2022 Training
Abschlussprüfung

MEHR ERFAHREN

Realschule Bayern

Mathematik I

+ *Ausführliche Lösungen*
+ *Hinweise und Tipps*

LÖSUNGEN

STARK

Inhalt

Das Corona-Virus hat auch im vergangenen Schuljahr die Prüfungsabläufe beeinflusst. Um dir die Prüfung 2021 schnellstmöglich zur Verfügung stellen zu können, bringen wir sie in digitaler Form heraus. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2021 zur Veröffentlichung freigegeben sind, kannst du sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen (Zugangscode vorne im Buch).

Dieses Buch ist in zwei Versionen erhältlich: mit und ohne ActiveBook. Hast du die Ausgabe **mit ActiveBook** (91510**ML**) erworben, kannst du mit dem **Interaktiven Training** online mit vielen zusätzlichen interaktiven Aufgaben zu allen prüfungsrelevanten Kompetenzbereichen trainieren.

Die **interaktiven Aufgaben** sind im Buch mit diesem Button gekennzeichnet. Am besten gleich ausprobieren!

Ausführliche Infos inkl. Zugangscode findest du in der Ausgabe mit ActiveBook auf den **Farbseiten** vorne in diesem Buch.

Autoren: Markus Schmidl unter Mitarbeit von Markus Hochholzer

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem Buch kannst du dich langfristig und nachhaltig auf die Abschlussprüfung in Mathematik vorbereiten. Außerdem eignet es sich zur schuljahresbegleitenden Vorbereitung auf Schulaufgaben.

Das Buch besteht aus sechs Teilen:

- **Grundwissen 5.–8. Klasse**
  Hier kannst du nachschlagen, wenn du in einem bestimmten Bereich aus den früheren Schuljahren Probleme hast. Die prüfungsrelevanten Inhalte sind mit Beispielen erklärt.
- **Grundwissen 9. Klasse**
  In diesem Kapitel wird der Stoff der 9. Jahrgangsstufe anhand von Beispielen erläutert. Die Aufgaben in diesem Kapitel eignen sich sowohl zur Vorbereitung auf Schulaufgaben in der 9. Klasse als auch zur Wiederholung prüfungsrelevanter Themenbereiche.
- **Grundwissen 10. Klasse**
  In diesem Kapitel werden alle Themenbereiche der 10. Jahrgangsstufe mit Beispielen erklärt. Zu jedem Themenbereich findest du hier vielfältige Aufgaben. Diese sind so konzipiert, dass sie gezielt auf die Abschlussprüfung bzw. auf die Schulaufgaben der 10. Klasse vorbereiten.
- **Komplexe Aufgaben**
  Dieses Kapitel enthält Aufgaben, die nach den Themenbereichen der Abschlussprüfung geordnet sind. Sie greifen auch auf das Grundwissen der vorhergehenden Jahrgangsstufen zurück, das für die Abschlussprüfung relevant ist.
- **Aufgaben im Stil der Prüfung**
  Dieses Kapitel enthält Aufgaben, die wie in der Abschlussprüfung zusammengestellt und bepunktet sind. So kannst du prüfen, ob du fit bist für die Abschlussprüfung in Mathematik. Der Umfang und Schwierigkeitsgrad der Aufgaben entspricht jeweils den einzelnen Prüfungsteilen der Abschlussprüfung.
- **Original-Abschlussprüfungen 2020 und 2021**
  Die Abschlussprüfungen dienen dazu, unter Prüfungsbedingungen anhand einer echten Abschlussprüfung zu üben. Versuche, die jeweilige Abschlussprüfung zusammenhängend in der Prüfungszeit von 150 min zu lösen.

Zu allen Aufgaben der einzelnen Kapitel gibt es **ausführliche Lösungen** mit hilfreichen **Hinweisen und Tipps**. Diese findest du in einem separaten **Lösungsbuch (Bestell-Nr. 915101L)**, damit die Versuchung sofort nachzuschlagen nicht zu groß ist. Zuerst solltest du versuchen, selbst die Lösung zu finden und dann mit dem Lösungsbuch vergleichen. Aus den gemachten Fehlern wirst du am meisten lernen!
Wenn du den Inhalt dieses Buches beherrscht, bist du bestens auf die Prüfung vorbereitet.

Viel Erfolg in der Prüfung!

Markus Schmidl

1 Grundwissen 5.–8. Klasse

1.1 Binomische Formeln

Eine zweigliedrige Summe, die aus genau zwei Zahlensymbolen besteht, die durch + oder – getrennt sind, wie z. B. $a+b$ oder $ab-cd$, wird als **Binom** (griechisch: bi = zwei; nomen = Namen) bezeichnet.
Die Regel für die Multiplikation von „Summe mal Summe“ lässt sich auch auf den Sonderfall anwenden, dass die Summen gleich sind bzw. sich nur in einem Rechenzeichen unterscheiden:

$$(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)\cdot(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$$

Diese drei Sonderfälle kommen in Rechnungen häufig vor. Um Zeit zu sparen und vorteilhaft rechnen zu können, lohnt es sich darum sehr, sich die 3 binomischen Formeln gut zu merken.

Merke

Binomische Formeln
1. binomische Formel: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
2. binomische Formel: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3. binomische Formel: $(a+b)\cdot(a-b)=(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$
Statt $(a+b)(a+b)$ schreibt man $(a+b)^2$, statt $(a-b)(a-b)$ schreibt man $(a-b)^2$.

Beispiele

1. $(\underbrace{2x}_{a}+\underbrace{5z}_{b})^2$

$=\underbrace{(2x)}_{a}{}^2+2\cdot\underbrace{2x}_{a}\cdot\underbrace{5z}_{b}+\underbrace{(5z)}_{b}{}^2$

$=4x^2+2\cdot2\cdot5\cdot x\cdot z+25z^2$

$=4x^2+20xz+25z^2$

Wende die 1. binomische Formel $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ an.

2. $\left(\underbrace{\frac{1}{2}u}_{a} - \underbrace{\frac{2}{3}}_{b}\right)^2$

$= \left(\underbrace{\frac{1}{2}u}_{a}\right)^2 - 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2}u}_{a} \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_{b} + \left(\underbrace{\frac{2}{3}}_{b}\right)^2$

$= \frac{1}{4}u^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot u + \frac{4}{9}$

$= \frac{1}{4}u^2 - \frac{2}{3}u + \frac{4}{9}$

Wende die 2. binomische Formel $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ an.

3. $(\underbrace{0,6s^2}_{a} + \underbrace{0,8t}_{b}) \cdot (\underbrace{0,6s^2}_{a} - \underbrace{0,8t}_{b})$

$= (\underbrace{0,6s^2}_{a})^2 - (\underbrace{0,8t}_{b})^2$

$= 0,36s^4 - 0,64t^2$

Wende die 3. binomische Formel $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ an.

Aufgaben

1 Gib das zugehörige Binom an.

a) $25b^2 + 40bc + 16c^2$

b) $\frac{9}{16}m^2 + \frac{3}{4}mp + \frac{1}{4}p^2$

c) $0,25 - 36g^2$

d) $0,81a^8 - 49a^{-6}$

2 Berechne.

a) $(2p+q)^2 - (2p-q)^2$

b) $\left(\frac{3}{4}u - 0,8v\right)^2$

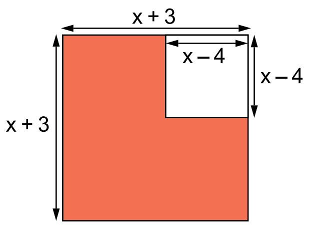
c) $(a^3 - 3b^2)^2$

d) $(4a-5)^2 - (6a+7)^2 + 5(2a+4)(2a-4)$

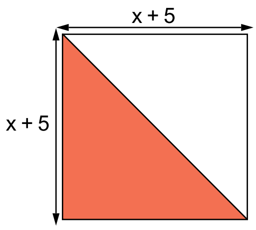
e) $(3y+2)^3$

f) $\left(\sqrt{8} - 3\sqrt{18}\right)^2$

3 Stelle den Flächeninhalt des roten Bereichs in Abhängigkeit von x dar. Vereinfache den entstehenden Term so weit wie möglich.



4 Stelle den Flächeninhalt des roten Bereichs in Abhängigkeit von x dar. Vereinfache den entstehenden Term so weit wie möglich.



Interaktive Aufgaben

1. Binomische Formel anwenden
2. Binomische Formel anwenden
3. Term faktorisieren
4. Term faktorisieren
5. Flächeninhalt bestimmen

1.2 Extremwertbestimmung bei quadratischen Termen

Ein Term heißt **quadratischer Term**, wenn die **höchste vorkommende Potenz** der Variablen den **Wert 2** hat.

Beispiele

$5a^2 \quad y^2-5 \quad 4x^2+12xy+9y^2 \quad (x+3)(x-2)$

Merke

Alle quadratischen Terme besitzen einen **Extremwert**, also entweder einen **maximalen Termwert T_{max}** oder einen **minimalen Termwert T_{min}**.

Beispiele

1. $T(x)=x^2 \quad x\in\mathbb{R}$
   $T_{min}=0$ für $x=0$

   Der minimale (kleinste) Wert, den der Term x^2 annehmen kann, ist 0, da das Quadrat einer Zahl aus $\mathbb{R}$ stets größer oder gleich 0 ist. Diesen kleinsten Wert 0 nimmt der Term für die Belegung $x=0$ an.

2. $T(x)=-x^2+17 \quad x\in\mathbb{R}$
   $T_{max}=17$ für $x=0$

   Der Term x^2 liefert Werte größer oder gleich 0.
   Der Term $-x^2$ liefert also Werte kleiner oder gleich 0.
   Der Term $-x^2+17$ liefert demnach Werte kleiner oder gleich 17, da zu jedem Termwert des Terms $-x^2$ jeweils 17 addiert wird.
   Seinen größten Wert 17 nimmt der Term für die Belegung $x=0$ an.

Merke

Extremwerte von Termen der Form: $T(x)=a(x-m)^2+n$

Wenn $\mathbf{a>0}$ ist, besitzen Terme der Form $a(x-m)^2+n$ ein **Minimum** n für $x=m$.
Man schreibt: $T_{min}=n$ für $x=m$

Wenn $\mathbf{a<0}$ ist, besitzen Terme der Form $a(x-m)^2+n$ ein **Maximum** n für $x=m$.
Man schreibt: $T_{max}=n$ für $x=m$

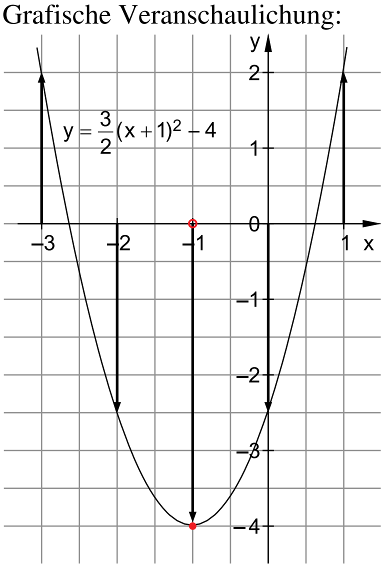
Beispiel

$T(x)=\frac{3}{2}(x+1)^2-4 \quad x\in\mathbb{R}$

$T_{min}=-4$ für $x=-1$

Der quadratische Teilterm $\frac{3}{2}(x+1)^2$ nimmt für alle Belegungen Werte größer oder gleich 0 an. Der kleinste Wert 0 des Teilterms wird für $x=-1$ angenommen, da dann die Klammer den Wert 0 annimmt. Der Gesamtterm nimmt also seinen minimalen Wert $T_{min}=0-4=-4$ für $x=-1$ an. (Hier: $a=\frac{3}{2}$; $m=-1$; $n=-4$)

Grafische Veranschaulichung:



Der Term T(x) hat das Minimum $T_{min}=-4$ für $x=-1$.

189 Schreibe als Bruch und berechne den Wert des Bruchs.

a) 4^{-3} b) 8^{-2}

c) $(-2)^{-3}$ d) -2^{-3}

190 Bestimme den Wert von x.

a) $1\ \text{mm} = 10^x\ \text{m}$ b) $1\ \text{mm}^2 = 10^x\ \text{m}^2$

c) $1\ \text{mm}^3 = 10^x\ \text{m}^3$ d) $1\ \text{mg} = 10^x\ \text{t}$

Potenzgesetze

Merke

Die 5 Potenzgesetze

Für $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. Potenzen mit **gleicher Basis** werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. Potenzen mit **gleicher Basis** werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3. Potenzen mit **gleichem Exponenten** werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert und den Exponenten beibehält. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
4. Potenzen mit **gleichem Exponenten** werden dividiert, indem man die Basen dividiert und den Exponenten beibehält. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
5. Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert und die Basis beibehält. $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$

Beispiele

1. $12^2 \cdot 12^5 - y^2 \cdot y^3 = 12^{2+5} - y^{2+3} = 12^7 - y^5$

Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis: Anwendung des 1. Potenzgesetzes

2. $12^2 : 12^5 - y^2 : y^3 = 12^{2-5} - y^{2-3} = 12^{-3} - y^{-1} = \frac{1}{12^3} - \frac{1}{y}$

Division von Potenzen mit gleicher Basis: Anwendung des 2. Potenzgesetzes

3. $18^3 \cdot 6^3 = (18 \cdot 6)^3 = 108^3$

Multiplikation von Potenzen mit gleichen Exponenten: Anwendung des 3. Potenzgesetzes

4. $18^3 : 6^3 = (18 : 6)^3 = 3^3$

Division von Potenzen mit gleichen Exponenten: Anwendung des 4. Potenzgesetzes

5. $\left(2^5\right)^3 - \left(a^4\right)^2 = 2^{5 \cdot 3} - a^{4 \cdot 2} = 2^{15} - a^8$

Potenzieren von Potenzen: Anwendung des 5. Potenzgesetzes

Merke

Vielfache von **gleichen Potenzen** können zusammengefasst werden.

Beispiele

1. $3{,}5a^4 + 5b^2 - 1{,}9c^6 + 2{,}2a^4 - 2{,}7b^2$ Sortieren
   $= 3{,}5\mathbf{a^4} + 2{,}2\mathbf{a^4} + 5\mathbf{b^2} - 2{,}7\mathbf{b^2} - 1{,}9c^6$ Zusammenfassen
   $= 5{,}7\mathbf{a^4} + 2{,}3\mathbf{b^2} - 1{,}9c^6$
2. $301y^3 - 11y^2$ Lässt sich nicht zusammenfassen!

Aufgaben

Interaktive Aufgaben
1. Potenzen zusammenfassen
2. Potenzen vereinfachen

191 Vereinfache mithilfe der Potenzgesetze.

a) $(5^{-4} : 5^3) \cdot 5^9$

b) $\dfrac{3x^6 \cdot 2x^4}{2x^2 \cdot 5x^3}$

c) $\left(\dfrac{4}{ab}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{a^3b^2}{4}\right)^3$

d) $\left(2x^2y^3\right)^3 \cdot \left(5x^3y\right)^2$

e) $\dfrac{36x^4}{6x^{-5}} + \dfrac{30x^2}{5x^{-3}}$

f) $(a^2 + 6a + 9) \cdot (a + 3)^3$

192 Vereinfache mithilfe der Potenzgesetze.

a) $\dfrac{x^{2n-1}}{x^{n+3}}$

b) $\dfrac{(xy)^{4n-2}}{(xy)^{2(n-1)}}$

c) $\dfrac{\left(a^2 - b^2\right)^{3x}}{(a+b)^{3x}}$

d) $\dfrac{(a+b)^{12x+5}}{(b+a)^{8x}}$

e) $a^x \cdot a^{x-1} : a^{2x}$

f) $(n + 0{,}25m)^{0{,}5x-1} \cdot (n + 0{,}25m)^{1+0{,}5x}$

g) $\left(\dfrac{1}{2}a\right)^b \cdot (16a^2)^b$

h) $\left(\dfrac{5}{x}\right)^{2a+1} \cdot (2x)^{2a+1}$

193 Fasse zu einer einzigen Potenz zusammen und berechne den Potenzwert.

a) $16^3 : \left[-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3}\right]$

b) $(\sqrt{32})^{-1} : (\sqrt{72})^{-1}$

c) $\dfrac{6^{-2} \cdot 24^{-2}}{36^{-2}}$

d) $2^{-4} \cdot \dfrac{0{,}125}{8^{-3}}$

Merke

Potenzen mit der Basis 10 werden als **Zehnerpotenzen** bezeichnet. Die **Stufenzahlen** (1; 10; 100; 1 000; …) des Dezimalsystems lassen sich mittels der Potenzschreibweise kürzer darstellen:

$1 = 10^0$ $10 = 10^1$ $100 = 10^2$ … $1\,000\,000 = 10^6$ …

Jede Zahl lässt sich daher als Produkt aus einer Zahl zwischen 1 und 10 und einer Zehnerpotenz schreiben.

Beispiele

1. Entfernung Erde–Mond: $384\,000$ km $= 3{,}84 \cdot 10^5$ km
2. Masse der Erde: $6\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ kg $= 6 \cdot 10^{24}$ kg

Aufgabe 194

Interaktive Aufgabe

3. Zehnerpotenzen

Licht breitet sich mit einer Geschwindigkeit von etwa $3 \cdot 10^5 \frac{km}{s}$ aus. Wie lange bräuchte ein Raumschiff, dass sich mit $\frac{1}{1\,000}$ der Lichtgeschwindigkeit bewegt, um

a) die Erde zu umrunden (Erdumfang ca. 40 000 km)?

b) von der Erde aus die Sonne zu erreichen? (Entfernung Erde–Sonne: ca. $1{,}5 \cdot 10^8$ km)

Potenzfunktionen

Gleichungen der Form $y = x^n$ in $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit variabler Basis x und konstantem Exponenten $n \in \mathbb{N}$ legen **Potenzfunktionen** fest.

Potenzfunktionen der Form $y = x^n$

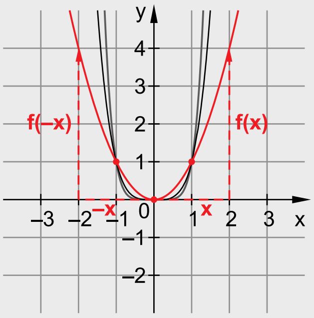
Merke

Die Graphen zu Funktionen f mit $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) heißen Parabeln n-ter Ordnung. Sie verlaufen durch den Ursprung $O(0\,|\,0)$ und durch den Punkt $(1\,|\,1)$.

Hinweis: $y = x^0$ und $y = x^1$ könnten auch als Gleichungen von Potenzfunktionen interpretiert werden. Dies ist aber nicht üblich.

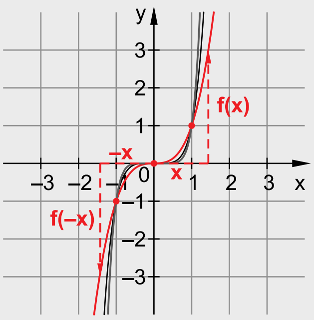
Parabeln gerader Ordnung (n gerade)

- Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- Wertemenge: $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$
- gemeinsame Punkte: $(1\,|\,1)$, $(-1\,|\,1)$ und $O(0\,|\,0)$
- Symmetrieeigenschaften:
  Der Graph ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse, d. h.: $\mathbf{f(-x) = f(x)}$
  (Gleichung der Symmetrieachse s: $x = 0$)



Parabeln ungerader Ordnung (n ungerade)

- Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- Wertemenge: $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
- gemeinsame Punkte: $(1\,|\,1)$, $(-1\,|\,-1)$ und $O(0\,|\,0)$
- Symmetrieeigenschaften:
  Der Graph ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs $O(0\,|\,0)$, d. h.: $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$



Beispiele

Parabeln gerader Ordnung
(n ist eine gerade Zahl):

$n = 2$ f_1: $y = x^2$ Parabel 2. Ordnung
$n = 4$ f_2: $y = x^4$ Parabel 4. Ordnung
$n = 6$ f_3: $y = x^6$ Parabel 6. Ordnung

Parabeln ungerader Ordnung
(n ist eine ungerade Zahl):

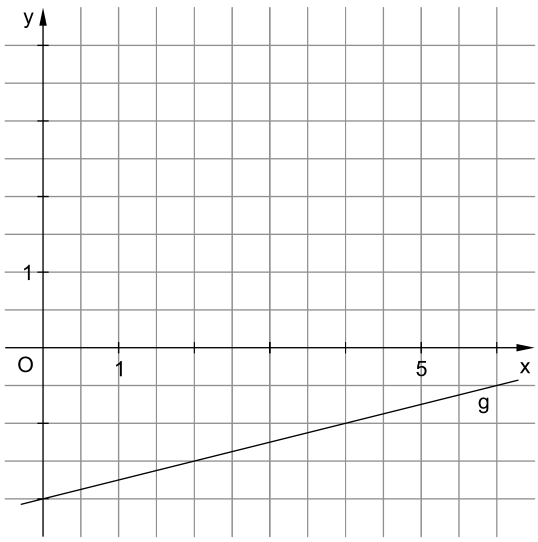
$n = 3$ f_4: $y = x^3$ Parabel 3. Ordnung
$n = 5$ f_5: $y = x^5$ Parabel 5. Ordnung
$n = 7$ f_6: $y = x^7$ Parabel 7. Ordnung

Abschlussprüfung an Realschulen 2020
Bayern – Mathematik I

Teil A

Aufgabe A 1

A 1.0 Der Punkt $A(0|0)$ ist gemeinsamer Eckpunkt von Dreiecken AB_nC_n.
Die Punkte $B_n(x|0{,}25x-2)$ liegen auf der Geraden g mit $y=0{,}25x-2$ $(\mathbb{G}=\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.
Es gilt:
$\sphericalangle B_nAC_n = 50°$
$\overline{AC_n} = 1{,}5\cdot\overline{AB_n}$.
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



1 Punkt A 1.1 Zeichnen Sie das Dreieck AB_1C_1 für $x=4$ in das Koordinatensystem zu A 1.0 ein.

3 Punkte A 1.2 Für das Dreieck AB_2C_2 gilt: $x=8$.
Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes C_2.