

2022 Training

Abschlussprüfung

**MEHR
ERFAHREN**

Realschule Bayern

Mathematik I

+ Ausführliche Lösungen
+ Hinweise und Tipps

LÖSUNGEN



STARK

Inhalt

Vorwort
Hinweise zur Prüfung

Training Grundwissen	1
1 Grundwissen 5.–8. Klasse	3
1.1 Binomische Formeln	3
1.2 Extremwertbestimmung bei quadratischen Termen	5
1.3 Lineare Gleichungen und Ungleichungen	8
Verknüpfung von linearen Gleichungen und Ungleichungen	12
Doppelungleichungen	14
1.4 Bruchterme und Bruchgleichungen	16
Bruchterme	16
Bruchgleichungen	23
1.5 Vektoren	24
Regel „Spitze minus Fuß“	24
Berechnungen mithilfe von Vektoren	25
Mittelpunktsberechnung einer Strecke	26
Vektoraddition – Pfeilketten	27
Drehung von Pfeilen bzw. Vektoren	28
Berechnung der Koordinaten von Bildpunkten bei Drehungen	30
1.6 Lineare Funktionen	32
Direkte Proportionalität	32
Ursprungsgeraden: $y = m \cdot x$	33
Zeichnen von Ursprungsgeraden	34
Geraden in beliebiger Lage – Die Normalform: $y = mx + t$	35
Berechnung der Geradengleichung mithilfe zweier Punkte	36
Zeichnen von Geraden	37
Punkt-Steigungs-Form: $y = m(x - x_p) + y_p$	39
Parallele und orthogonale Geraden	40
Normalform, Punkt-Steigungs-Form und allgemeine Form	42
1.7 Funktionen der indirekten Proportionalität (Hyperbeln)	43
2 Grundwissen 9. Klasse	46
2.1 Lineare Gleichungssysteme	46
Grafisches Lösungsverfahren	46
Rechnerische Lösungsverfahren	48
2.2 Flächeninhalt ebener Figuren	52
Dreiecke	52
Vierecke	54

	Flächenberechnung mithilfe von Vektoren im Koordinatensystem	56
	Funktionale Abhängigkeiten – Veränderung von ebenen Figuren	58
2.3	Reelle Zahlen	64
	Die Quadratwurzel	64
	Irrationale Zahlen	64
	Die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R}	64
	Rechnen mit Wurzeltermen	65
2.4	Quadratische Funktionen	68
	Die Funktion mit der Gleichung $y = x^2$	68
	Funktionen mit Gleichungen der Form $y = a \cdot x^2$	68
	Die Scheitelform: $y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$	70
	Von der Scheitelform zur allgemeinen Form	71
	Von der allgemeinen Form zur Scheitelform	72
	Berechnen von Parabelgleichungen	72
	Extremwerte	74
	Parabelscharen – Bestimmung von Trägergraphen	78
	Parallelverschiebung von Parabeln	80
	Umkehrung quadratischer Funktionen	82
2.5	Quadratische Gleichungen	84
	Diskriminante und Lösungsformel	85
	Nullstellen von Parabeln	87
	Schnitt von Parabel und Gerade	88
	Schnitt von Parabel mit Parabel – System quadratischer Gleichungen	90
	Schnitt von Parabel und Parabelschar – Parabeltangente	95
	Schnitt von Parabel und Geradenbüschel	97
	Quadratische Ungleichungen	99
	Wurzelgleichungen	101
2.6	Abbildung durch zentrische Streckung	103
	Vierstreckensätze	103
	Schwerpunkt im Dreieck	108
	Zentrische Streckung von Pfeilen – Skalar-Multiplikation	109
2.7	Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck	117
	Der Kathetensatz	117
	Der Höhensatz	118
	Der Satz des Pythagoras	120
	Folgerungen aus dem Satz des Pythagoras	122
2.8	Berechnungen am Kreis	124
	Flächeninhalt und Umfang eines Kreises	124
	Kreisteile – Kreissektor und Kreisbogen	125
	Das Kreissegment	127
2.9	Raumgeometrie	128
	Zeichnen von Schrägbildern	128
	Prisma	130
	Pyramide	132
	Zylinder	138
	Kegel	140
	Kugel	144

3	Grundwissen 10. Klasse	146
3.1	Potenzen und Potenzfunktionen	146
	Potenzgesetze	147
	Potenzfunktionen	149
	Potenzen mit rationalen und reellen Exponenten	156
3.2	Exponential- und Logarithmusfunktionen	162
	Exponentialfunktionen der Form $y = a^x$	162
	Exponentialfunktionen der Form $y = k \cdot a^x$	163
	Abbildung durch Parallelverschiebung	164
	Der Logarithmus	165
	Der dekadische Logarithmus	166
	Logarithmen mit beliebiger Basis	167
	Exponentialgleichungen	168
	Die Logarithmensätze	169
	Die Logarithmusfunktion	171
	Logarithmusfunktionen der Form $y = k \cdot \log_a x$	172
	Abbildung durch Parallelverschiebung	173
	Bestimmung von Umkehrfunktionen	174
	Wachstums- und Abklingprozesse	177
3.3	Trigonometrie	184
	Polarkoordinaten	184
	Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis	185
	Umrechnung: Polarkoordinaten – kartesische Koordinaten	186
	Kartesische Koordinaten spezieller Winkelmaße	187
	Sinus- und Kosinuswerte negativer Winkelmaße	188
	Die Supplementbeziehungen	189
	Die Komplementbeziehungen	190
	Bestimmung von Winkelmaßen – Gradmaß	191
	Bogenmaß und Bogenlänge am Einheitskreis	193
	Die Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion	195
	Bestimmung von Winkelmaßen – Bogenmaß	197
	Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck	199
	Sinussatz und Kosinussatz	205
	Goniometrische Gleichungen	213
	Additionstheoreme des Sinus und Kosinus	216
	Goniometrische Gleichungen – Lösung mit den Additionstheoremen	217
	Extremwertbestimmung bei trigonometrischen Termen	219
3.4	Skalarprodukt von Vektoren	224
	Skalarprodukt von orthogonalen Vektoren	224
	Anwendungen des Skalarprodukts orthogonaler Vektoren	227
	Skalarprodukt beliebiger Vektoren	230
	Anwendung des Skalarprodukts beliebiger Vektoren	231
3.5	Abbildungen im Koordinatensystem	233
	Abbildungsvorschriften mit Vektoren und Matrizen – Matrixschreibweise	233
	Achsen Spiegelung an einer Ursprungsgeraden	234
	Drehung	238
	Parallelverschiebung	244
	Abbildung durch zentrische Streckung	247

Orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse	250
Verknüpfung von Abbildungen	253
Fixelemente	260
Eigenschaften der Abbildungen im Koordinatensystem	263

Komplexe Aufgaben 265

Exponential- und Logarithmusfunktionen	267
Ebene Geometrie	269
Räumliche Geometrie	270

Aufgaben im Stil der Prüfung 273

Teil A	275
Teil B	278

Original-Abschlussprüfung 281

Abschlussprüfung 2020	2020-1
Teil A	2020-1
Teil B	2020-4

Abschlussprüfung 2021 www.stark-verlag.de/mystark

Das Corona-Virus hat auch im vergangenen Schuljahr die Prüfungsabläufe beeinflusst. Um dir die Prüfung 2021 schnellstmöglich zur Verfügung stellen zu können, bringen wir sie in digitaler Form heraus. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2021 zur Veröffentlichung freigegeben sind, kannst du sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen (Zugangscode vorne im Buch).



Dieses Buch ist in zwei Versionen erhältlich: mit und ohne ActiveBook. Hast du die Ausgabe **mit ActiveBook** (91510ML) erworben, kannst du mit dem **Interaktiven Training** online mit vielen zusätzlichen interaktiven Aufgaben zu allen prüfungsrelevanten Kompetenzbereichen trainieren.

Die **interaktiven Aufgaben** sind im Buch mit diesem Button gekennzeichnet. Am besten gleich ausprobieren!



Ausführliche Infos inkl. Zugangscode findest du in der Ausgabe mit ActiveBook auf den **Farbseiten** vorne in diesem Buch.

Autoren: Markus Schmidl unter Mitarbeit von Markus Hochholzer

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem Buch kannst du dich langfristig und nachhaltig auf die Abschlussprüfung in Mathematik vorbereiten. Außerdem eignet es sich zur schuljahresbegleitenden Vorbereitung auf Schulaufgaben.

Das Buch besteht aus sechs Teilen:

► **Grundwissen 5.–8. Klasse**

Hier kannst du nachschlagen, wenn du in einem bestimmten Bereich aus den früheren Schuljahren Probleme hast. Die prüfungsrelevanten Inhalte sind mit Beispielen erklärt.

► **Grundwissen 9. Klasse**

In diesem Kapitel wird der Stoff der 9. Jahrgangsstufe anhand von Beispielen erläutert. Die Aufgaben in diesem Kapitel eignen sich sowohl zur Vorbereitung auf Schulaufgaben in der 9. Klasse als auch zur Wiederholung prüfungsrelevanter Themenbereiche.

► **Grundwissen 10. Klasse**

In diesem Kapitel werden alle Themenbereiche der 10. Jahrgangsstufe mit Beispielen erklärt. Zu jedem Themenbereich findest du hier vielfältige Aufgaben. Diese sind so konzipiert, dass sie gezielt auf die Abschlussprüfung bzw. auf die Schulaufgaben der 10. Klasse vorbereiten.

► **Komplexe Aufgaben**

Dieses Kapitel enthält Aufgaben, die nach den Themenbereichen der Abschlussprüfung geordnet sind. Sie greifen auch auf das Grundwissen der vorhergehenden Jahrgangsstufen zurück, das für die Abschlussprüfung relevant ist.

► **Aufgaben im Stil der Prüfung**

Dieses Kapitel enthält Aufgaben, die wie in der Abschlussprüfung zusammengestellt und bewertet sind. So kannst du prüfen, ob du fit bist für die Abschlussprüfung in Mathematik. Der Umfang und Schwierigkeitsgrad der Aufgaben entspricht jeweils den einzelnen Prüfungsteilen der Abschlussprüfung.

► **Original-Abschlussprüfungen 2020 und 2021**

Die Abschlussprüfungen dienen dazu, unter Prüfungsbedingungen anhand einer echten Abschlussprüfung zu üben. Versuche, die jeweilige Abschlussprüfung zusammenhängend in der Prüfungszeit von 150 min zu lösen.

Zu allen Aufgaben der einzelnen Kapitel gibt es **ausführliche Lösungen** mit hilfreichen **Hinweisen und Tipps**. Diese findest du in einem separaten **Lösungsbuch (Bestell-Nr. 915101L)**, damit die Versuchung sofort nachzuschlagen nicht zu groß ist. Zuerst solltest du versuchen, selbst die Lösung zu finden und dann mit dem Lösungsbuch vergleichen. Aus den gemachten Fehlern wirst du am meisten lernen!

Wenn du den Inhalt dieses Buches beherrscht, bist du bestens auf die Prüfung vorbereitet.

Viel Erfolg in der Prüfung!



Markus Schmidl

1 Grundwissen 5.–8. Klasse

1.1 Binomische Formeln

Eine zweigliedrige Summe, die aus genau zwei Zahlensymbolen besteht, die durch + oder – getrennt sind, wie z. B. $a + b$ oder $ab - cd$, wird als **Binom** (griechisch: bi = zwei; nomen = Namen) bezeichnet.

Die Regel für die Multiplikation von „Summe mal Summe“ lässt sich auch auf den Sonderfall anwenden, dass die Summen gleich sind bzw. sich nur in einem Rechenzeichen unterscheiden:

$$(a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Diese drei Sonderfälle kommen in Rechnungen häufig vor. Um Zeit zu sparen und vorteilhaft rechnen zu können, lohnt es sich darum sehr, sich die 3 binomischen Formeln gut zu merken.

Merke

Binomische Formeln

1. binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. binomische Formel: $(a + b) \cdot (a - b) = (a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$

Statt $(a + b)(a + b)$ schreibt man $(a + b)^2$, statt $(a - b)(a - b)$ schreibt man $(a - b)^2$.

Beispiele

$$\begin{aligned} 1. \quad & (\underbrace{2x}_a + \underbrace{5z}_b)^2 \\ &= \underbrace{(2x)^2}_a + 2 \cdot \underbrace{2x}_a \cdot \underbrace{5z}_b + \underbrace{(5z)^2}_b \\ &= 4x^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot x \cdot z + 25z^2 \\ &= 4x^2 + 20xz + 25z^2 \end{aligned}$$

Wende die 1. binomische Formel
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ an.

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \left(\underbrace{\frac{1}{2}u}_a - \underbrace{\frac{2}{3}}_b \right)^2 \\
 &= \left(\underbrace{\frac{1}{2}u}_a \right)^2 - 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2}u}_a \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_b + \left(\underbrace{\frac{2}{3}}_b \right)^2 \\
 &= \frac{1}{4}u^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot u + \frac{4}{9} \\
 &= \frac{1}{4}u^2 - \frac{2}{3}u + \frac{4}{9}
 \end{aligned}$$

Wende die 2. binomische Formel
 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ an.

$$\begin{aligned}
 3. \quad & (\underbrace{0,6s^2}_a + \underbrace{0,8t}_b) \cdot (\underbrace{0,6s^2}_a - \underbrace{0,8t}_b) \\
 &= (\underbrace{0,6s^2}_a)^2 - (\underbrace{0,8t}_b)^2 \\
 &= 0,36s^4 - 0,64t^2
 \end{aligned}$$

Wende die 3. binomische Formel
 $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ an.

Aufgaben

1

Gib das zugehörige Binom an.

a) $25b^2 + 40bc + 16c^2$

b) $\frac{9}{16}m^2 + \frac{3}{4}mp + \frac{1}{4}p^2$

c) $0,25 - 36g^2$

d) $0,81a^8 - 49a^{-6}$

2

Berechne.

a) $(2p+q)^2 - (2p-q)^2$

b) $\left(\frac{3}{4}u - 0,8v\right)^2$

c) $(a^3 - 3b^2)^2$

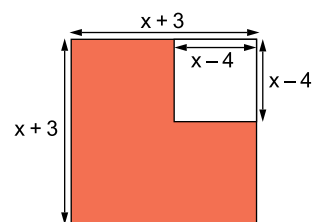
d) $(4a-5)^2 - (6a+7)^2 + 5(2a+4)(2a-4)$

e) $(3y+2)^3$

f) $(\sqrt{8} - 3\sqrt{18})^2$

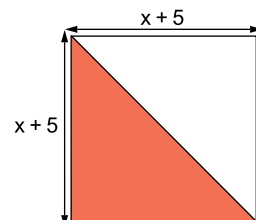
3

Stelle den Flächeninhalt des roten Bereichs in Abhängigkeit von x dar. Vereinfache den entstehenden Term so weit wie möglich.



4

Stelle den Flächeninhalt des roten Bereichs in Abhängigkeit von x dar. Vereinfache den entstehenden Term so weit wie möglich.



Interaktive
Aufgaben

- 1. Binomische Formel anwenden
- 2. Binomische Formel anwenden
- 3. Term faktorisieren

- 4. Term faktorisieren
- 5. Flächeninhalt bestimmen

1.2 Extremwertbestimmung bei quadratischen Termen

Ein Term heißt **quadratischer Term**, wenn die **höchste vorkommende Potenz** der Variablen den **Wert 2** hat.

Beispiele $5a^2$ $y^2 - 5$ $4x^2 + 12xy + 9y^2$ $(x+3)(x-2)$

Merke

Alle quadratischen Terme besitzen einen **Extremwert**, also entweder einen **maximalen Termwert T_{\max}** oder einen **minimalen Termwert T_{\min}** .

Beispiele

1. $T(x) = x^2 \quad x \in \mathbb{R}$
 $T_{\min} = 0$ für $x = 0$

Der minimale (kleinste) Wert, den der Term x^2 annehmen kann, ist 0, da das Quadrat einer Zahl aus \mathbb{R} stets größer oder gleich 0 ist. Diesen kleinsten Wert 0 nimmt der Term für die Belegung $x = 0$ an.

2. $T(x) = -x^2 + 17 \quad x \in \mathbb{R}$
 $T_{\max} = 17$ für $x = 0$

Der Term x^2 liefert Werte größer oder gleich 0.
 Der Term $-x^2$ liefert also Werte kleiner oder gleich 0.
 Der Term $-x^2 + 17$ liefert demnach Werte kleiner oder gleich 17, da zu jedem Termwert des Terms $-x^2$ jeweils 17 addiert wird.
 Seinen größten Wert 17 nimmt der Term für die Belegung $x = 0$ an.

Merke

Extremwerte von Termen der Form: $T(x) = a(x-m)^2 + n$

Wenn **$a > 0$** ist, besitzen Terme der Form $a(x-m)^2 + n$ ein **Minimum n** für $x = m$.

Man schreibt: $T_{\min} = n$ für $x = m$

Wenn **$a < 0$** ist, besitzen Terme der Form $a(x-m)^2 + n$ ein **Maximum n** für $x = m$.

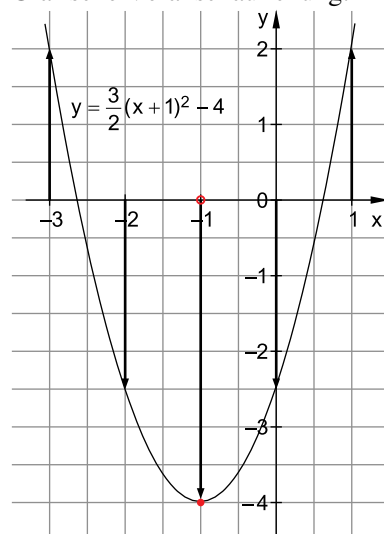
Man schreibt: $T_{\max} = n$ für $x = m$

Beispiel

$T(x) = \frac{3}{2}(x+1)^2 - 4 \quad x \in \mathbb{R}$
 $T_{\min} = -4$ für $x = -1$

Der quadratische Teilterm $\frac{3}{2}(x+1)^2$ nimmt für alle Belegungen Werte größer oder gleich 0 an. Der kleinste Wert 0 des Teilterms wird für $x = -1$ angenommen, da dann die Klammer den Wert 0 annimmt. Der Gesamtterm nimmt also seinen minimalen Wert $T_{\min} = 0 - 4 = -4$ für $x = -1$ an. (Hier: $a = \frac{3}{2}$; $m = -1$; $n = -4$)

Grafische Veranschaulichung:



Der Term $T(x)$ hat das Minimum
 $T_{\min} = -4$ für $x = -1$.

Aufgabe 194



Interaktive Aufgabe

3. Zehner-
potenzen

Licht breitet sich mit einer Geschwindigkeit von etwa $3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ aus. Wie lange bräuchte ein Raumschiff, dass sich mit $\frac{1}{1000}$ der Lichtgeschwindigkeit bewegt, um

- die Erde zu umrunden (Erdumfang ca. 40 000 km)?
- von der Erde aus die Sonne zu erreichen? (Entfernung Erde–Sonne: ca. $1,5 \cdot 10^8$ km)

Potenzfunktionen

Gleichungen der Form $y = x^n$ in $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit variabler Basis x und konstantem Exponenten $n \in \mathbb{N}$ legen **Potenzfunktionen** fest.

Potenzfunktionen der Form $y = x^n$

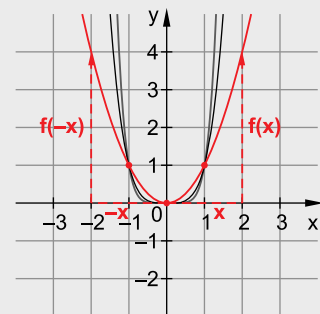
Merke

Die Graphen zu Funktionen f mit $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) heißen Parabeln n -ter Ordnung. Sie verlaufen durch den Ursprung $O(0|0)$ und durch den Punkt $(1|1)$.

Hinweis: $y = x^0$ und $y = x^1$ könnten auch als Gleichungen von Potenzfunktionen interpretiert werden. Dies ist aber nicht üblich.

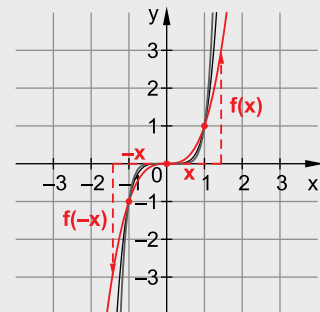
Parabeln gerader Ordnung (n gerade)

- Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- Wertemenge: $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$
- gemeinsame Punkte: $(1|1)$, $(-1|1)$ und $O(0|0)$
- Symmetrieeigenschaften:
Der Graph ist achsensymmetrisch bezüglich der y -Achse, d. h.: $f(-x) = f(x)$
(Gleichung der Symmetrieachse $s: x = 0$)



Parabeln ungerader Ordnung (n ungerade)

- Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- Wertemenge: $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
- gemeinsame Punkte: $(1|1)$, $(-1|-1)$ und $O(0|0)$
- Symmetrieeigenschaften:
Der Graph ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs $O(0|0)$, d. h.: $f(-x) = -f(x)$



Beispiele

Parabeln gerader Ordnung
(n ist eine gerade Zahl):

- $n=2$ $f_1: y = x^2$ Parabel 2. Ordnung
 $n=4$ $f_2: y = x^4$ Parabel 4. Ordnung
 $n=6$ $f_3: y = x^6$ Parabel 6. Ordnung

Parabeln ungerader Ordnung
(n ist eine ungerade Zahl):

- $n=3$ $f_4: y = x^3$ Parabel 3. Ordnung
 $n=5$ $f_5: y = x^5$ Parabel 5. Ordnung
 $n=7$ $f_6: y = x^7$ Parabel 7. Ordnung

Abschlussprüfung an Realschulen 2020
Bayern – Mathematik I

Teil A

Aufgabe A 1

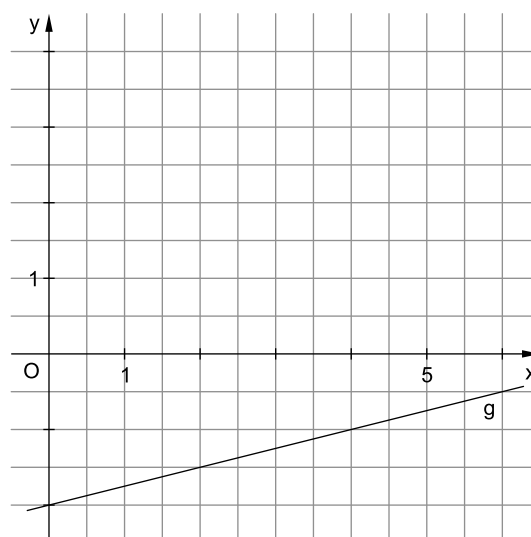
A 1.0 Der Punkt $A(0|0)$ ist gemeinsamer Eckpunkt von Dreiecken AB_nC_n .
 Die Punkte $B_n(x|0,25x-2)$ liegen auf der Geraden g mit $y=0,25x-2$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Es gilt:

$$\sphericalangle B_nAC_n = 50^\circ$$

$$\overline{AC_n} = 1,5 \cdot \overline{AB_n}.$$

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



1 Punkt

A 1.1 Zeichnen Sie das Dreieck AB_1C_1 für $x=4$ in das Koordinatensystem zu A 1.0 ein.

3 Punkte

A 1.2 Für das Dreieck AB_2C_2 gilt: $x=8$.

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes C_2 .



© **STARK Verlag**

www.pearson.de
info@pearson.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.