz und bietet sie mit gewachster (G) oder lackierter (L) Oberfläche an.
Erfahrungsgemäß entscheiden sich 40 % seiner Kunden für Möbel aus Fichtenholz (F).
Jeder dritte Kunde, der Möbel aus Fichtenholz in Auftrag gibt, bestellt diese mit lackierter Oberfläche. Unter den Kunden, die sich für die Holzart Buche (B) entscheiden, beträgt der Anteil derer, die ihre Möbel mit gewachster Oberfläche bestellen, 75 %.

1.1 Berechnen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms den prozentualen Anteil von gewachsten Möbeln am Verkauf. **4 BE**

1.2 Berechnen Sie $P(B \cup G)$. **2 BE**

2.0 Für eine Zufallsgröße X ist die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung mit $a, b \in \mathbb{R}$ durch folgende Tabelle vollständig gegeben:

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	a	$b - a$	0,2	b	0,08	0,02

2.1 Bestimmen Sie die Werte für die Parameter a und b, wenn $E(X) = 3{,}12$ gilt.
[Teilergebnis: $a = 0{,}1$] **4 BE**

2.2 Die Lieferzeiten für die Möbel des Schreiners aus 1.0 sind abhängig von verschiedenen Faktoren, wie z.B. Auftragslage und Bestellumfang. Der Schreiner hat sich über Jahre hinweg die Lieferzeiten ab Auftragseingang notiert, um möglichst genaue Angaben zu den Lieferzeiten machen zu können.
Die unter 2.0 aufgeführte Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den unter 2.1 bestimmten Werten für a und b beschreibt die Lieferzeiten für die Möbel innerhalb der letzen Jahre. Die Zufallsgröße X gibt die Lieferzeit ab Bestelldatum in vollen Wochen an. Lieferzeiten von mehr als sechs Wochen kamen bisher nicht vor.
Interpretieren Sie den Erwartungswert von X im Sachzusammenhang und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

E1: „Die Lieferzeit beträgt höchstens vier Wochen."

E2: „Bei genau drei von neun Bestellungen erfolgt die Lieferung der Möbel innerhalb einer Woche."

E3: „Bei zehn nacheinander eingegangen Bestellungen erfolgt nur bei der letzten die Lieferung der Möbel erst in der sechsten Woche, alle anderen erfolgen früher."

6 BE

3.0 Gegen eine Gebühr liefert der Schreiner die gekauften Möbel an seine Kunden aus. Von insgesamt 200 Kunden stammen 80 aus einem Umkreis von 50 km (U) um den Standort der Schreinerei. 128 Kunden nehmen den Lieferservice nicht in Anspruch ($\overline{\text{L}}$).

Um die Auslieferungen besser planen zu können, hat der Schreiner in der folgenden Tabelle die Anzahl der zu beliefernden Kunden (L) - also insgesamt 72 - je nach Bestellumfang und Lieferort dargestellt.

	U	$\overline{\text{U}}$
$\leq$ 2 Möbelstücke	7	17
$>$ 2 Möbelstücke	18	30

3.1 Ergänzen Sie die nebenstehende Vierfeldertafel mithilfe der obigen Angaben.

Bestimmen Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Kunde mehr als 50 km von der Schreinerei entfernt wohnt und seine Möbel selbst abholt.

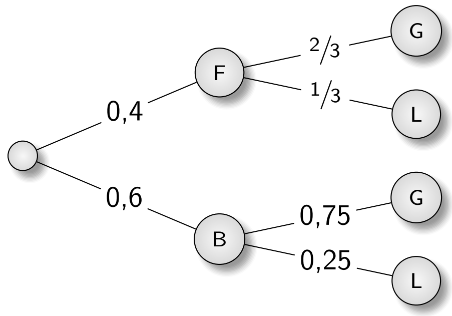
	U	$\overline{\text{U}}$	$\sum$
L			
$\overline{\text{L}}$			
$\sum$			200

4 BE

3.2 Beschreiben Sie mit eigenen Worten jeweils die Bedeutung der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_U(\overline{L})$ bzw. $P_{\overline{U}}(\overline{L})$ im Sachzusammenhang (ohne sie zu berechnen) und interpretieren Sie die hier geltende Beziehung $P_U(\overline{L}) > P_{\overline{U}}(\overline{L})$ im Sinne der vorliegenden Thematik. **3 BE**

1.1 **Erstellen eines Baumdiagramms zur Bestimmung des prozentualen Anteils von gewachsten Möbeln am Verkauf**

Laut Angabe entscheiden sich 40 % der Kunden für Möbel aus Fichtenholz (F), wovon jeder dritte Kunden eine lackierte Oberfläche (L) wünscht. Der Anteil an Kunden, die Buchenholz (B) mit gewachster Oberfläche wünschen, beträgt 75 %.



$P(\{FG\}) = 0{,}4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$

P(G)

$P(\{BG\}) = 0{,}6 \cdot 0{,}75 = 0{,}45$

Die Wahrscheinlichkeit P(G) gilt es nun zu bestimmen.

$$P(G) = P(\{FG\}) + P(\{BG\}) = \frac{4}{15} + 0{,}45 \approx 0{,}72$$

Somit liegt der Anteil von gewachsten Möbeln am Verkauf bei ca. $\underline{\underline{72\,\%}}$.

1.2 **Berechnen der Wahrscheinlichkeit $P(B \cup G)$**

Bei $P(B \cup G)$ wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass Buchenholz oder eine gewachste Oberfläche (oder beides) gekauft wird. Für die Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(B \cup G) = 1 - P(\overline{B} \cap \overline{G}) = 1 - P(F \cap L) = 1 - 0{,}4 \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{13}{15}}}$$

2.1 **Werte der Parameter a und b**

Aus den Angaben können zwei Gleichungen gewonnen werden. Die erste Gleichung ergibt sich, da die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten 1 ergeben muss (Normierungsbedingung).

$$\begin{array}{lrl}
\text{(I)} & a + (b - a) + 0{,}2 + b + 0{,}08 + 0{,}02 = 1 & \\
\iff & 2b + 0{,}3 = 1 & |-0{,}3 \\
\iff & 2b = 0{,}7 & |:2 \\
\iff & \underline{\underline{b = 0{,}35}} &
\end{array}$$

Eine zweite Gleichung ergibt sich, da $E(X) = 3{,}12$ ist. Für die Bestimmung von a wird dabei direkt der ermittelt Wert von b eingesetzt:

$$\begin{array}{lrl}
\text{(II)} & 1 \cdot a + 2 \cdot (0{,}35 - a) + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}35 + 5 \cdot 0{,}08 + 6 \cdot 0{,}02 = 3{,}12 & \\
\iff & a + 0{,}7 - 2a + 0{,}6 + 1{,}4 + 0{,}4 + 0{,}12 = 3{,}12 & \\
\iff & -a + 3{,}22 = 3{,}12 & |-3{,}22 \\
\iff & -a = -0{,}1 & |\cdot(-1) \\
\iff & \underline{\underline{a = 0{,}1}} &
\end{array}$$

Die gesuchten Werte sind a = 0,1 und b = 0,35. Damit lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung, die nicht gefragt, allerdings für die darauffolgende Aufgabe hilfreich ist:

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,1	0,25	0,2	0,35	0,08	0,02

2.2 **Erwartungswert von X im Sachzusammenhang interpretieren**

Da die Zufallsgröße X die Lieferzeit in Wochen angibt, beschreibt der Erwartungswert dieser Größe die durchschnittliche Lieferzeit ab Bestelldatum in Wochen.

Ermitteln der Wahrscheinlichkeiten

E_1: „Die Lieferzeit beträgt höchstens vier Wochen."

$$\begin{aligned} P(E_1) &= P(X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= 0{,}1 + 0{,}25 + 0{,}2 + 0{,}35 = \underline{\underline{0{,}9}} \end{aligned}$$

E_2: „Bei genau drei von neun Bestellungen erfolgt die Lieferung der Möbel innerhalb einer Woche."
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung innerhalb einer Woche erfolgt, beträgt p = 0,1. Die Wahrscheinlichkeit, dass dies bei genau drei der neun Bestellungen passiert ergibt sich also zu:

$$\begin{aligned} P(E_2) &= B(9; 0{,}1; 3) \approx \underline{\underline{0{,}04464}} \quad \text{[Tafelwerk] oder als alternative rechnerisch:} \\ &= \binom{9}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^6 \approx \underline{\underline{0{,}04464}} \end{aligned}$$

E_3: „Bei zehn nacheinander eingegangen Bestellungen erfolgt nur bei der letzten die Lieferung der Möbel erst in der sechsten Woche, alle anderen erfolgen früher."
Die Lieferung in der sechsten Woche hat eine Wahrscheinlichkeit von p = 0,02. Dementsprechend hat eine frühere Lieferung eine Wahrscheinlichkeit von $1 - p = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$. Wenn neun Lieferungen früher und die zehnte in der sechsten Woche stattfinden, gilt für die zugehörige Wahrscheinlichkeit:

$$P(E_3) = 0{,}02 \cdot 0{,}98^9 \approx \underline{\underline{0{,}01667}}$$

3.1 **Ergänzen der gegebenen Vierfeldertafel und Ermitteln der gesuchten Wahrscheinlichkeit**

80 der 200 Kunden stammen aus nahem Umkreis (U). Insgesamt nehmen 128 Kunden den Lieferservice nicht in Anspruch ($\overline{L}$). Aus der Tabelle folgt zudem: Von den zu beliefernden Kunden wohnen $7 + 18 = 25$ in nahem Umkreis ($U \cap L$) und $17 + 30 = 47$ außerhalb des 50 km-Umkreises ($\overline{U} \cap L$). Damit kann nun die gegebene Vierfeldertafel vollständig ergänzt werden:

	U	$\overline{U}$	$\sum$
L	25	47	72
$\overline{L}$	55	73	128
$\sum$	80	120	200

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde mehr als 50 km von der Schreinerei entfernt ist $P(\overline{U})$ und seine Möbel selbst abholt $P(\overline{L})$, kann dann mithilfe der Werte aus der Vierfeldertafel berechnet werden:

$$P(\overline{U} \cap \overline{L}) = \frac{73}{200} = \underline{\underline{0{,}365}}$$

3.2 **Bedeutung der angegebenen bedingten Wahrscheinlichkeiten**

$P_U(\overline{L})$: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Kunde, der im Umkreis von 50 km vom Standort der Schreinerei wohnt, seine Möbel selbst abholt/nicht liefern lässt.

$P_{\overline{U}}(\overline{L})$: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Kunde, der weiter als 50 km vom Standort der Schreinerei wohnt, seine Möbel selbst abholt/nicht liefern lässt.

Interpretation der gegebenen Beziehung

Die Wahrscheinlichkeit für eine Selbstabholung ist unter den Kunden höher, die in der näheren Umgebung der Schreinerei wohnen.

Aufgaben Index

Analysis

A

D

E

F

G

I

K

M

N

R

S

U

W

Stochastik

A

B

E

F

H

K

S

V

W

DEINE NEUE
LERNPLATTFORM
UNTER

HTTPS://LERN.DE
ODER
HTTPS://ABITUR.GURU

PERFEKT VORBEREITET AUF DIE ABI-PRÜFUNG FOS·BOS 13 Bayern 2022

ENTWICKELT VON PÄDAGOGEN

- An den LehrplanPLUS angepasste Original-Prüfungen
- Anschauliche, ausführliche und nachvollziehbare Lösungswege
- Miniskript mit Beispielen zzgl. Übungsteil mit ausführlichen Lösungen
- Mit Musterprüfungen im Stil der neuen Abiturprüfung
- Mit Operatoren als Handlungsanweisungen
- Inkl. neuer Anpassungen für die Prüfung 2022

Abi-Trainer für FOS · BOS 13 MT 2022

DIGITALES COACHING

- Neue Lernplattform mit geschützem Mitgliederbereich
- Themenbezogene, kurze, verständliche Lernvideos
- Individuelles Online-Coaching
- Prüfungsvorbereitung Online
- Immer auf dem aktuellsten Stand

Alle weiteren Informationen auf www.lern.de

SCAN ME

Hier wachsen kluge Köpfe

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Bestell-Nr. : EAN 9783743000773

FOS·BOS 13. Klasse | Abitur | Bayern

ISBN 978-3-7430-0077-3

€ 11,90

9 783743 000773 >

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
lernverlag
Fürstenrieder Straße 52
80686 München
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de