12. Klasse

FOS·BOS
Fachabitur Bayern

Mathematik Nichttechnik

- Die ideale Prüfungsvorbereitung -

FOS·BOS 2022

BLICK ins BUCH
inkl. Prüfung 2021

DIGITALES COACHING

FOS·BOS 12

FOS·BOS 12. Klasse | Fachabitur | Bayern

LehrplanPLUS

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Abiturprüfung

Mathematik Nichttechnik

FOS | BOS 12

Bayern 2022

erstellt

für Schülerinnen und Schüler
der Beruflichen Oberschule
nichttechnischer Zweig
in Bayern

INKL. Original-Prüfung 2021 mit Lösungen

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Vorwort

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler,
liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,

in diesem Band **Abiturprüfung Mathematik Nichttechnik 2022 FOS/BOS Bayern 12. Klasse** sind die letzten vier zentral gestellten Original-Prüfungen der Jahre 2018 bis **2021** enthalten. Weiterhin haben wir die Musterprüfung nach LehrplanPLUS zu Übungszwecken auch in dieser Auflage mit abgedruckt. Dazu gibt es schülergerechte, lehrplankonforme und ausführliche Lösungen, die für den Schüler leicht verständlich und nachvollziehbar erstellt worden sind. **Inklusive Original-Prüfung 2021 mit Lösungen.**
Das Prüfungsvorbereitungsbuch ist eine ideale Unterstützung während der Abschlussklasse und dient zur Vorbereitung auf eine erfolgreiche Abschlussprüfung.

Hinweise

Die **Abschlussprüfung 2022** findet nach Vorgaben des *Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus* am **31.05.2022** statt und dauert **180 Minuten**. (Stand 01.09.2021)
Als **Hilfsmittel** ist ein nichtprogrammierbarer elektronischer Taschenrechner und die Merkhilfe zugelassen.

Neues - Lernplattform kommt

Wir haben eine neue **Lernplattform** eingerichtet und bauen diese sukzessive auf. Hier findet man im gesicherten Mitgliederbereich hilfreiche Erklär- und Lösungsvideos zu vielen Prüfungsthemen und zu den Lösungen der Original-Prüfungen dieses Buches. Jetzt bei **https://lern.de** oder **https://abitur.guru** einen Platz sichern.
Zeit- und ortsunabhängig online für einzelne Arbeiten in der Schule oder das Fachabitur 2022 an Beruflichen Oberschulen in Bayern lernen.

Tipps

Fangen Sie rechtzeitig mit den Vorbereitungen auf die Abschlussprüfung an und arbeiten Sie kontinuierlich alte Prüfungen durch. Wiederholen Sie die einzelnen Prüfungen mehrmals, um die notwendige Sicherheit zu erlangen. Zur Lernkontrolle können Sie den Prüfungsplaner im Innenteil dieses Prüfungsvorbereitungsbuch verwenden.
Üben Sie also, so oft Sie können.

Notenschlüssel

Der Notenschlüssel wird vom *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* festgelegt. In der folgenden Tabelle finden Sie den Notenschlüssel.

Notenschlüssel

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
−	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
−	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
−	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
−	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
−	1	26	20
6	0	19	0

Impressum

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
Geschäftsführer: Sascha Jankovic
Fürstenrieder Str. 52
80686 München
Amtsgericht München: HRB 205623
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de – https://www.lern-verlag.de
lernverlag. lern.de und cleverlag sind eingetragene Markenzeichen von Sascha Jankovic, Inhaber und Verleger.
Druck: Deutschland
Lösungen Analysis und Stochastik MNT:
StR Verena Reffler (Memmingen), Sascha Jankovic, Simon Rümmler und das Team der lern.de Bildungsgesellschaft mbH
Lösungen Stochastik MT:
StD Roland Wittmann (Neuburg a.d. Donau)

Wir danken dem *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* für die freundliche Genehmigung, die Original-Prüfungen abdrucken zu dürfen. Die Lösungsvorschläge liegen nicht in der Verantwortung des Ministeriums.

6. ergänzte Auflage © 2021 **1. Druck**
ISBN-Nummer: 978-3-7430-0079-7
Artikelnummer:
EAN 9783743000797

Aktuelles Rund um die Prüfung 2022 und diesem Buch

Als kleiner Verlag schreiben wir für alle Schüler:innen nachvollziehbare, verständliche und ausführliche Lösungen zu den Original-Prüfungen und versuchen unsere Titel auch während des Schuljahres immer aktuell zu halten. Da wir seit über 20 Jahren individuelle Lernförderung durchführen, stehen bei uns alle Schüler:innen an erster Stelle, wenn es um Fragen rund um das Buch, Verständnisprobleme bei dem ein oder anderen Thema oder Wünsche geht.
Egal ob es um übersehene Rechtschreibfehler, Rechenfehler oder auch Wünsche von Lehrer:innen oder Schüler:innen geht, wir setzen uns sofort hin und versuchen Gewünschtes umzusetzen. Es kostet niemanden etwas, und alle profitieren davon, auch wenn wir Mehrarbeit durch diesen kostenlosen Service haben.

Wir erreichen Sie uns am besten?

Schreiben Sie uns eine E-Mail an **kontakt@lern-verlag.de**

Schreiben Sie uns eine Nachricht, schicken Sie ein Foto von der betroffenen Seite. Wir prüfen, ändern und veröffentlichen bei Bedarf im kostenlosen Downloadbereich des lernverlags die durchgeführten Änderungen.

WhatsApp-Business
+49 89 54 64 52 00

Sie können uns gerne unter der selben Nummer anrufen.

Digitales zu diesem Buch

Unter **https://lern.de** bauen wir gerade eine Lernplattform auf.
Du suchst ein Video über Polynomdivision oder Vierfeldertafel und bekommst aktuell auf anderen Plattformen 50 Videos angezeigt mit unterschiedlichen Erklärungen? Das soll sich ändern. Ein Begriff und maximal 3 Videos, die eventuell zusammenhängen.
Wir arbeiten unter Hochdruck daran, kurze animierte Erklärvideos, passend zum Unterrichtssoff und „ON-TOP“ Lösungsvideos zu den Original-Prüfungen zu erstellen.
Schau öfters einmal vorbei oder melde dich am besten zu unserem **Newsletter** an, der **maximal zweimal pro Monat** verschickt wird.

Änderungen in dieser Neuauflage 2021/2022 - ISBN: 978-3-7430-0079-7

- Aus pädagogischen Gründen und zu Übungszwecken die Prüfung 2018 im Buch gelassen
- Aktuelles mit eingebaut
- Zwei kleine Rechenfehler behoben
- Diese ergänzte Auflage ist noch umfangreicher als die Vorauflage
- **Original-Prüfung 2021 inkl. ausführlichen Lösungen eingebaut**

Unsere Autoren

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Nichttechnik Fachabitur**:
StR Verena Reffler (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Nichttechnik Abitur**:
StD Dr. Michael Fuchs (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Technik Fachabitur**:
StD Roland Wittmann (Neuburg a. d. Donau); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Lösungen zu den Original-Prüfungen **Technik Abitur**:
StD Roland Wittmann (Neuburg a. d. Donau); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Alle Prüfungsteile, die identisch in Nichttechnik und Technik abgeprüft werden, sind dementsprechend doppelt korrigiert.

Miniskript und Übungsaufgaben:
StD Dr. Michael Fuchs (Memmingen); Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Musterprüfungen Fachabitur und Abitur:
Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Übungsaufgaben im Miniskript:
Simon Rümmler (TU Dresden); Sascha Jankovic (lern.de)

Die Autoren wünschen viel Erfolg bei der **Abschlussprüfung 2022**.

Inhaltsverzeichnis

MINISKRIPT - Analysis

Seite

MINISKRIPT - Stochastik

Operatoren

Operatoren sind bestimmte Handlungsanweisungen, die sicherstellen, dass bei bestimmten Aufgabenstellungen stets das Gleiche verstanden und umgesetzt wird.

Operator	Bedeutung für den Lösungsansatz
berechnen Sie	Sie berechnen das Ergebnis und die Lösungswege müssen nachvollziehbar und vollständig sein.
bestimmen bzw. ermitteln Sie	Sie berechnen das Ergebnis oder beschreiben das Ergebnis durch die in der Angabe vorhandenen Informationen.
begründen Sie	Sie begründen durch die Informationen in der Angabe ihr Ergebnis und bestätigen durch Herleitungen Ihre Schlussfolgerungen.
begründen Sie rechnerisch	Sie begründen durch die Informationen in der Angabe ihr Ergebnis und bestätigen durch Rechnung Ihre Schlussfolgerungen.
beweisen, zeigen Sie	Das Ergebnis wird im gegebenen Sachverhalt bewiesen, eventuell auch durch eine Herleitung.
entscheiden Sie	Es werden mehrere Alternativen angeben, und Sie entscheiden sich für eine.
erläutern Sie	Sie geben die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts anhand von Beispielen wieder.
interpretieren Sie	Sie analysieren die wesentlichen Merkmale des Sachverhalts wieder und interpretieren diese.
nennen Sie, geben Sie an	Sie nennen Fakten oder Sachverhalten ohne diese wiederzugeben.
prüfen Sie	Sie prüfen den gegebenen Sachverhalt auf Wahrheit.
untersuchen Sie	Sie untersuchen den Sachverhalt, berechnen ein Ergebnis und arbeiten Merkmale heraus.
skizzieren Sie	Sie stellen den Sachverhalt vereinfacht und übersichtlich dar.
zeichnen Sie	Sie erstellen eine exakte grafische Darstellung des Sachverhaltes.

Hinweis zur Prüfung 2022

Sonderregelung für die Abiturprüfung 2022 an der FOSBOS:
Nicht prüfungsrelevant (Stand: 18.06.2021):

- Aus LB 3: Kurvendiskussion von Funktion der Form $x \mapsto f(x) \cdot e^{g(x)} + y_0$
- Aus LB 4: Stammfunktionen für Funktionen der Form $x \mapsto a \cdot e^{c\cdot(x-d)} + y_0$

Bitte fragen Sie bzgl. Änderungen bei Ihrer Lehrkraft nach!

Polynome

Liebe Schülerinnen und Schüler,
die nachfolgende Übersicht zu den ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen) ist eine enorm wichtige Grundlage für viele Themen der Abschlussprüfung.
Versuchen Sie deshalb bitte, die Übersicht auf „**Verständnis**“ zu lernen und in unterschiedlichen Abständen immer wieder zu wiederholen.

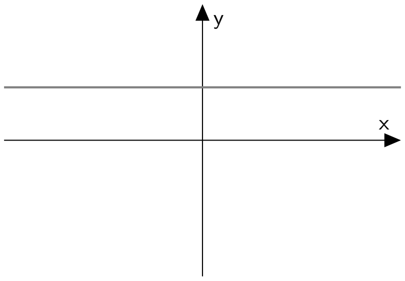
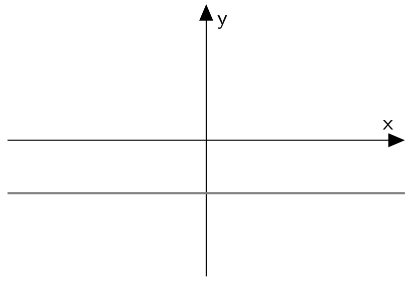
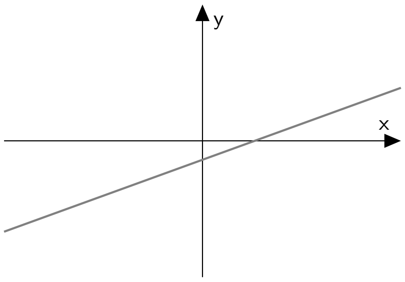
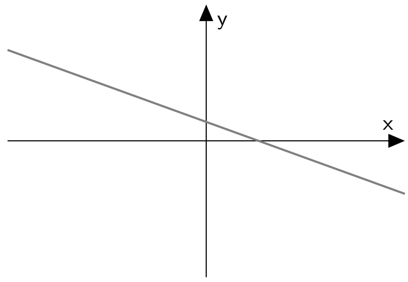
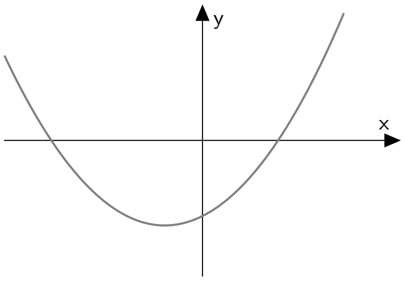
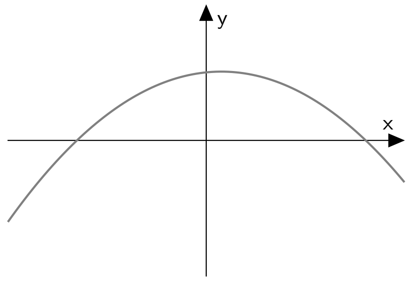
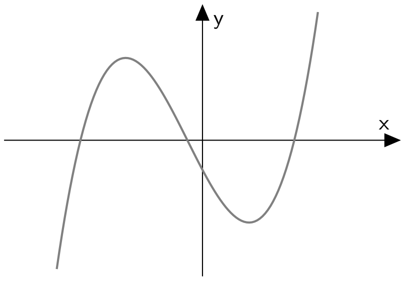
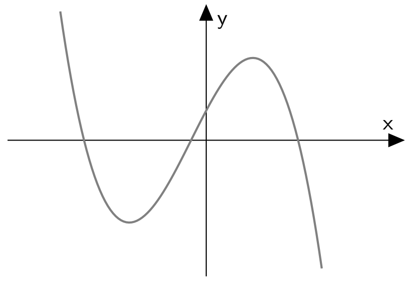
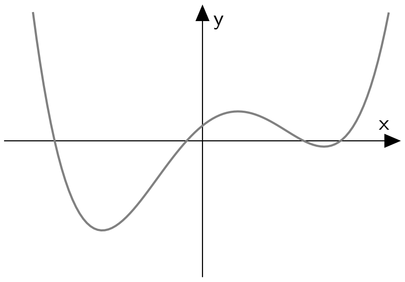
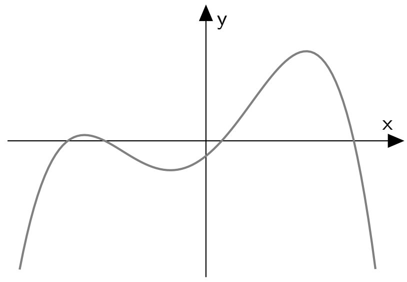
Nachfolgend ein kleiner „Fahrplan“ zum Lernen der Übersicht.

- **Prägen** Sie sich als erstes am besten die Spaltenüberschriften **ein**.
- **Lernen** Sie jetzt die „**Namen**“ der einzelnen Funktionstypen (diese sind übrigens identisch mit den dazugehörigen Gleichungstypen!). Hierzu sei angemerkt, dass es einen grundlegenden Unterschied zwischen Funktionen und dazugehörigen Gleichungen gibt!
  - Mit Funktionen werden die zu den Variablen (häufig x) gehörenden „y-Werte“, „Steigungswerte“ und „Krümmungswerte“ definiert bzw. berechnet.
  - Funktionen kann man ableiten.
  - Nur Gleichungen kann man LÖSEN. Hierzu benötigt man entsprechende „**Werkzeuge**“.
- **Beachten** Sie dabei die **Definition** der **Koeffizienten** $(a, b, c, ...)$. Auch hier ist auffallend, dass bis auf die konstanten Funktionen der sogenannte „Leitkoeffizient“ a niemals null sein darf. Dies ist „logisch“, da ja der „namensgebende“ Bestandteil des Funktionsterms nicht fehlen darf. Koeffizienten sind sogenannte „**Nebenwirker**“, die neben den Variablen (häufig x) für die entsprechenden Funktionswerte „mitverantwortlich“ sind.
- **Lernen** Sie jetzt die **Graphentypen**, die zu den verschiedenen Funktionstypen gehören.
  - Der Leitkoeffizient (a) gibt dabei an, wohin der dazugehörige Graph für große y-Werte verläuft. Ist der Leitkoeffizient positiv (> 0) verläuft der dazugehörige Graph nach rechts oben, ist er negativ (< 0) nach rechts unten. Einzig bei den konstanten Funktionen verlaufen die Graphen für positive Leitkoeffizienten „über“– bzw. „unterhalb der x-Achse“.
- Abschließend **lernen** Sie die **Gleichungstypen** und dazugehörigen „**Werkzeuge**“.

  Verlieren Sie hier bitte nicht die Geduld, es lohnt sich für viele spätere Themen. Und keine Angst, es sind **nur sechs** verschiedene „**Werkzeuge**“!

Die Autoren, V. Reffler, Dr. M. Fuchs, S. Rümmler, S. Jankovic und das Team von lern.de

Funktionstyp und allgemeine Funktionsgleichung	dazugehörige Gleichungen und „Werkzeuge“ zum Lösen
Konstante **Funktion** $f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ Funktionsgrad: 0	*Konstante* Funktions**gleichung** $a = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$ Keine „Werkzeuge“ notwendig
Lineare **Funktion** $f(x) = ax + b$ mit $a; b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$ Funktionsgrad: 1	*Lineare* Funktions**gleichung** $ax + b = 0$ mit $a; b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$ - Äquivalenzumformung
Quadratische **Funktion** $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a; b; c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$ Funktionsgrad: 2	*Quadratische* Funktions**gleichung** $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a; b; c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$ - Ausklammern ($c = 0$) - Radizieren ($b = 0$) - „Mitternachtsformel“ (vollständige Gleichung)
Kubische **Funktion** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a; b; c; d \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$ Funktionsgrad: 3	*Kubische* Funktions**gleichung** $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit $a; b; c; d \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$ - Ausklammern ($d = 0$) - Polynomdivision (zum Vereinfachen der Funktion)
(Polynom)**Funktion** *4. Grades* $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $a; b; c; d; e \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$ Funktionsgrad: 4	Funktions**gleichung** *4. Grades* $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ mit $a; b; c; d; e \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$ - Ausklammern ($e = 0$) - Polynomdivision (zum Vereinfachen der Funktion) - Substitution ($b = 0 \wedge d = 0$)

mögliche Graphentypen für a > 0	**mögliche** Graphentypen für a < 0
 Parallele **Gerade** über der x-Achse	 Parallele **Gerade** unter der x-Achse
 Steigende **Gerade**	 Fallende **Gerade**
 Nach oben geöffnete **Parabel**	 Nach unten geöffnete **Parabel**
 „N-Form“	 „S-Form“
 „W-Form“	 „M-Form“

Aufgaben - Polynome

1 Versuchen Sie diese Aufgabe ohne Zuhilfename der Übersicht, sondern mit dem Wissen was Sie gelernt haben zu bearbeiten.

a) Ordnen Sie jedem „Werkzeug“ alle zugehörigen Gleichungstypen mit jeweiligen Eigenschaften zu (siehe Beispiel). Die Zahl in Klammern gibt die Anzahl der verschiedenen Gleichungstypen zu jedem „Werkzeug“ wieder.
Äquivalenzumformung (1); Ausklammern (3); Mitternachtsformel (1); Radizieren (1); Polynomdivision (2); Substitution (1)

b) Geben Sie zu jedem Gleichungstyp eine mögliche Gleichung an.

Beispiel:
Mitternachtsformel: quadratische Gleichung (vollständige Gleichung); Bsp: $3x^2 - 4x + 1 = 0$

2 Um sicherer im Umgang mit den „Werkzeugen“ zu werden, finden Sie nachfolgend zu jedem „Werkzeug“ einige Gleichungen die entsprechend zu lösen sind.

a) Äquivalenzumformungen
I) $2x - 4 = 0$ II) $7x + 2 = 0$ III) $x - 3 = 0$ IV) $-5x - 4 = 0$

b) Radizieren
I) $x^2 - 4 = 0$ II) $4x^2 - 9 = 0$ III) $2x^2 + 2 = 0$ IV) $-x^2 + 3 = 0$

c) Mitternachtsformel
I) $2x^2 - 4x - 6 = 0$ II) $-3x^2 - 12x - 12 = 0$ III) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{27} = 0$
IV) $-x^2 + 2x - \frac{5}{2} = 0$

d) Substitution
I) $2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$ II) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ III) $0{,}5x^4 - 1{,}345x^2 + 0{,}845 = 0$

e) Ausklammern und Polynomdivision
Mithilfe beider „Werkzeuge“ kann die Gleichung zur quadratischen Gleichung vereinfacht werden, für welche die entsprechenden „Werkzeuge“ zur kompletten Lösung verwendet werden können. Um die Gleichung per Polynomdivision vereinfachen zu können ist es notwendig eine Nullstelle zu kennen, die „erraten“ werden muss. Geeignete Werte für das Erraten der Nullstelle sind dabei meist kleine ganze Zahlen wie $-5; -4; \ldots; 4; 5$ etc.
I) $2x^4 + 2x^3 - 4{,}5x^2 - 4{,}5x = 0$ II) $3x^4 - 7{,}5x^3 - 21x^2 + 12x = 0$
III) $x^4 - 3{,}7x^3 - 6{,}2x^2 - 1{,}5x = 0$

Lösungen - Polynome

1 Vollständige Lösung:

Werkzeug	Gleichungstyp	Beispiel
Äquivalenzumformung	lineare Gleichung	$x + 1 = 0$
Ausklammern	quadratische Gleichung ($c = 0$) kubische Gleichung ($d = 0$) Gleichung 4. Grades ($e = 0$)	$4x^2 - 2x = 0$ $3x^3 - 2x^2 + x = 0$ $x^4 - x^3 + 3x^2 + 4x = 0$
Mitternachtsformel	quadratische Gleichung (vollständige Gleichung)	$3x^2 - 4x + 1 = 0$
Radizieren	quadratische Gleichung ($b = 0$)	$4x^2 - 16 = 0$
Polynomdivision	kubische Gleichung (zum Vereinfachen) Gleichung 4. Grades (zum Vereinfachen)	$3x^3 + x^2 - 7x + 5 = 0$ $4x^4 - 3x^2 + 2x^2 + x - 1 = 0$
Substitution	Gleichung 4. Grades ($b = 0 \wedge d = 0$)	$4x^4 + 5x^2 - 7 = 0$

2 Für jede Teilaufgabe wird die Lösung einer Gleichung ausführlich angegeben und für die restlichen Gleichungen jeweils eine Kurzlösung.

a) Gleichung I): $2x - 4 = 0$; Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} & 2x - 4 = 0 && \mid +4 \\ \Longleftrightarrow\quad & 2x = 4 && \mid :2 \\ \Longleftrightarrow\quad & \underline{\underline{x_1 = 2}} \end{aligned}$$

Gleichung II): $\underline{\underline{x_1 = -\frac{2}{7}}}$

Gleichung III): $\underline{\underline{x_1 = 3}}$

Gleichung IV): $\underline{\underline{x_1 = -\frac{4}{5}}}$

b) Gleichung I): $x^2 - 4 = 0$; Radizieren:

$$\begin{aligned} & x^2 - 4 = 0 && \mid +4 \\ \Longleftrightarrow\quad & x^2 = 4 && \mid \pm\sqrt{\ } \\ \Longleftrightarrow\quad & \underline{\underline{x_1 = -2}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x_2 = 2}} \end{aligned}$$

Gleichung II): $\underline{\underline{x_1 = -\frac{3}{2}}} \vee \underline{\underline{x_2 = \frac{3}{2}}}$

Gleichung III): keine Lösung, da die Quadratwurzel nicht aus negativen Zahlen gezogen werden darf

Gleichung IV): $\underline{\underline{x_1 = -\sqrt{3}}} \vee \underline{\underline{x_2 = \sqrt{3}}}$

Exponentialfunktionen

Definition

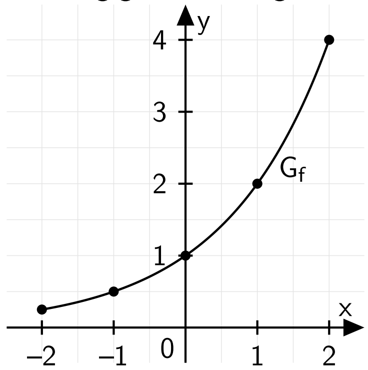
Als Exponentialfunktionen bezeichnet man allgemein Funktionen vom Typ

$$f(x) = b^x \quad \text{mit } b > 0; b \neq 1.$$

Dabei wird **b** als Basis und **x** als Exponent bezeichnet, der auch als Funktionsvariable anzusehen ist.

Als einführendes Beispiel wird die Funktion $f(x) = 2^x$ betrachtet. Um sich den Verlauf einer Exponentialfunktion zu verdeutlichen, werden verschiedene Werte für x eingesetzt und dadurch folgender Graph der Funktion gezeichnet.

MERKE: Unabhängig der Basis gilt $b^0 = 1$, was als Anhaltspunkt für alle Exponentialfunktionen gilt.



$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = 0{,}25$

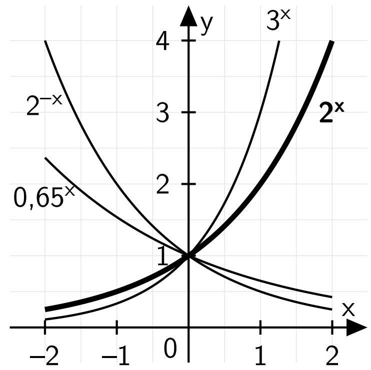
$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = 0{,}5$

$f(0) = 2^0 = 1$

$f(1) = 2^1 = 2$

$f(2) = 2^2 = 4$

Ausgehend vom Graph der Funktion $f(x) = 2^x$, der in folgender Darstellung fett markiert ist, wird die Funktion leicht variiert und jeweils der Verlauf des Graphen betrachtet.



Variation	Funktion
Ausgangsfunktion	$\mathbf{2^x}$
größere Basis	3^x
Basis zw. 0 und 1	$0{,}65^x$
negativer Exponent	2^{-x}

Es zeigen sich wichtige **allgemeingültige** Tatsachen für Funktionen des Types b^x ($b > 0; b \neq 1$):

- Der Graph verläuft stets oberhalb der x-Achse, die eine Asymptote des Graphen ist. Der Graph verläuft stets durch den Punkt $(0\,|\,1)$.
- Je **größer** die Basis ($b > 1$), desto **steiler** verläuft der Graph.

  Je **größer** die Basis ($0 < b < 1$), desto **flacher** verläuft der Graph.
- Der Graph verläuft **fallend**, wenn
  - für die Basis $0 < b < 1$ gilt und der Exponent ein positives Vorzeichen hat (Bsp: $0{,}65^x$), **oder**
  - für die Basis $b > 1$ gilt und der Exponent ein negatives Vorzeichen hat (Bsp: 2^{-x}).

Natürliche Exponentialfunktion

Eine Basis, die sehr häufig vorzufinden ist, ist die **Eulersche Zahl** $e = 2{,}718281\ldots$. Funktionen mit dieser Basis, also der Art $f(x) = e^x$ werden speziell als **e-Funktionen** bezeichnet.
Die e-Funktionen spielen bei realen Vorgängen eine wichtige Rolle. Beispiele sind der radioaktive Zerfall, die barometrische Höhenformel oder der Ladevorgang eines Kondensators.
Um Sicherheit im Umgang mit e-Funktionen zu bekommen, wird in den nachfolgenden Betrachtungen ausschließlich die Basis e verwendet.

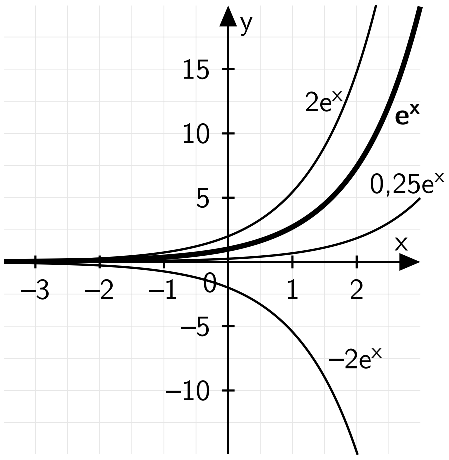
Parameter

Bisher wurde die einfache Form $f(x) = b^x$ betrachtet. Im Folgenden sollen nun zusätzliche Parameter und deren Einfluss untersucht werden, wenn die Funktion in der Form

$$f(x) = a \cdot e^{c \cdot x + d} + k$$

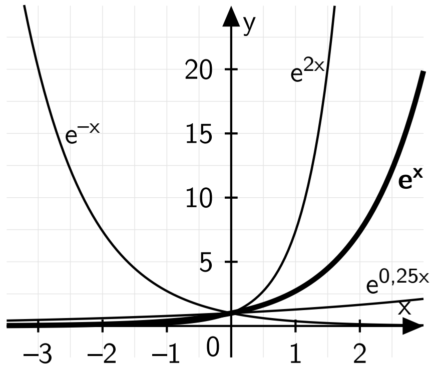
vorliegt (mit Basis e).

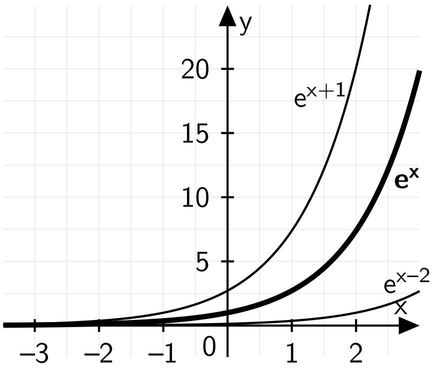
Die Einflüsse der Parameter a, c, d und k sollen anhand einiger Beispiele gezeigt werden.



Einfluss des Parameters a für $a \cdot e^x$
Der Parameter a sorgt allgemein für eine **Streckung** ($|a| > 1$) oder **Stauchung** ($|a| < 1$) des Funktionsgraphen entlang der **y-Achse**. Die Betragsstriche sind dabei relevant, denn wie nebenstehend zu sehen ist, wird der Graph für $a < 0$ zudem an der x-Achse gespiegelt.

Einfluss des Parameters c für $e^{c \cdot x}$
Der Parameter c bewirkt eine **Stauchung** ($|c| > 1$) oder **Streckung** ($|c| < 1$) des Graphen entlang der **x-Achse**. Auch hier muss der Betrag betrachtet werden, da für $c < 0$ eine Spiegelung entlang der y-Achse erfolgt.

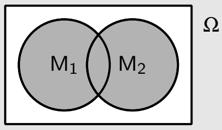




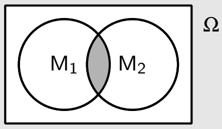
Einfluss des Parameters d für e^{x+d}
Der Parameter d bewirkt eine **Verschiebung** nach links ($d > 0$) oder rechts ($d < 0$) entlang der **x-Achse**

Allgemeine Regeln für Verknüpfungen

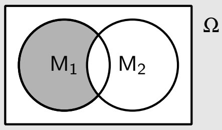
- *Vereinigungsmenge*: $M_1 \cup M_2$
  enthält alle Elemente die in M_1 oder M_2 vorkommen



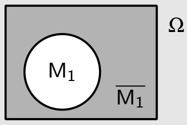
- *Schnittmenge*: $M_1 \cap M_2$
  enthält alle Elemente die sowohl in M_1 als auch in M_2 vorkommen



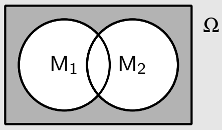
- *Komplementmenge*: $M_1 \setminus M_2 = M_1 \cap \overline{M_2}$
  enthält Elemente aus M_1, die nicht auch in M_2 vorkommen



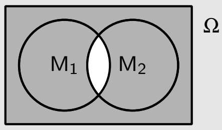
- *Absolutes Komplement*: $\overline{M_1}$
  enthält alle Elemente, die nicht in M_1 enthalten sind



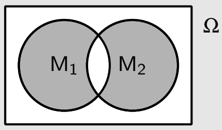
- **1. De Morgansche Regel**
  Absolutes Komplement der Vereinigungsmenge:
  $\overline{M_1} \cap \overline{M_2} = \overline{M_1 \cup M_2}$
  enthält alle Elemente, die weder in M_1 noch in M_2 vorkommen



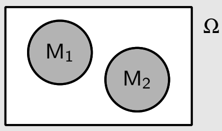
- **2. De Morgansche Regel**
  Absolutes Komplement der Schnittmenge:
  $\overline{M_1} \cup \overline{M_2} = \overline{M_1 \cap M_2}$
  enthält alle Elemente, die nicht sowohl in M_1 als auch in M_2 vorkommen



- *Symmetrische Differenzmenge*:
  $(M_1 \cap \overline{M_2}) \cup (\overline{M_1} \cap M_2) = (M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$
  enthält alle Elemente, die in M_1 oder M_2 aber nicht in beiden gleichzeitig vorkommen



Vereinbarkeit:
Zwei Mengen sind unvereinbar, wenn $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.



Da Ereignisse durch Mengen beschrieben werden, sind hier die selben **Verknüpfungen** gültig.

Beispiel

Für den Würfelwurf und die Ereignisse E_1: „Es wird eine 1 oder 2 gewürfelt." und E_2: „Es wird eine 2 oder 3 gewürfelt", ergeben sich folgende Verknüpfungen:

$E_3 = E_1 \cup E_2 = \{1, 2, 3\}$: „Es wird eine 1, 2 oder 3 gewürfelt."

$E_4 = E_1 \cap E_2 = \{2\}$: „Es wird eine 2 gewürfelt." $E_5 = E_1 \setminus E_2 = \{1\}$: „Es wird eine 1 gewürfelt"

$E_7 = \overline{E_1 \cap E_2} = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2 = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{1, 4, 5, 6\} = \{1, 3, 5, 6\}$

$E_8 = \overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 = \{3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 4, 5, 6\} = \{4, 5, 6\}$

Die Ereignisse E_1 und E_2 sind **vereinbar**, da $E_1 \cap E_2 = \{2\} \neq \emptyset$.

1.0 Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f\colon x \longmapsto \frac{1}{9}(-x^4+4x^3)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f wird G_f bezeichnet.

1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f mit der jeweiligen Vielfachheit. **3 BE**

1.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f sowie Art und Koordinaten des Extrempunktes des Graphen G_f. **7 BE**

1.3 Bestimmen Sie die Gleichungen aller Wendetangenten an den Graphen G_f. **8 BE**

1.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse im Bereich $-1 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Für weitere Teilaufgaben wird auf der y-Achse der Bereich $-3 \leq y \leq 3$ benötigt. Maßstab: 1 LE = 1 cm. **4 BE**

2.0 Betrachtet wird weiter die quadratische Funktion p mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_p bezeichnet.

2.1 Die Parabel G_p berührt den Graphen G_f aus 1.0 im Punkt $B(3|3)$ und verläuft durch den Koordinatenursprung. Bestimmen Sie p(x) und zeichnen Sie die Parabel G_p im Bereich $-1 \leq x \leq 4$ in das vorhandene Koordinatensystem ein.

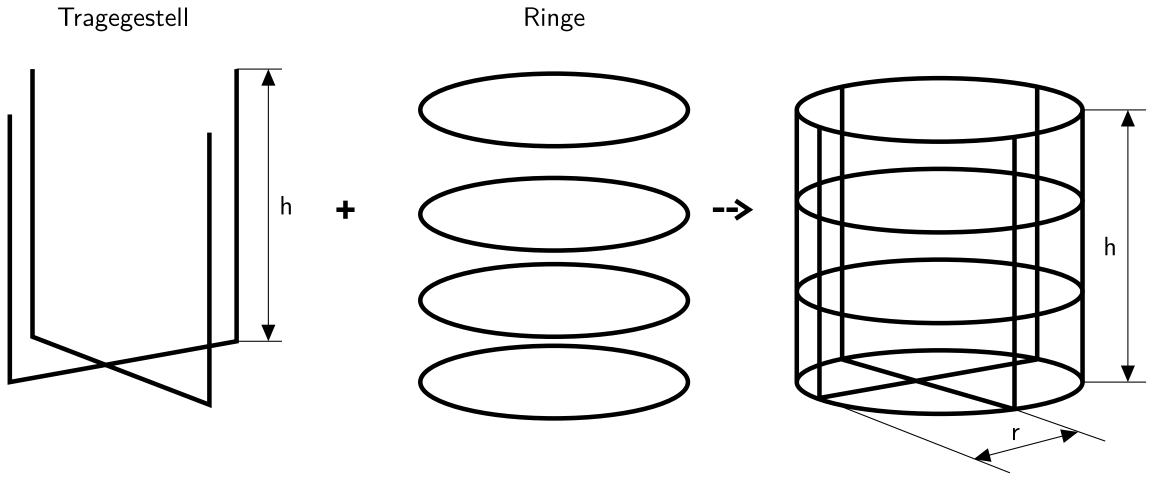
[Mögliches Ergebnis: $p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$] **8 BE**

2.2 Die Graphen G_f und G_p schließen im I. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein.
Markieren Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts. **5 BE**

2.3 Berechnen Sie die Koordinaten desjenigen Schnittpunkts der Graphen G_f und G_p, der im III. Quadranten des Koordinatensystems liegt. **7 BE**

2.4 Bestimmen Sie die Steigungen der beiden Geraden durch den Punkt $T(3|4)$, die den Graphen G_p berühren. **6 BE**

3.0 Ein Bastler möchte sich mithilfe folgender Bauanleitung das Grundgerüst für einen zylinderförmigen Abfallkorb mit Höhe h und Radius r (alle Längen in Meter gemessen) aus Draht bauen (siehe Skizze).



Für das Vorhaben kauft er sich Draht mit der Länge 6 m. Die Einzelteile werden selbst hergestellt und zusammengelötet. Die Dicke des Drahts ist zu vernachlässigen. Bei Berechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden.

3.1 Bestimmen Sie die Maßzahl V(r) des Volumens des Abfallkorbs in Abhängigkeit von r.

[Mögliches Ergebnis: $V(r) = \pi(\frac{3}{2}r^2 - r^3 - 2\pi r^3)$] **5 BE**

3.2 Aus praktischen Gründen wird für die Funktion
$V: r \longmapsto V(r)$ als Definitionsmenge $D_v = [0{,}1;\ 0{,}2]$ gewählt.
Berechnen Sie den Radius r des Abfallkorbs für den Fall, dass die Maßzahl des Volumens ihren absolut größten Wert annimmt.
Runden Sie Ihr Ergebnis auf drei Nachkommastellen. **7 BE**

1.0 Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f(x) = \frac{1}{9}(-x^4 + 4x^3)$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

1.1 Nullstellen und deren Vielfachheit

Um die Nullstellen zu ermitteln wird der Funktionsterm zunächst umgeformt:

$$f(x) = \frac{1}{9}(-x^4 + 4x^3) = \frac{1}{9}x^3(-x+4) = \frac{1}{9}x^3(4-x)$$

Für die Nullstellen gilt dann:

$$\begin{aligned}
& f(x) = 0 \\
\iff\quad & \frac{1}{9}x^3(4-x) = 0 \\
\iff\quad & \frac{1}{9}x^3 = 0 \quad \Big|: \frac{1}{9} \quad \text{oder} \quad 4 - x = 0 \quad |+x \\
\iff\quad & x^3 = 0 \quad \text{oder} \quad 4 = x_4 \\
\iff\quad & x_{1;2;3} = 0 \quad \text{oder} \quad x_4 = 4
\end{aligned}$$

Der erste Fall führt zu $x_{1;2;3} = 0$. Wegen der Potenz handelt es sich um eine dreifache Nullstelle $\underline{\underline{x_{1;2;3} = 0}}$. Der zweite Fall führt zu einer einfachen Nullstelle $\underline{\underline{x_4 = 4}}$.

1.2 Maximale Monotonieintervalle und Art und Koordinaten des Extrempunktes

Zunächst wird die erste Ableitung der Funktion bestimmt:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{9}(-x^4 + 4x^3) \\
f'(x) &= \frac{1}{9}(-4 \cdot x^3 + 3 \cdot 4x^2) = \frac{1}{9}(-4x^3 + 12x^2) = \frac{1}{9}x^2(12 - 4x)
\end{aligned}$$

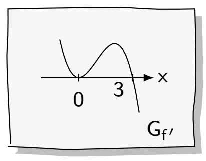
Weiterhin werden die Nullstellen der ersten Ableitung mithilfe der Nullproduktregel berechnet:

$$\begin{aligned}
& f'(x) = 0 \\
\iff\quad & \frac{1}{9}x^2(12 - 4x) = 0 \\
\iff\quad & \frac{1}{9}x^2 = 0 \quad \Big|: \frac{1}{9} \quad \text{oder} \quad 12 - 4x = 0 \quad |-12 \\
\iff\quad & x^2 = 0 \quad \text{oder} \quad -4x = -12 \quad |:(-4) \\
\iff\quad & x_{1;2} = 0 \quad \text{oder} \quad x_3 = 3
\end{aligned}$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung liegen also bei $x_{1;2} = 0$ und $x_3 = 3$. Es wird nun eine Vorzeichentabelle betrachtet:

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
$G_{f'}$	$+$	0	$+$	0	$-$
G_f	$\nearrow$	TEP	$\nearrow$	HOP	$\searrow$

Skizze



Daran kann abgelesen werden, dass f für alle $x \in]-\infty; 3]$ streng monoton zunehmend und für alle $x \in [3; \infty[$ streng monoton abnehmend ist. Für die Bestimmung des Extrempunktes gibt es nun zwei Möglichkeiten:

Möglichkeit 1: Mithilfe der Skizze der ersten Ableitung
Anhand obiger Skizze und der ermittelten Vorzeichentabelle kann abgelesen werden, dass bei $x = 3$ ein relatives Maximum der Funktion liegt. Es wird der Funktionswert berechnet:

$$f(3) = \frac{1}{9}(-3^4 + 4 \cdot 3^3) = 3$$

Die Koordinaten des Hochpunktes lauten $\underline{\underline{HOP\,(3\,|\,3)}}$.

Möglichkeit 2: Mithilfe der 2. Ableitung
Es wird die 2. Ableitung berechnet:

$$f'(x) = \frac{1}{9}x^2(12 - 4x) = \frac{1}{9}(-4x^3 + 12x^2)$$
$$f''(x) = \frac{1}{9}(-3 \cdot 4x^2 + 2 \cdot 12x) = \frac{1}{9}(-12x^2 + 24x)$$

In den Term der zweiten Ableitung wird nun der Wert $x = 3$ eingesetzt:

$$f''(3) = \frac{1}{9}(-12 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rel. Max} \mathrel{\hat{=}} \text{HOP}$$

Es wird der Funktionswert berechnet:

$$f(3) = \frac{1}{9}(-3^4 + 4 \cdot 3^3) = 3$$

Die Koordinaten des Hochpunktes lauten $\underline{\underline{HOP\,(3\,|\,3)}}$.

1.3 **Gleichungen aller Wendetangenten**
Zunächst wird die zweite Ableitung bestimmt:

$$f'(x) = \frac{1}{9}(-4x^3 + 12x^2)$$
$$f''(x) = \frac{1}{9}(-4 \cdot 3 \cdot x^2 + 12 \cdot 2 \cdot x) = \frac{1}{9}(-12x^2 + 24x) = \frac{1}{3}(-4x^2 + 8x) = \frac{1}{3}x(-4x + 8)$$

Wieder werden die Nullstellen mithilfe der Nullproduktregel berechnet:

$$\begin{aligned}
& f''(x) = 0 \\
\iff \quad & \frac{1}{3}x(-4x + 8) = 0 \\
\iff \quad & \frac{1}{3}x = 0 \quad \Big| : \frac{1}{3} \quad \text{oder} \quad -4x + 8 = 0 \quad | + 4x \\
\iff \quad & x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad 8 = 4x \quad | : 4 \\
\iff \quad & x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = 2
\end{aligned}$$

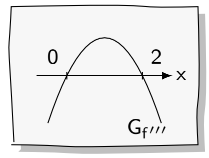
Nachweis für Wendestellen
Die Nullstellen liegen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Weiterhin gibt es verschiedene Möglichkeiten für den Nachweis der Wendestellen:

<u>*1. Variante:* Vielfachheit der Nullstellen</u>
Bei den Nullstellen der zweiten Ableitung $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ handelt es sich jeweils um einfache Nullstellen, sodass hier ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung und damit eine Wendestelle von f vorliegt.

<u>*2. Variante:* Skizze</u>
Es wird eine Skizze der zweiten Ableitung und eine Vorzeichentabelle erstellt:

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
$G_{f''}$	–	0	+	0	–
G_f	$\curvearrowright$	WEP	$\smile$	WEP	$\curvearrowright$

Skizze



Bei $x = 0$ und $x = 2$ liegt jeweils ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung und somit eine Wendestelle der Funktion vor.

<u>*3. Variante:* Mithilfe der dritten Ableitung</u>
Es wird die dritte Ableitung bestimmt:

$$f''(x) = \frac{1}{3}(-4x^2 + 8x)$$
$$f'''(x) = \frac{1}{3}(-2 \cdot 4x + 8) = \frac{1}{3}(-8x + 8)$$

Es werden die Nullstellen der zweiten Ableitung in die dritte Ableitung eingesetzt:

$$f'''(0) = \frac{1}{3}(-8 \cdot 0 + 8) = \frac{8}{3} \neq 0 \qquad f'''(2) = \frac{1}{3}(-8 \cdot 2 + 8) = -\frac{8}{3} \neq 0$$

Somit liegt ein Krümmungswechsel und damit eine Wendestelle vor.

Um die Gleichungen der Wendetangenten zu bestimmen wird jeweils der Funktionswert und der Wert der ersten Ableitung an diesen Stellen ermittelt:

$$f(0) = \frac{1}{9}(-0^4 + 4 \cdot 0^3) = 0 \qquad f'(0) = \frac{1}{9}(-4 \cdot 0^3 + 12 \cdot 0^2) = 0$$
$$f(2) = \frac{1}{9}(-2^4 + 4 \cdot 2^3) = \frac{16}{9} \qquad f'(2) = \frac{1}{9}(-4 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2^2) = \frac{16}{9}$$

Die Gleichung der beiden Wendetangenten ergeben sich dann mithilfe der Punktsteigungsform:

$$w_1 : y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0) = 0 \cdot x + 0 = \underline{0}$$
$$w_2 : y = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2) = \underline{\underline{\frac{16}{9} \cdot (x - 2) + \frac{16}{9}}} = \underline{\underline{\frac{16}{9}x - \frac{16}{9}}}$$

1.4 Für die graphische Darstellung wird eine Wertetabelle als Hilfestellung erstellt:

x	–1	0	1	2	3	4
f(x)	–0,56	0	0,33	1,78	3	0

Mithilfe dieser Werte kann nun die grafische Darstellung erfolgen:

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Ein Großhändler für Saatgut verkauft Säcke verschiedener Sorten von Samenkörnern. Erfahrungsgemäß handelt es sich bei 15 % der verkauften Säcke um Saatgut für Viehweide (V). Säcke mit Samen für Sommerroggen (S) werden viermal so oft verlangt wie die mit Weißklee (W). Weißklee und Grasmischung (G), machen die Hälfte der verkauften Säcke aus. Nur 3 % sind Säcke mit Samen für Blumenwiese (B). Die Preise pro Sack können nachfolgender Preisliste entnommen werden.

Sorte	Preis pro Sack
▪ Viehweide	32,00 €
▪ Sommerroggen	26,00 €
▪ Weißklee	30,00 €
▪ Grasmischung	28,50 €
▪ Blumenwiese	20,00 €

1.1 Die Zufallsgröße X gibt den Preis pro verkauftem Sack in Euro an. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.
[Teilergebnis: $P(W) = 0{,}08$] **5 BE**

1.2 Berechnen Sie – unter Verwendung von Aufgabe 1.1 – den durchschnittlich zu erwartenden monatlichen Gewinn durch den Verkauf des Saatguts, wenn bekannt ist, dass der Großhändler pro Monat 120 Säcke Saatgut verkauft und ihm 30 % vom Verkaufspreis als Gewinn bleiben. **2 BE**

2.0 Aufgrund von Kundenanfragen und da der Großhändler ein günstiges Angebot für Rotklee erhalten hat, will er in Zukunft eine Kleemischung aus Weißklee (W) und Rotklee (R) anbieten. Laut dem Samenproduzenten liegt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Samenkorn vom Weißklee keimt, bei 92,5 %. Die Keimwahrscheinlichkeit der Rotkleesamen liegt bei 80 %.

2.1 Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms, in welchem Verhältnis der Großhändler Weiß- und Rotkleesamen mischen muss, damit die Keimwahrscheinlichkeit P(K) der Mischung bei 85 % liegt. **5 BE**

2.2 Ein Landwirt kauft einen Sack der neuen Kleemischung, welche zu 85 % keimt, und sät 200 Samenkörner auf einem kleinen frischgepflügten Teil einer seiner Wiesen aus. Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl der keimenden Samen an.
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Anzahl der keimenden Samen innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt. **4 BE**

3.0 Eine Gärtnerin möchte den Bienen in ihrer Umgebung etwas Gutes tun und kauft einen Sack Saatgut für eine Blumenwiese. Der Großhändler behauptet, dass die Blumensamen zu 90 % keimen. Jedoch vermutet die Gärtnerin, dass es weniger sind (Gegenhypothese). Ist dies der Fall, so will sie ihr Saatgut in Zukunft von einem anderen Großhändler beziehen. Um ihre Vermutung zu überprüfen, sät sie 100 zufällig ausgewählte Samenkörner aus und beobachtet deren Keimverhalten. Sie will sich bei der Annahme ihrer Vermutung um höchstens 4 % irren.

3.1 Entwickeln Sie einen geeigneten Hypothesentest für die Gärtnerin und geben Sie an, welche Entscheidung der Test nahelegt, wenn 87 Blumensamen keimen. **5 BE**

3.2 Berechnen Sie für den in Aufgabe 3.1 entwickelten Test die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, wenn man davon ausgeht, dass der Anteil der keimenden Samen bei 85 % liegt. **2 BE**

1.1 Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

Zunächst werden aus den Angaben die Wahrscheinlichkeiten für die jeweiligen Sorten ermittelt. Bei 15 % der Säcke handelt es sich um Saatgut für Viehweide ($\underline{P(V) = 0{,}15}$). Sommerroggen wird viermal so oft verlangt wie Weißklee ($P(S) = 4 \cdot P(W)$). Weißklee und Grasmischung machen die Hälfte aus ($P(W) + P(G) = 0{,}5$). Der Anteil für Blumenwiese liegt bei 3 % ($\underline{P(B) = 0{,}03}$). Da die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten 100 % = 1 ergeben muss, gilt:

$$\begin{aligned} & \overbrace{P(V)}^{=0{,}15} + P(S) + \overbrace{P(W) + P(G)}^{=0{,}5} + \overbrace{P(B)}^{=0{,}03} = 1 \\ \iff \quad & 0{,}15 + P(S) + 0{,}5 + 0{,}03 = 1 \qquad |-0{,}68 \\ \iff \quad & \underline{P(S) = 0{,}32} \end{aligned}$$

Daraus folgt weiterhin:

$$\begin{aligned} & P(S) = 4 \cdot P(W) \\ \iff \quad & 0{,}32 = 4 \cdot P(W) \qquad |:4 \\ \iff \quad & \underline{P(W) = 0{,}08} \end{aligned}$$

Und schließlich:

$$\begin{aligned} & P(W) + P(G) = 0{,}5 \\ \iff \quad & 0{,}08 + P(G) = 0{,}5 \qquad |-0{,}08 \\ \iff \quad & \underline{P(G) = 0{,}42} \end{aligned}$$

Jedem Saatgut ist nun eine Wahrscheinlichkeit und laut Tabelle ein Preis zugewiesen. Damit kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung erstellt werden:

x	20	26	28,50	30	32
$P(X = x)$	0,03	0,32	0,42	0,08	0,15

1.2 Durchschnittlich zu erwartender monatlicher Gewinn

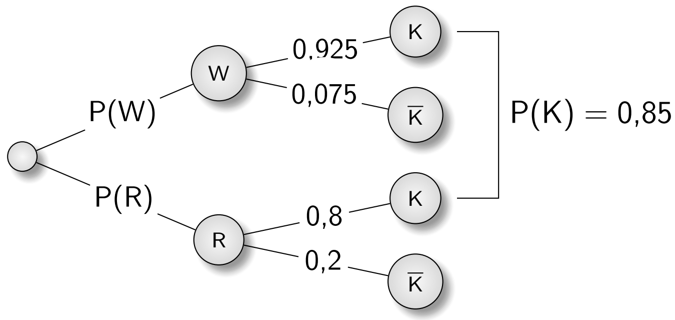
Zunächst wird der Erwartungswertes von X, also des Preises pro verkauftem Sack bestimmt:

$$E(X) = 20 \cdot 0{,}03 + 26 \cdot 0{,}32 + 28{,}50 \cdot 0{,}42 + 30 \cdot 0{,}08 + 32 \cdot 0{,}15 = 28{,}09$$

Da davon 30 % Gewinn bleiben, und 120 Säcke verkauft werden, liegt der zu erwartende Gewinn bei $120 \cdot 0{,}3 \cdot 28{,}09 = \underline{\underline{1011{,}24}}$ €.

2.1 Erstellen eines Baumdiagramms zur Bestimmung des Mischungsverhältnisses

Laut Angabe keimt ein Samenkorn vom Weißklee mit einer Wahrscheinlichkeit von 92,5 % ($P_W(K) = 0{,}925$, damit $P_W(\overline{K} = 0{,}075$). Ein Samenkorn vom Rotklee keimt mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % ($P_R(K) = 0{,}8$, damit $P_R(\overline{K}) = 0{,}2$). Damit kann folgendes Baumdiagramm mit der noch unbekannten Wahrscheinlichkeit $P(W)$ für den Anteil an Weißklee erstellt werden:



Dabei soll nun P(W) so bestimmt werden, dass P(K) = 0,85 gilt. Dies entspricht im Baumdiagramm dem ersten und dem dritten Ast von oben. Damit gilt entsprechend der Pfadregeln:

$$\begin{aligned}
& & P(W)\cdot 0{,}925 + P(R)\cdot 0{,}8 &= 0{,}85 & \\
&\Longleftrightarrow & P(W)\cdot 0{,}925 + (1-P(W))\cdot 0{,}8 &= 0{,}85 & \\
&\Longleftrightarrow & 0{,}925\cdot P(W) + 0{,}8 - 0{,}8\cdot P(W) &= 0{,}85 & \quad |-0{,}8 \\
&\Longleftrightarrow & 0{,}125\cdot P(W) &= 0{,}05 & \quad |\cdot 8 \\
&\Longleftrightarrow & P(W) &= 0{,}4 &
\end{aligned}$$

Die Mischung muss also aus 40 % Weißklee und 60 % Rotklee bestehen. Das Mischungsverhältnis Weißklee zu Rotklee muss wegen $\frac{0{,}40}{0{,}60} = \frac{2}{3}$ also 2:3 sein.

2.2 **Wahrscheinlichkeit berechnen, mit der die Anzahl der keimenden Samen innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen**

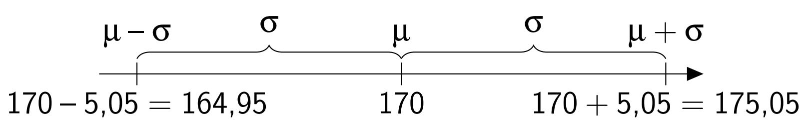
Zunächst werden der Erwartungswert, die Varianz und daraus die Standardabweichung für n = 200 und p = 0,85 berechnet:

$$\begin{aligned}
\mu(Y) &= n\cdot p = 200\cdot 0{,}85 = 170 \\
V(Y) &= n\cdot p\cdot(1-p) = 200\cdot 0{,}85\cdot 0{,}15 = 25{,}5 \\
\sigma(Y) &= \sqrt{25{,}5} \approx \underline{5{,}05}
\end{aligned}$$

Es wird nun die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt, dass die Werte <u>höchstens</u> die einfache Standardabweichung vom Erwartungswert abweichen:

$$\begin{aligned}
P(\mu-\sigma < Y < \mu+\sigma) &= P(164{,}95 < Y < 175{,}05) = P(Y < 175{,}05) - P(Y < 164{,}95) \\
&= P(Y \le 175) - P(\le 164) = \sum_{i=0}^{175} B(200; 0{,}85; i) - \sum_{i=0}^{164} B(200; 0{,}85; i) \\
&\approx 0{,}86318 - 0{,}13873 = \underline{\underline{0{,}72445}}
\end{aligned}$$

<u>Zur Veranschaulichung</u>

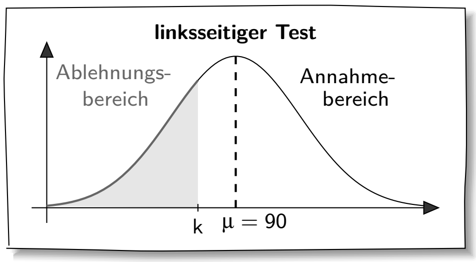


3.1 Entwickeln eines Hypothesentests

Die Testgröße T beschreibt die Anzahl der Blumensamen, die keimen, unter $n = 100$ gesäten Samenkörnern.

Die Nullhypothese H_0 lautet: 90 % der Blumensamen keimen.
Der Erwartungswert ($\mu = n \cdot p$) liegt bei $\mu = 100 \cdot 0{,}9 = 90$ Blumensamen die keimen.

Nullhypothese	Gegenhypothese
$H_0 : p = 0{,}9$	$H_1 : p < 0{,}9$
Annahmebereich von H_0:	Ablehnungsbereich von H_0:
$A = \{k+1; ...; 100\}$	$\overline{A} = \{0; 1; ...; k\}$



Anmerkung: k liegt immer im Ablehnungsbereich. Es handelt sich um einen linksseitigen Hypothesentest, da vermutet wird, dass <u>weniger</u> als 90 % der Blumensamen keimen und somit k links vom Erwartungswert liegt (siehe Skizze).

Mit dem gegebenen Signifikanzniveau von 4 % gilt dann:

$$P(T \leq k) \leq 0{,}04$$
$$\iff \quad F_{0,9}^{100}(k) \leq 0{,}04$$

Der gesuchte Wert k für B(100; 0,90) kann dabei einem Tafelwerk in der rechten Spalte entnommen werden. Somit ist $k = 84$, da hier der Prozentwert der Summe das letzte Mal **kleiner** als 0,04 ist. Den größtmöglichen Ablehnungsbereich erhält man somit für $k = 84$. Er lautet $\overline{A} = \{0; 1; ...; 84\}$. Damit ist der minimale Annahmebereich von H_0 $A = \{85; 86; ...; 100\}$.

Entscheidung anhand des Tests

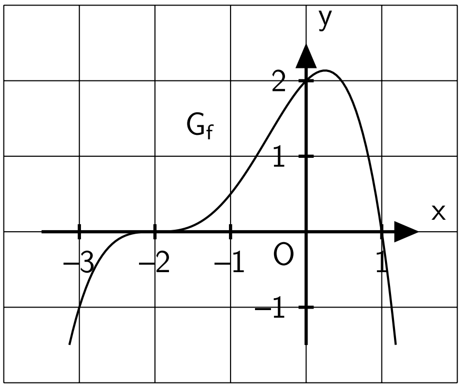
Da 87 im Annahmebereich liegt, legt die Tatsache, dass 87 Blumensamen keimen anhand des Tests eine Entscheidung für die Nullhypothese nahe, sodass auf Grundlage des Tests der Großhändler recht hat.

3.2 Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art

Beim Fehler 2. Art würde die Nullhypothese H_0 angenommen, obwohl H_1 richtig ist.
Mit $A = \{85; 86; ...; 100\}$ und einem tatsächlichen Anteil von 85 % gilt für den Fehler 2. Art:

$$\begin{aligned} P(\text{„Fehler 2. Art“}) &= F_{0,85}^{100}(T \geq 85) \\ &= 1 - F_{0,85}^{100}(T \leq 84) = 1 - \sum_{i=0}^{84} B(100; 0{,}85; i) \\ &\approx 1 - 0{,}43168 = \underline{\underline{0{,}56832}} \end{aligned}$$

1.0 In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise den Graphen einer ganzrationalen Funktion f vom Grad 4 mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.



1.1 Geben Sie alle Nullstellen der Funktion f sowie jeweils deren Vielfachheit an.

Bestimmen Sie mithilfe dieser Nullstellen eine Funktionsgleichung der Funktion f.

Ganzzahlige Werte können der Abblildung entnommen werden. **4 BE**

1.2 Entscheiden Sie anhand des Graphen G_f, ob die nachfolgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind.

Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

a) $f'(0) = -\frac{1}{2}$ b) $f''(1) < 0$

c) $f''(-2) = f'(-2)$ d) $W_f = \mathbb{R}$ **4 BE**

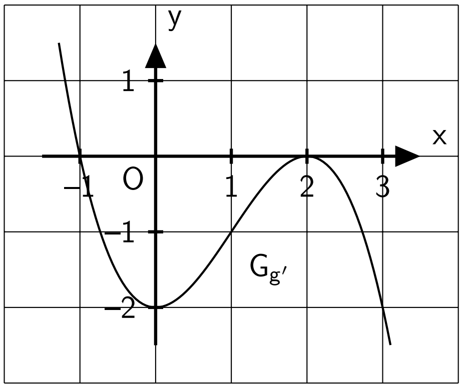
1.3 Es gilt: $f(x) = -\frac{1}{4}(x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8)$. Der Nachweis hierfür ist nicht erforderlich.

Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des Flächenstücks, das der Graph G_f mit den Koordinatenachsen im I. Quadranten des Koordinatensystems einschließt. **4 BE**

2021

2.0 g ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.

In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise den Graphen der Ableitungsfunktion g'. Ganzzahlige Werte können der Abbildung entnommen werden.



2.1 Geben Sie die Stellen an, an welchen der Graph der Funktion g Punkte mit horizontaler Tangente hat und benennen Sie jeweils die Art dieser Graphenpunkte. **2 BE**

2.2 Geben Sie mit Begründung die Wendestellen der Funktion g an. **3 BE**

3 Gegeben sind Auszüge aus zwei Wertetabellen zu zwei Funktionen h und k mit der Definitionsmenge $D_h = D_k = \mathbb{R}_0^+$. Für die fehlenden Funktionswerte in den folgenden Tabellen gilt $h(x) \geq 0$ und $k(x) \geq 0$.

Tabelle 1

x	0	2	4
h(x)	7	5	

Tabelle 2

x	0	2	4
k(x)		9	15

Entscheiden Sie begründet, welcher der folgenden Funktionsterme zu Tabelle 1 bzw. zu Tabelle 2 gehört.

A) $8 - 3^{0,5\cdot x}$ B) $-x + 7$

C) $3^{0,5\cdot x} + 6$ D) $x + 7$

Geben Sie dann die fehlenden Tabellenwerte an. **5 BE**

1.1 **Nullstellen mit Vielfachheit**

Die Nullstellen können abgelesen werden zu $\underline{\underline{x = -2}}$ und $\underline{\underline{x = 1}}$. Dabei liegt bei $x = 1$ nur ein Schnitt von Graph und x-Achse vor, sodass es sich hierbei um eine einfache Nullstelle handelt. Bei $x = -2$ liegt ein Terrassenpunkt vor. Hier handelt es sich demnach um eine dreifache Nullstelle der Funktion. (Hinweis: Begründung laut Aufgabenstellung nicht notwendig)

Funktionsgleichung von f

Die Funktion vierten Grades ergibt sich als Produkt von vier Termen $(x - x_0)$, wobei x_0 die Nullstellen sind (also dreimal $x_0 = -2$ und einmal $x_0 = 1$). Weiterhin muss ein Faktor a berücksichtigt werden:

$$f(x) = a \cdot (x - (-2)) \cdot (x - (-2)) \cdot (x - (-2)) \cdot (x - 1) = a \cdot (x + 2)^3 \cdot (x - 1)$$

Um den Faktor a zu bestimmen, werden die Koordinaten eines Punktes aus der Abbildung abgelesen, zum Beispiel $P\,(0\,|\,2)$. Diese Koordinaten werden nun in die Funktionsgleichung eingesetzt, um einen Wert für a zu bestimmen:

$$\begin{aligned} & & f(0) &= 2 & \\ \Longleftrightarrow & & a \cdot (0 + 2)^3 \cdot (0 - 1) &= 2 & \\ \Longleftrightarrow & & a \cdot 8 \cdot (-1) &= 2 & \quad | : (-8) \\ \Longleftrightarrow & & a &= -\frac{1}{4} & \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet $\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)^3(x - 1)}}$.

1.2 **Begründungen**

a) Die erste Ableitung $f'(x)$ gibt die Steigung der Tangente an einer bestimmten Stelle an. An der Stelle $x = 0$ ist der Graph von f streng monoton steigend, die Steigung der Tangente ist also größer null und damit $f'(0) > 0$. Damit ist die Aussage **FALSCH**.

b) Die zweite Ableitung gibt die Krümmung des Funktionsgraphen an. Bei $x = 1$ ist der Graph rechtsgekrümmt, damit ist die zweite Ableitung negativ, also $f''(1) < 0$. Die Aussage ist **WAHR**.

c) Bei $x = -2$ liegt ein Terrassenpunkt vor. Demnach liegt ein Wendepunkt mit einer waagrechten Tangente vor. Da ein Wendepunkt vorliegt, ist $f''(-2) = 0$. Wegen der waagrechten Tangente ist $f'(-2) = 0$. Somit ist $f''(-2) = f'(-2)$ und die Aussage ist **WAHR**.

d) Die Funktion ist vom Grad 4. Da der Graph nach unten geöffnet ist, ist das in der Abbildung eingezeichnete Maximum der absolute Hochpunkt des Graphen. Demnach ist die Wertemenge nach oben beschränkt, deshalb ist die Aussage $W_f = \mathbb{R}$ **FALSCH**.

1.3 **Maßzahl des Flächeninhaltes**

Zunächst wird eine Stammfunktion von $f(x)$ ermittelt:

$$F(x) = \int f(x)dx = \int -\frac{1}{4}(x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8)dx = -\frac{1}{4}\int (x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8)dx$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mathbf{5}}x^{\mathbf{5}} + 5\cdot\frac{1}{\mathbf{4}}x^{\mathbf{4}} + 6\cdot\frac{1}{\mathbf{3}}x^{\mathbf{3}} - 4\cdot\frac{1}{\mathbf{2}}x^{\mathbf{2}} - 8x\right)(+C) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{4}x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 8x\right)$$

Dabei wurde als Integrationskonstante $C = 1$ gewählt. Die Fläche soll im I. Quadranten („rechts oben“) liegen und von den Koordinatenachsen eingeschlossen werden. Aus der Abbildung können daher die Integrationsgrenzen $x = 0$ und $x = 1$ abgelesen werden. Für die Flächenmaßzahl gilt damit:

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 f(x)dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{5}\cdot 1^5 + \frac{5}{4}\cdot 1^4 + 2\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 - 8\cdot 1\right) - \left(\frac{1}{5}\cdot 0^5 + \frac{5}{4}\cdot 0^4 + 2\cdot 0^3 - 2\cdot 0^2 - 8\cdot 0\right)\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} + \frac{5}{4} + 2 - 2 - 8 - 0\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{4}{20} + \frac{25}{20} - \frac{160}{20}\right) = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{131}{20}\right) = \underline{\underline{\frac{131}{80}}}\,[\text{FE}]
\end{aligned}$$

2.1 **Stellen mit horizontaler Tangente und deren Art**

Der Graph G_g hat eine horizontale Tangente, bei der die erste Ableitung $g'(x)$ eine Nullstelle hat. Aus der Zeichnung kann entnommen werden, dass dies für $\underline{\underline{x = -1}}$ und $\underline{\underline{x = 2}}$ der Fall ist. Bei $x = -1$ liegt dabei eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von „+“ zu „–“ vor. Hier liegt demnach ein Hochpunkt vor (da $g(x)$ von Grad 4 und damit $g'(x)$ von Grad 3 ist, handelt es sich sogar um einen absoluten Hochpunkt). Bei $x = 2$ berührt $G_{g'}$ die x-Achse nur. Es gibt somit keinen Vorzeichenwechsel, daher liegt bei $x = 2$ ein Terrassenpunkt von G_g.
(Hinweis: Begründung laut Aufgabenstellung nicht notwendig)

2.2 **Wendestellen**

Wendestellen von g liegen dort vor, wo g' eine Extremstelle hat. Diese können aus der Abbildung bei $\underline{\underline{x = 0}}$ und $\underline{\underline{x = 2}}$ abgelesen werden.

3 **Zuordnung der Funktionsterme**

Da in beiden Tabellen die Werte für $x = 0$, $x = 2$ und $x = 4$ gegeben sind, ist die beste Option, die entsprechenden Funktionswerte für alle Terme zu berechnen:

x	h(x)	k(x)	A)	B)	C)	D)
0	7		$8 - 3^0 = 8 - 1 = 7$	$-0 + 7 = 7$	$3^0 + 6 = 1 + 6 = 7$	$0 + 7 = 7$
2	5	9	$8 - 3^1 = 8 - 3 = 5$	$-2 + 7 = 5$	$3^1 + 6 = 3 + 6 = 9$	$2 + 7 = 9$
4		15	$8 - 3^2 = 8 - 9 = -1$	$-4 + 7 = 3$	$3^2 + 6 = 9 + 6 = 15$	$4 + 7 = 11$

A) und B) passen beide zu h(x), allerdings ist außerdem gefordert, dass alle Werte in der Tabelle größer oder gleich null sind. Dies ist nur für B) erfüllt, sodass B) also h(x) wiedergibt. Zu k(x) passt laut Tabelle nur C).

Fehlende Tabellenwerte

Die fehlenden Werte können direkt aus der obigen vervollständigten Tabelle mit $\underline{\underline{h(4) = 3}}$ und $\underline{\underline{k(0) = 7}}$ entnommen werden.

1 Die sechs Seiten eines Laplace-Würfels sind mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 und 6 beschriftet. Dieser Würfel wird zweimal hintereinander geworfen.

Betrachtet wird folgendes Ereignis E.

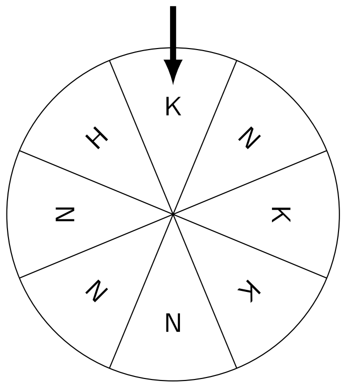
E: „Die Summe der beiden gewürfelten Augenzahlen ist höchstens drei.“

Geben Sie E in aufzählender Mengenschreibweise an und ermitteln Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis. **3 BE**

2 Für zwei gegebene Ereignisse A und B gilt: $P(\overline{A}) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = 0$ und $P(A \cup B) = \frac{4}{9}$.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P(B), z. B. mithilfe einer Vierfeldertafel. **4 BE**

3.0 Bei einem Gewinnspiel wird nebenstehendes Glücksrad gedreht, bei dem die einzelnen Kreissektoren gleich groß sind. Diesem Zufallsexperiment wird der Ergebnisraum $\Omega = \{H; K; N\}$ zugrunde gelegt. Dabei steht H für den Hauptgewinn, K für einen Kleingewinn und N für eine Niete.



3.1 Vier Personen drehen jeweils einmal am Glücksrad.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keiner von ihnen eine Niete erzielt. **2 BE**

3.2 Für einen Einsatz von 2 € darf man einmal am Glücksrad drehen. Für einen Hauptgewinn erhält der Teilnehmer 7 € und für einen Kleingewinn 3 € ausbezahlt. Bei einer Niete verfällt der Einsatz.

Berechnen Sie den Erwartungswert für die Zufallsgröße X: „Auszahlung in Euro“ und interpretieren Sie das Ergebnis im Zusammenhang mit dem Einsatz. **3 BE**

1 **E in aufzählender Mengenschreibweise und zugehörige Wahrscheinlichkeit**

Es handelt sich um einen Laplace-Würfel, der zweimal hintereinander gewürfelt wird. Der erste Wurf kann mit a, der zweite Wurf mit b bezeichnet werden, sodass der Ereignisraum $\Omega\{(a;b) \mid a,b \in \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}\}$ ist.
Die Summe der beiden gewürfelten Augenzahlen ist höchstens drei. Dafür gibt es 3 mögliche Kombinationen. Mit zwei Würfeln können insgesamt 36 Kombinationen erzielt werden.

$$E = \{(1;1),(1;2),(2;1)\} \quad \Rightarrow \quad P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$$

2 **Wahrscheinlichkeit P(B)**

Möglichkeit 1: Satz von Sylvester

Da die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses von A gegeben ist, kann zunächst die Wahrscheinlichkeit von A bestimmt werden:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Damit kann der Satz von Sylvester angewendet werden:

$$\begin{aligned} & P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \overbrace{P(A \cap B)}^{=0} & \\ \iff \quad & \frac{4}{9} = \frac{1}{3} + P(B) & \left| -\frac{1}{3} \right. \\ \iff \quad & \underline{P(B) = \frac{1}{9}} & \end{aligned}$$

Möglichkeit 2: Vierfeldertafel

Anhand der Angaben kann zunächst eine Vierfeldertafel erstellt und zur Hälfte ergänzt werden. Daraus folgt bereits, dass $P(A) = \frac{1}{3}$. Da $P(A \cap B) = 0$ ist, folgt damit direkt:

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) = \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$$

Vierfeldertafel:

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
$\overline{B}$	$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{9}$
$\sum$	$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$	$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$	1

Aufgaben Index

Analysis

A

D

E

F

G

I

M

N

O

S

T

W

Stochastik

A

B

E

PERFEKT VORBEREITET AUF DIE ABI-PRÜFUNG FOS·BOS 12 Bayern 2022

ENTWICKELT VON PÄDAGOGEN

- ✓ An den **LehrplanPLUS** angepasste Original-Prüfungen
- ✓ Anschauliche, ausführliche und nachvollziehbare Lösungswege
- ✓ Miniskript mit Beispielen zzgl. Übungsteil mit ausführlichen Lösungen
- ✓ Mit Musterprüfungen im Stil der neuen Fachabiturprüfung
- ✓ Mit Operatoren als Handlungsanweisungen
- ✓ Inkl. neuer Anpassungen für die Prüfung 2022

Abi-Trainer für FOS · BOS 12 MNT 2022

DIGITALES COACHING

- ✓ Neue **Lernplattform** mit geschützem Mitgliederbereich
- ✓ Themenbezogene, kurze, verständliche Lernvideos
- ✓ Individuelles Online-Coaching
- ✓ Prüfungsvorbereitung Online
- ✓ Immer auf dem aktuellsten Stand

Alle weiteren Informationen auf www.lern.de

SCAN ME

Hier wachsen kluge Köpfe

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Bestell-Nr. : EAN 9783743000797

FOS·BOS 12. Klasse | Fachabitur | Bayern

ISBN 978-3-7430-0079-7

€ 11,90

9 783743 000797 >

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
lernverlag
Fürstenrieder Straße 52
80686 München
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de