10. Klasse

Realschule MSA Bayern

Mathematik II/III

- Die ideale Prüfungsvorbereitung -

MSA 2022

BLICK ins BUCH
inkl. Prüfung 2021

DIGITALES COACHING

RS 10

Realschule 10. Klasse | Mittlerer Schulabschluss | Bayern

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Original-Prüfungen
Mathematik WPFG II/III
Realschule Bayern
2022

erstellt

für Schülerinnen und Schüler
der Realschulen in Bayern
mit der Wahlpflichtfächergruppe II/III

INKL.
Original-Prüfung
2021
mit Lösungen

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Vorwort

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler,

in diesem speziellen Prüfungsvorbereitungsbuch **Original-Prüfungen Mathematik II/III Realschule Bayern 2022** sind die letzten acht zentral gestellten Originalprüfungen der Jahre 2014 bis 2021 enthalten. Dazu gibt es schülergerechte, lehrplankonforme und ausführliche Lösungen, die für den Schüler leicht verständlich und nachvollziehbar erstellt worden sind.
Das Prüfungsvorbereitungsbuch Original-Prüfungen Mathematik I Realschule Bayern 2022 ist eine ideale Unterstützung während der Abschlussklasse und dient zur Vorbereitung auf eine erfolgreiche Abschlussprüfung.
Sie finden im ersten Teil eine kompakte Übersicht als Nachschlagewerk aller prüfungsrelevanter Themengebiete. Im Anschluss daran finden Sie die Prüfungsaufgaben und ausführliche Lösungen.

Hinweise

Die Abschlussprüfung 2022 findet nach Vorgaben des *Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus* am Montag **27.06.2022** statt und dauert **150 Minuten**.
(Stand 01.09.2021 - Angaben ohne Gewähr)
Als **Hilfsmittel** ist ein elektronischer Taschenrechner und eine Formelsammlung zugelassen.
Alle Zeichnungen haben einen Hinweis erhalten, da die Zeichnungen durch die Skalierung des Buches nicht maßstabsgetreu sind.

Tipps

Fangen Sie rechtzeitig an sich auf die Abschlussprüfung vorzubereiten und arbeiten Sie kontinuierlich alte Prüfungen durch. Wiederholen Sie die einzelnen Prüfungen mehrmals, um die notwendige Sicherheit zu erlangen. Zur Lernzielkontrolle können Sie den Prüfungsplaner im Innenteil dieses Prüfungsvorbereitungsbuch verwenden.
Üben Sie also, so oft Sie können.

Notenschlüssel

Der Notenschlüssel wird vom *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* festgelegt. In der folgenden Tabelle finden Sie den Notenschlüssel der letzten acht Prüfungsjahrgänge.

Jahrgang 2014 - 2021

Note 1:	53 – 45	Punkte
Note 2:	44 – 36	Punkte
Note 3:	35 – 27	Punkte
Note 4:	26 – 18	Punkte
Note 5:	17 – 9	Punkte
Note 6:	8 – 0	Punkte

Impressum
lern.de Bildungsgesellschaft mbH
Geschäftsführer: Sascha Jankovic
Fürstenrieder Str. 52
80686 München
Amtsgericht München: HRB 205623
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de – https://www.lern-verlag.de
lernverlag, lern.de und cleverlag sind eingetragene Marken von Sascha Jankovic, Inhaber und Verleger.

Druck: Deutschland
Lösungen:
Sascha Jankovic, Simon Rümmler und das Team aus Pädagogen und Naturwissenschaftlern der lern.de Bildungsgesellschaft mbH.

Wir danken dem *Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus* für die freundliche Genehmigung, die Original-Prüfungen abdrucken zu dürfen. Die Lösungsvorschläge liegen nicht in der Verantwortung des Ministeriums.

6. ergänzte Auflage ©2021 **1. Druck**
ISBN-Nummer: 978-3-7430-0082-7
Artikelnummer:
EAN 9783743000827

Aktuelles Rund um die Prüfung 2022 und diesem Buch

Als kleiner Verlag schreiben wir für alle Schüler:innen nachvollziehbare, verständliche und ausführliche Lösungen zu den Original-Prüfungen und versuchen unsere Titel auch während des Schuljahres immer aktuell zu halten. Da wir seit über 20 Jahren individuelle Lernförderung durchführen, stehen bei uns alle Schüler:innen an erster Stelle, wenn es um Fragen rund um das Buch, Verständnisprobleme bei dem ein oder anderen Thema oder Wünsche geht.
Egal ob es um übersehene Rechtschreibfehler, Rechenfehler oder auch Wünsche von Lehrer:innen oder Schüler:innen geht, wir setzen uns sofort hin und versuchen Gewünschtes umzusetzen. Es kostet niemanden etwas, und alle profitieren davon, auch wenn wir Mehrarbeit durch diesen kostenlosen Service haben.

Wir erreichen Sie uns am besten?

Schreiben Sie uns eine E-Mail an **kontakt@lern-verlag.de**

Schreiben Sie uns eine Nachricht, schicken Sie ein Foto von der betroffenen Seite. Wir prüfen, ändern und veröffentlichen bei Bedarf im kostenlosen Downloadbereich des lernverlags die durchgeführten Änderungen.

WhatsApp-Business
+49 89 54 64 52 00

Sie können uns gerne unter der selben Nummer anrufen.

Digitales zu diesem Buch

Unter **https://lern.de** bauen wir gerade eine Lernplattform auf.
Du suchst ein Video über quadratische Funktionen oder die Berechnung von Winkeln in rechtwinkligen Dreiecken und bekommst aktuell auf anderen Plattformen 50 Videos angezeigt mit unterschiedlichen Erklärungen? Das soll sich ändern. Ein Begriff und maximal 3 Videos, die zusammenhängen, sollen angezeigt werden.
Wir arbeiten unter Hochdruck daran, kurze animierte Erklärvideos, passend zum Unterrichtssoff und „ON-TOP“ Lösungsvideos zu den Original-Prüfungen zu erstellen.
Schau öfters einmal vorbei oder melde dich am besten zu unserem **Newsletter** an, der **maximal zweimal pro Monat** verschickt wird.

Änderungen in dieser Neuauflage 2021/2022 - ISBN: 978-3-7430-0082-7

- Älteste Original-Prüfung 2013 herausgenommen und das Vorwort überarbeitet
- Kopfzeile im Buch übersichtlicher gestaltet und themenbezogene Übersicht erstellt
- Aktuelles, Inhaltsübersicht und Übersicht der einzelnen Themengebiete eingefügt
- Lösungsmenge $\mathbb{L}$ bei Lösungsformel mit angegeben; Schreibweise betroffener Formeln mit π angepasst
- Sämtliche Rechenschritte in Lösungen nochmals ausführlicher dargestellt
- **Original-Prüfung 2021 inkl. ausführlichen Lösungen eingefügt**

Inhaltsverzeichnis

Themenbezogene Übersicht - Finde Dich leicht zurecht

Damit man sich auch während des Schuljahres optimal auf die einzelnen Arbeiten vorbereiten kann, haben wir eine **Übersicht zu den einzelnen Themengebieten** erstellt.
So kann man sich beispielsweise gezielt auf die Arbeit mit dem Thema *Rotationskörper* vorbereiten und dazu alle entsprechenden Original-Prüfungen durcharbeiten.
In den grau hinterlegten Jahrgängen wurde das entsprechende Thema nicht abgeprüft.

Quadratische Funktionen

Parabel, Scheitelpunkt, Schnittpunkte, Scheitelpunktform, Geraden, Lösungsformel, in abh. von x

Jahrgänge:	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**	**2020**	**2021**
Seiten:	23	33	59	75	90	98	122	130

Ebene Geometrie

sin, cos, tan, Sinussatz, Kosinussatz, Vierstreckensatz

Seiten:	41	32	52	76	84	105	123	137

Raumgeometrie

Schrägbild, sin, cos, tan, Sinussatz, Kosinussatz, Vierstreckensatz, Flächen und Volumen

Seiten:	24	42	60	68	91	106	114	138

Rotationskörper

Spiegelachse, sin, cos, tan, Sinussatz, Kosinussatz, Vierstreckensatz, Flächen und Volumen

Seiten:	16	35	54		86	100		132

Exponentialfunktionen (für 2022 nicht prüfungsrelevant - Stand: 09.08.2021)

Wachstums- und Zerfallsprozesse

Seiten:	19		51	67	83		113	

Hinweis zur Prüfung 2022 in Mathe II/III

Sonderregelung für den MSA 2022 an der Realschule:
Nicht prüfungsrelevant (Stand: 09.08.2021):

- Aus LB M 10.1:
  Funktionen der indirekten Proportionalität und Exponentialfunktionen
- Aus LB M 10.3:
  Untersuchen der Tangentiallage zweier Funktionsgraphen
- Aus LB M 10.6:
  $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1;\ \tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ und das Kennenlernen der Graphen von Funktionen mit $y = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$ und $y = \tan\alpha$ mithilfe von elektronischen Medien.

Bitte fragen Sie bzgl. Änderungen bei Ihrer Lehrkraft nach!

Stoffübersicht der Abschlussprüfungen
Realschule Bayern Mathematik II/III

1 Funktionen

Allgemeine Lösungsansätze:

Nullstellen berechnen: Funktionsterm gleich Null setzen und Gleichung nach x umformen, z. B.
$2x + 1 = 0 \iff x = -0{,}5 \implies$ Nst. $N(-0{,}5\,|\,0)$

Schnittpunkte berechnen: Gleichsetzen der beiden Funktionsterme und lösen der Gleichung nach x. Anschließend den berechneten x-Wert in einen der beiden Funktionsterme einsetzen: z. B.
$2x + 1 = 0{,}5x - 2 \iff x = -2 \implies y = 2 \cdot (-2) + 1 = -3$
$\implies$ Schnittpunkt $SP(-2\,|\,-3)$

1.1 Lineare Funktionen

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade. Zu jedem x-Wert existiert genau ein einziger y-Wert und umgekehrt.
In der folgenden Übersicht werden alle notwendigen Formeln dargestellt.

Die allgemeine Form: $ax + by = c$ $\quad a, c \in \mathbb{R}; \quad b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Die Normalform: $y = mx + t$
$m, t \in \mathbb{R}$

Der **y-Achsenabschnitt t** ist der Schnittpunkt mit der y-Achse; $x = 0$.

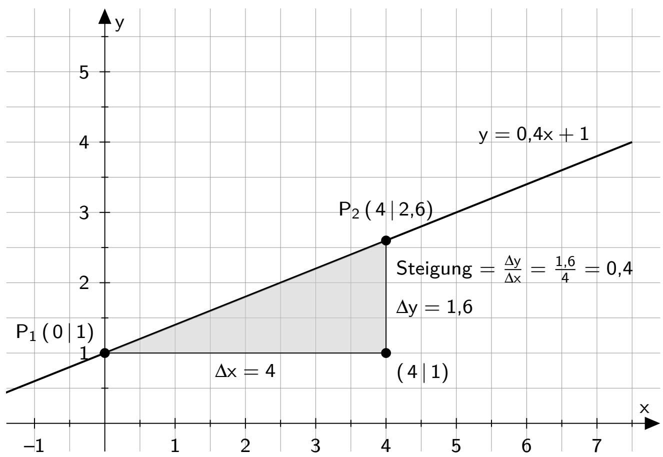
Parallele Geraden
$g_1 \parallel g_2 \iff m_1 = m_2$

Der **Steigungsfaktor m**
$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\alpha$
wobei $P_1(x_1\,|\,y_1)$ und $P_2(x_2\,|\,y_2)$ zwei beliebige (aber verschiedene) Punkte auf der Geraden sind.

Senkrechte (orthogonale) Geraden
$g_1 \perp g_2 \iff m_1 \cdot m_2 = -1$
Die Geraden g_1 und g_2 stehen im rechten Winkel zueinander.

Abszisse:
Die x-Koordinate eines Punktes;
Auch: x-Achse

Ordinate:
Die y-Koordinate eines Punktes;
Auch: y-Achse



1.2 Quadratische Funktionen

Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel. Dabei existiert eine Symmetrieachse, die durch den Scheitelpunkt der Parabel geht.

Die allgemeine Form: $y = ax^2 + bx + c \qquad b, c \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

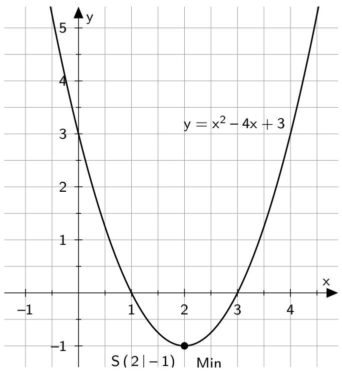
Die Normalparabel $(\mathbf{a = 1})$: $y = x^2 + bx + c$ bzw. $y = x^2 + px + q.$

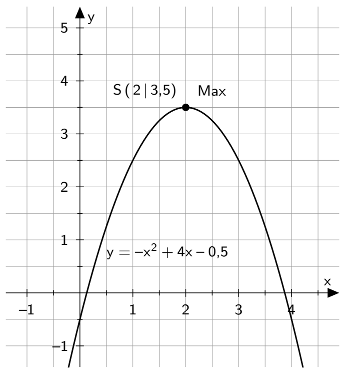
Scheitelpunkt: $S\left(x_S \,|\, y_S\right)$ $\quad S\left(-\frac{b}{2a} \,\middle|\, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ bzw. $S\left(-\frac{p}{2} \,\middle|\, q - \frac{p^2}{4}\right)$

Scheitelpunktform: $y = a(x - x_S)^2 + y_S \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Die Parameter a, b und c haben folgende Bedeutung:

Parameter	Bedingung	Bedeutung
a	$a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	Falls $a > 0$: nach oben geöffnete Parabel, mit Minimum Falls $a < 0$: nach unten geöffnete Parabel, mit Maximum Falls $\lvert a\rvert > 1$: gestreckte Parabel (schmaler als Normalparabel) Falls $\lvert a\rvert < 1$: gestauchte Parabel (breiter als Normalparabel)
b	$b \in \mathbb{R}$	Steigung, mit der die Parabel die y-Achse schneidet
c	$c \in \mathbb{R}$	Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse „y-Achsenabschnitt“





Lösen von quadratischen Gleichungen - Nullstellen berechnen

Lösungsformel: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ bzw. $x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$

Diskriminante D: $D = b^2 - 4ac$ bzw. $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

Es gilt:
$D > 0$: Zwei Lösungen
$D = 0$: Eine Lösung
$D < 0$: Keine Lösung

Beim Lösen einer quadratischen Gleichung haben sich folgende Schritte bewährt:

1. **Schritt:** a, b und c neben der gegeben Funktion untereinander schreiben.
2. **Schritt:** Berechnen der Diskriminante.
3. **Schritt:** Einfügen aller Zahlen in die Lösungsformel.

Quadratische Funktionen bestimmen

Oft muss eine quadratische Funktion mithilfe gegebener Punkte bestimmt werden. Hierbei müssen die Parameter a, b und c berechnet werden.
Für drei unbekannte Parameter benötigt man

- *drei verschiedene Punkte, die alle auf der Parabel liegen* **oder**
- *den Scheitelpunkt und einen anderen Punkt auf der Parabel*

Sind zusätzliche Informationen gegeben, benötigt man entsprechend weniger Punkte auf der Parabel. Zusätzliche Informationen können z. B. sein:

- Normalparabel $(a = 1)$
- der y-Achsenabschnitt (z. B. $c = 2$)

Mit den gegeben Informationen gilt es ein Gleichungssystem aufzustellen und zu lösen.

Bsp. 1.2 Die Parabel p hat den Scheitelpunkt $S(-1\,|\,-4)$ und verläuft durch den Punkt $P(2{,}5\,|\,8{,}25)$. Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung von p in der Scheitelform und bringen Sie anschließend die Gleichung in die Form $y = ax^2 + bx + c,\ \ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\};\ b,c \in \mathbb{R}$. $(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$

Die allgemeine Scheitelpunktform lautet $y = a(x - x_S)^2 + y_S$. Einsetzen des Scheitelpunkts $S(-1\,|\,-4)$ ergibt:

$$\begin{aligned} & y = a(x-(-1))^2 + (-4) \\ \Longleftrightarrow\quad & y = a(x+1)^2 - 4 \end{aligned}$$

Hierbei handelt sich um eine Gleichung mit einer Unbekannten (a). Dieses a wird bestimmt, indem man den Punkt $P(2{,}5\,|\,8{,}25)$ in diese Gleichung einsetzt und nach a umformt:

$$\begin{aligned} & 8{,}25 = a(2{,}5+1)^2 - 4 \\ \Longleftrightarrow\quad & 8{,}25 = a \cdot 3{,}5^2 - 4 \\ \Longleftrightarrow\quad & 8{,}25 = 12{,}25a - 4 && |+4 \\ \Longleftrightarrow\quad & 12{,}25 = 12{,}25a && |:12{,}25 \\ \Longleftrightarrow\quad & a = 1 \end{aligned}$$

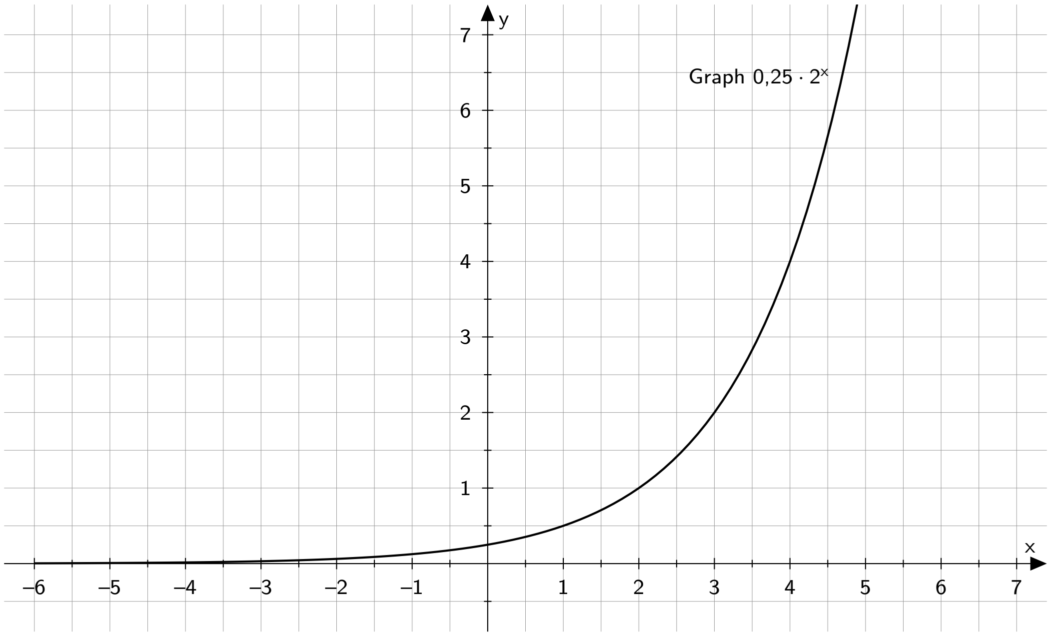
a ist nun bestimmt. Um die Scheitelpunktform $(y = a(x+1)^2 - 4)$ auf die allgemeine Form zu bringen, setzt man a in die Scheitelpunktform ein und löst die binomische Formel auf:

$$\begin{aligned} & y = 1 \cdot (x+1)^2 - 4 \\ \Longleftrightarrow\quad & y = (x+1)^2 - 4 \\ \Longleftrightarrow\quad & y = x^2 + 2x + 1^2 - 4 \\ \Longleftrightarrow\quad & y = x^2 + 2x - 3 \end{aligned}$$

Somit wurde die Gleichung von p rechnerisch ermittelt: $p\colon\ y = x^2 + 2x - 3$.

1.3 Exponentialfunkion

Neben der linearen und quadratischen Funktion spielt auch die Exponentialfunktion eine bedeutende Rolle.



Die allgemeine Funktionsgleichung der **Exponentialfunktion** lautet für $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ und $c \in \mathbb{R}$:

$$y = k \cdot a^x + c \quad \text{mit}$$
$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$
$$\text{falls } k > 0: \quad \mathbb{W} = \{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ und } y > c\}$$
$$\text{falls } k < 0: \quad \mathbb{W} = \{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ und } y < c\}$$

Die Parameter k, a und c haben folgende Bedeutung:

Parameter	Bedingung	Bedeutung
k	$k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	Streckfaktor; $P\,(0 \mid k + c)$ liegt auf Graph Falls k negativ: Spiegelung an x-Achse
a	$a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$	Falls $a > 1$: monoton Steigend Falls $a < 1$: monoton fallend
c	$c \in \mathbb{R}$	Verschiebung in y-Richtung

Die Asymptote ist stets eine Parallele zur x-Achse mit der Gleichung $y = c$.

Aus dem Parameter a lässt sich immer eine prozentuale Zu- oder Abnahme rauslesen. Hierfür muss der Wert a immer im Verhältnis zu 1 (100 %) gesehen werden, z. B.:

Für die Funktion $y = 5 \cdot 1{,}25^x$ gilt $a = 1{,}25 = 1 + 0{,}25$. Das entspricht 100 % + 25 %, somit ist die Prozentuale Zunahme 25 %.

Für die Funktion $y = 2 \cdot 0{,}85^x$ gilt $a = 0{,}85 = 1 - 0{,}15$. Das entspricht 100 % – 15 %, somit ist die prozentuale Abnahme 15 %.

2 Ebene Geometrie

2.1 Punkte und Vektoren

$A\,(x_A \mid y_A)$	Punkt A mit Koordinaten x_A (Abszisse) und y_A (Ordinate)
$B\,(x_B \mid y_B)$	Punkt B mit Koordinaten x_B (Abszisse) und y_B (Ordinate)
$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$	Ortspfeil von A (Pfeil von Ursprung O zum Punkt A)
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_B \end{pmatrix}$	Pfeil $\overrightarrow{AB}$: Spitze (Punkt B) minus Fuß (Punkt A)

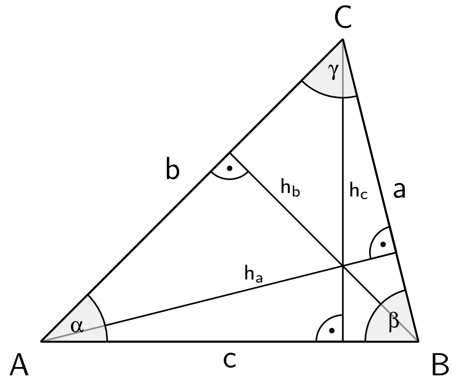
2.2 Ebene Figuren

Dreieck

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha =$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin\beta$$



Flächeninhalt im Kartesischen Koordinatensystem:

Zwei Vektoren mit gemeinsamen Fußpunkt, z. B. $\overrightarrow{AB} = \vec{c} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$

Drehsinn: gegen den Uhrzeigersinn: $\Longrightarrow \quad A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_c & x_b \\ y_c & y_b \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (x_c \cdot y_b - x_b \cdot y_c)$

Sonderfälle:

Gleichschenkliges Dreieck	*Gleichseitiges Dreieck*	*Rechtwinkliges Dreieck*
Zwei gleichlange Schenkel	Alle drei Seiten sind gleich lang	Ein rechter Winkel existiert, gegenüberliegende Seite: Hypotenuse, andere Seiten: Katheten

Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$ (rechtwinkliges Dreieck mit Katheten a, b und Hypotenuse c)

Rechteck

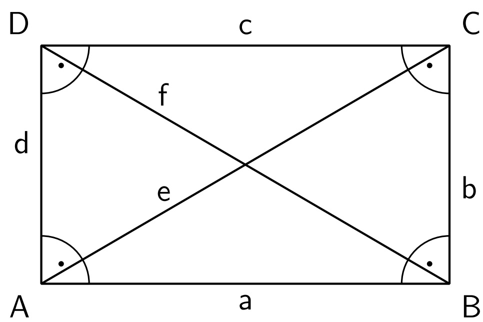
Es gilt: $a = c, \quad b = d$,

$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ$,

$e = f = \sqrt{a^2 + b^2}$

Umfang: $U = 2 \cdot (a + b)$

Flächeninhalt: $A = a \cdot b$

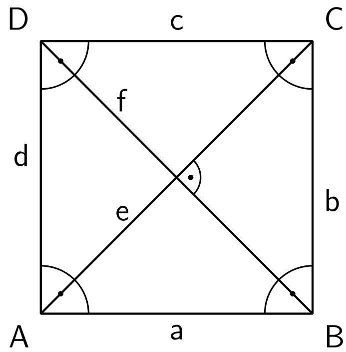


Quadrat

Es gilt: $a = b = c = d$,
$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ$,
$e = f = a\sqrt{2}$

Umfang: $U = 4 \cdot a$

Flächeninhalt: $A = a^2$



Parallelogramm

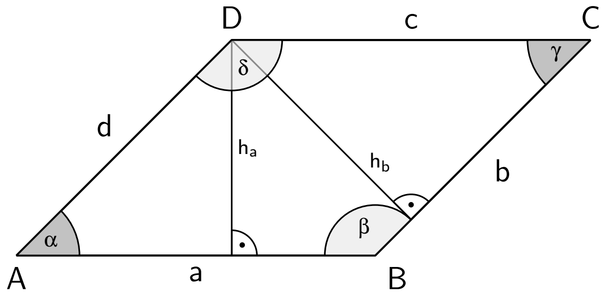
Es gilt: $a = c$, $b = d$ und $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$

Umfang: $U = 2 \cdot (a + b)$

Flächeninhalt: $A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$

Flächeninhalt im Kartesischen Koordinatensystem:
Zwei Vektoren mit gemeinsamen Fußpunkt, z. B.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix}$,

Drehsinn: gegen den Uhrzeigersinn: $\Longrightarrow$ $A = \begin{vmatrix} x_a & x_d \\ y_a & y_d \end{vmatrix} = x_a \cdot y_d - x_d \cdot y_a$



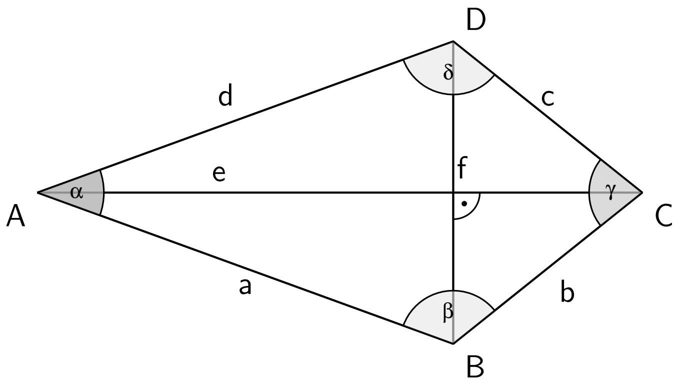
Drachenviereck

Es gilt: $a = d$, $b = c$ und $\beta = \delta$

Umfang: $U = 2(a + b)$

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$

Spezialfall: Raute, alle Seiten sind gleich lang.



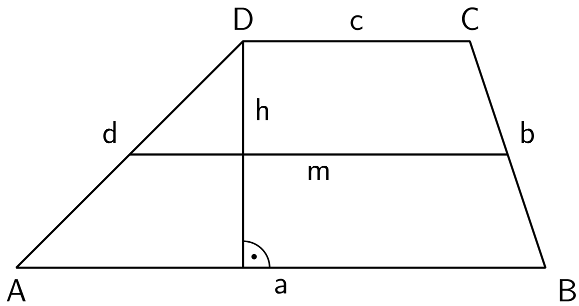
Trapez

Es gilt: $[AB] \parallel [CD]$

Umfang: $U = a + b + c + d$

Mittellinie: $m = \frac{a + c}{2}$

Flächeninhalt: $A = m \cdot h$



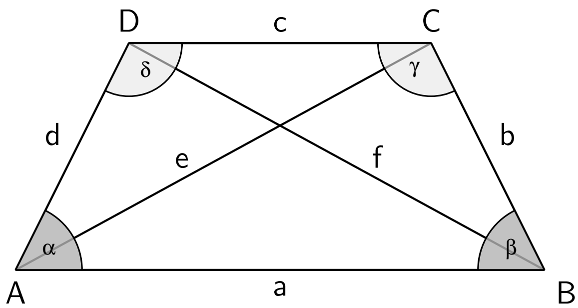
Gleichschenkliges Trapez

Es gilt: $[AB] \parallel [CD]$, $b = d$, $e = f$
und $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$

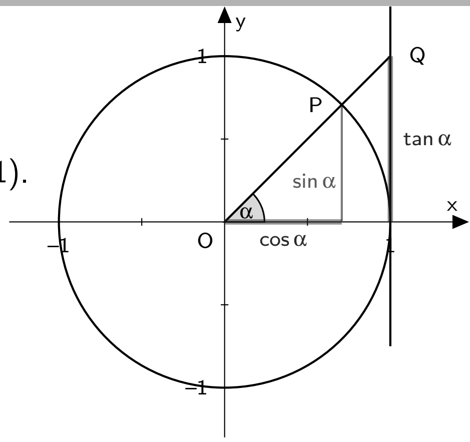
Umfang: $U = a + 2b + c$

Mittellinie: $m = \frac{a + c}{2}$

Flächeninhalt: $A = m \cdot h$



2.3 Trigonometrie



Sei $P\,(x_P \,|\, y_P)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis (Radius $= 1$).
Man definiert:

$\cos\alpha = x_P \qquad \sin\alpha = y_P \qquad \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Es gilt: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Die Gerade OP hat die Steigung: $m = \tan\alpha$

Quadrantenregel

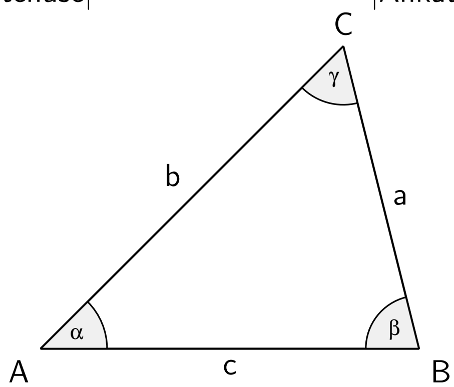
Für $0° < \alpha < 90°$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\sin(180° - \alpha) &= +\sin\alpha & \cos(180° - \alpha) &= -\cos\alpha & \tan(180° - \alpha) &= -\tan\alpha\\
\sin(180° + \alpha) &= -\sin\alpha & \cos(180° + \alpha) &= -\cos\alpha & \tan(180° + \alpha) &= +\tan\alpha\\
\sin(360° - \alpha) &= -\sin\alpha & \cos(360° - \alpha) &= +\cos\alpha & \tan(360° - \alpha) &= -\tan\alpha
\end{aligned}
$$

Im rechtwinkligen Dreieck gelten die Formeln:

$$\sin\alpha = \frac{|\text{Gegenkathete}|}{|\text{Hypotenuse}|} \qquad \cos\alpha = \frac{|\text{Ankathete}|}{|\text{Hypotenuse}|} \qquad \tan\alpha = \frac{|\text{Gegenkathete}|}{|\text{Ankathete}|}$$

Im beliebigen Dreieck gilt:



Sinussatz für $\alpha, \beta, \gamma \in \,]0°;\, 180°[$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \qquad \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c} \qquad \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Kosinussatz für $\alpha, \beta, \gamma \in \,]0°;\, 180°[$

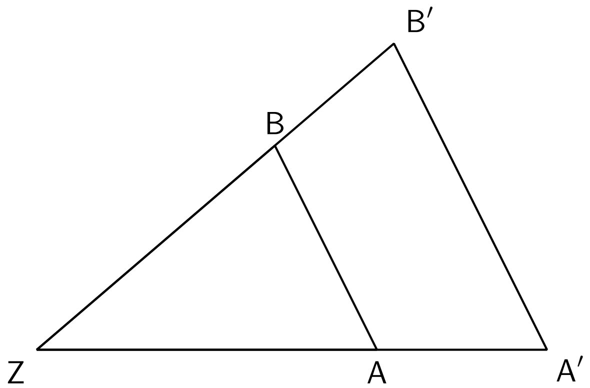
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

2.4 Vierstreckensatz

Der Vierstreckensatz (auch Strahlensatz genannt) wird zur Berechnung von Streckenlängen verwendet. Damit der Vierstreckensatz angewendet werden kann, muss folgende Ausgangssituation gegeben sein: *Einem Dreieck* $ZA'B'$ *wird eine zu* $[A'B']$ *parallele Strecke* $[AB]$ *einbeschrieben, also* $[A'B'] \parallel [AB]$. Dann gelten nach dem Vierstreckensatz folgende Längenverhältnisse:



$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}} \qquad \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}$$

bzw.

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{ZB'}} \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}}$$

3 Raumgeometrie

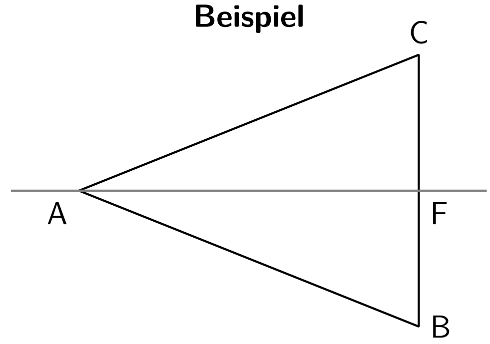
3.1 Schrägbild

Ein Schrägbild mit Verzerrungswinkel ω und Verzerrungsfaktor q wird am besten folgendermaßen eingezeichnet: Dazu sei folgendes **Beispiel** gegeben:

Bsp. 3.1 Das gleichschenklige Dreieck ABC mit Grundseite [BC] ist Grundfläche der Pyramide ABCS mit der Höhe $h = 5\,\text{cm}$. Die Seitenlängen haben folgende Maße: $[AB] = [AC] = 3\,\text{cm}$, $[BC] = 4\,\text{cm}$. Der Punkt F ist der Fußpunkt der Höhe des Dreiecks ABC und es gilt $[BF] = 2\,\text{cm}$. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Punkt F. Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide ABCS, wobei die Strecke [AF] auf der Schrägbildachse liegen soll. Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.

Schritte | **Beispiel**

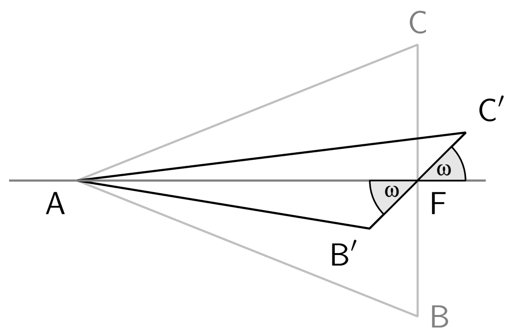
1. Schritt: Die geforderte Grundfläche wird als normale, ebene Figur gezeichnet; dabei ist darauf zu achten, dass die gewünschte Schrägbildachse in der Horizontalen liegt.



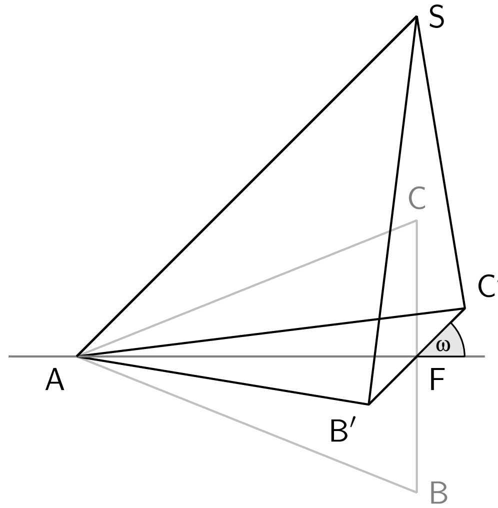
2. Schritt: Von jedem Punkt der Grundfläche, der ober- bzw. unterhalb der Schrägbildachse liegt, fällt man das Lot auf die Schrägbildachse.

Die Lotstrecken sind bereits eingezeichnet: [BF] bzw. [FC]

3. Schritt: Vom Lotpunkt aus zeichnet man mit dem gegebenen Verzerrungswinkel ω die mit dem Verzerrungsfaktor q gestreckten neuen Strecken. So gilt z. B. $\overline{FC'} = q \cdot \overline{FC}$.



4. Schritt: Das Schrägbild wird z. B. zum Prisma oder zur Pyramide vervollständigt.



3.2 Prisma und Pyramide

Zu unterscheiden sind *Prismen* und *Pyramiden*.

Prisma

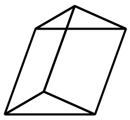
Die Seiten*kanten* sind parallel zueinander.

Die Seiten*flächen* sind stets Parallelogramme.

Die Grund- und Deckfläche sind kongruente Vielecke.

Gerades Prisma: Die Seitenkanten sind senkrecht zur Grundfläche.

Schiefes Prisma: Die Seitenkanten sind *nicht* senkrecht zur Grundfläche.

Beispiele: Würfel, Quader, 

$V = G \cdot h$

$O = 2G + M$

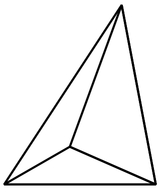
Pyramide

Alle Seiten*kanten* laufen in einen Punkt (die Spitze).

Die Seiten*flächen* sind stets Dreiecke.

Die Grundfläche ist ein Vieleck.

Reguläre Pyramide: Alle Seitenkanten sind gleich lang.

Beispiel: 

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

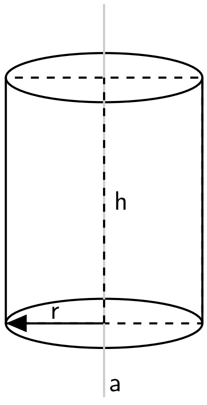
$O = G + M$

Wobei V das Volumen, G die Grundfläche, h die Höhe, O die Oberfläche und M die Mantelfläche ist.

3.3 Rotationskörper

Dreht man eine zweidimensionale Figur um eine Drehachse, so entsteht ein Rotationskörper. Dieser ist symmetrisch zu seiner Drehachse. Ein Axialschnitt eines Rotationskörpers ist ein Schnitt durch diesen entlang seiner Drehachse: Man erhält wieder die zweidimensionale Figur, aus der der Rotationskörper entstanden ist. Im wesentlichen gibt es den geraden Kreiszylinder und Kreiskegel:

Gerader Kreiszylinder



Drehachse: a

Axialschnitt: Rechteck

Grund- und Deckfläche: Kreis

Radius: r

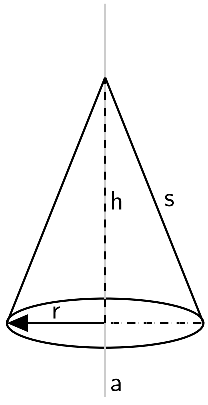
Höhe: h

$V = \pi r^2 h$

$O = 2G + M$

$M = \pi 2rh$

Gerader Kreiskegel



Drehachse: a

Axialschnitt: Gleichseitiges Dreieck

Grundfläche: Kreis

Radius: r

Höhe: h

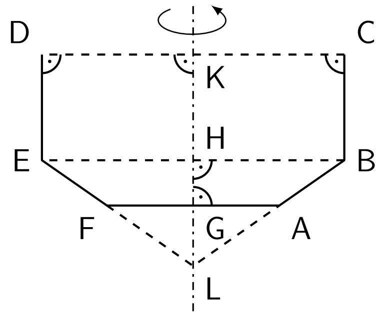
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$O = G + M$

$M = \pi rs$

Wobei V das Volumen, G die Grundfläche, O die Oberfläche und M die Mantelfläche ist.

A 1 Die nebenstehende Skizze dient als Vorlage für eine Pflanzschale. Sie zeigt den Axialschnitt ABCDEF eines Rotationskörpers mit der Rotationsachse KL. 5 P

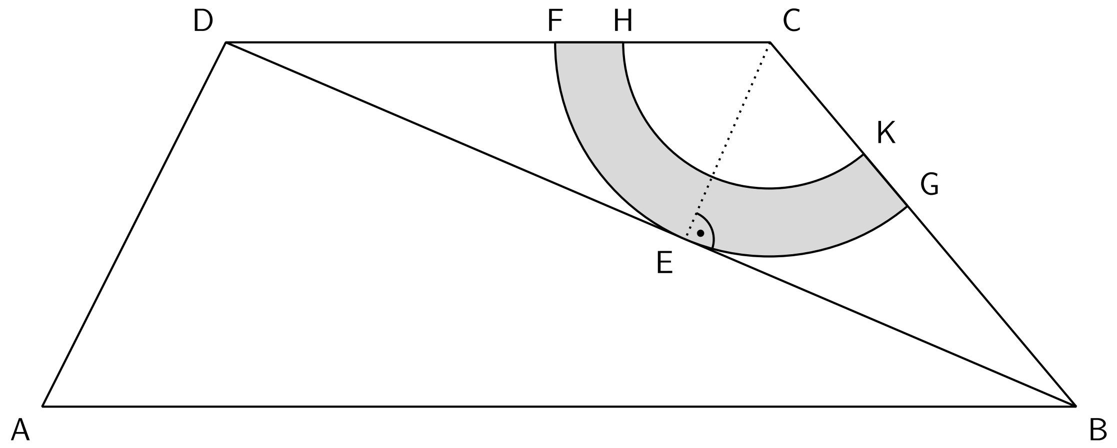


Es gilt: $\overline{BC} = 1{,}4\,\text{dm}$; $\overline{CD} = 4{,}0\,\text{dm}$; $\overline{GH} = 0{,}6\,\text{dm}$; $\sphericalangle EBA = 35°$.

Begründen Sie rechnerisch, ob der Inhalt eines 20-Liter-Sackes Erde vollständig in die Pflanzschale gefüllt werden kann. [Teilergebnis: $\overline{LH} = 1{,}4\,\text{dm}$]

A 2.0 Die Zeichnung zeigt das Trapez ABCD mit [AB] || [CD].
Es gilt: $\overline{CD} = 8\,\text{cm}$; $\overline{AD} = 6\,\text{cm}$; $\overline{BC} = 7\,\text{cm}$; $\sphericalangle DCB = 130°$.

Runden Sie im Folgenden alle Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.
(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da die Zeichnung für den Buchdruck skaliert wurde.)



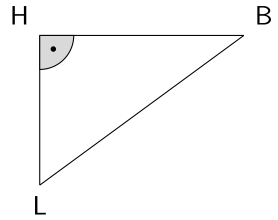
A 2.1 Berechnen Sie die Länge der Diagonalen [BD], das Maß ε des Winkels CBD und das Maß α des Winkels BAD. 5 P
[Ergebnisse: $\overline{BD} = 13{,}60\,\text{cm}$; $\varepsilon = 26{,}79°$; $\alpha = 63{,}29°$]

A 1 Für das Volumen der Pflanzschale gilt:

$$
\begin{aligned}
& V_{\text{Schale}} = V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{großer Kegel}} - V_{\text{kleiner Kegel}} \\
\Longleftrightarrow \quad & V_{\text{Schale}} = \left(\left(\frac{1}{2}\cdot\overline{CD}\right)^2\cdot\pi\cdot\overline{BC} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\overline{CD}\right)^2\cdot\pi\cdot\overline{LH} - \frac{1}{3}\cdot\overline{AG}^2\cdot\pi\cdot\overline{LG}\right)\,\text{dm}^3
\end{aligned}
$$

Die Länge der Strecke [LH] wird im rechtwinkligen Dreieck BHL mit dem Tangens bestimmt:

$$
\begin{aligned}
& \tan 35^\circ = \frac{\overline{LH}}{2\,\text{dm}} && |\cdot 2\,\text{dm} \\
\Longleftrightarrow \quad & \overline{LH} = 2\,\text{dm}\cdot\tan 35^\circ \\
\Longleftrightarrow \quad & \underline{\overline{LH} = 1{,}4\,\text{dm}}
\end{aligned}
$$

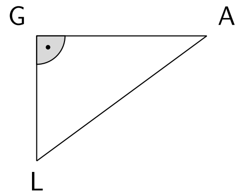


Für die Länge $\overline{LG}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& \overline{LG} = \overline{LH} - \overline{GH} \\
\Longleftrightarrow \quad & \overline{LG} = (1{,}4 - 0{,}6)\,\text{dm} \\
\Longleftrightarrow \quad & \underline{\overline{LG} = 0{,}8\,\text{dm}}
\end{aligned}
$$

Für $\overline{AG}$ gilt im rechtwinkligen Dreieck AGL:

$$
\begin{aligned}
& \tan 35^\circ = \frac{\overline{LG}}{\overline{AG}} \\
\Longleftrightarrow \quad & \tan 35^\circ = \frac{0{,}8\,\text{dm}}{\overline{AG}} && |\cdot\overline{AG} \\
\Longleftrightarrow \quad & \overline{AG}\cdot\tan 35^\circ = 0{,}8\,\text{dm} && |:\tan 35^\circ \\
\Longleftrightarrow \quad & \overline{AG} = \frac{0{,}8\,\text{dm}}{\tan 35^\circ} \\
\Longleftrightarrow \quad & \underline{\overline{AG} = 1{,}1\,\text{dm}}
\end{aligned}
$$



Somit ergibt sich letztendlich für das Volumen der Pflanzschale:

$$
\begin{aligned}
& V_{\text{Schale}} = \left(2^2\cdot\pi\cdot 1{,}4 + \frac{1}{3}\cdot 2^2\cdot\pi\cdot 1{,}4 - \frac{1}{3}\cdot 1{,}1^2\cdot\pi\cdot 0{,}8\right)\,\text{dm}^3 \\
\Longleftrightarrow \quad & \underline{\underline{V_{\text{Schale}} = 22{,}4\,\text{dm}^3}}
\end{aligned}
$$

Somit kann die Schale den Inhalt eines 20-Liter-Sackes Erde fassen, denn es gilt:

$$\underline{\underline{\underline{22{,}4\,\text{dm}^3 = 22{,}4\,\text{l und } 22{,}4\,\text{l} > 20\,\text{l}}}}$$

A 2.1 Die Länge der Diagonalen [BD] berechnet sich im Dreieck BCD mithilfe des Kosinussatzes:

$$
\begin{aligned}
& \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2\cdot\overline{CD}\cdot\overline{BC}\cdot\cos\sphericalangle DCB && |\sqrt{} \\
\Longleftrightarrow \quad & \overline{BD} = \sqrt{8^2 + 7^2 - 2\cdot 8\cdot 7\cdot\cos 130^\circ}\,\text{cm} \\
\Longleftrightarrow \quad & \underline{\underline{\overline{BD} = 13{,}60\,\text{cm}}}
\end{aligned}
$$

Das Maß ε des Winkels CBD wird ebenfalls mit dem Kosinussatz im Dreieck BCD berechnet:

$$\begin{aligned}
& \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BD} \cdot \cos\varepsilon \\
\Longleftrightarrow\quad & 8^2 = 7^2 + 13{,}60^2 - 2 \cdot 7 \cdot 13{,}60 \cdot \cos\varepsilon \\
\Longleftrightarrow\quad & 64 = 233{,}96 - 190{,}40 \cdot \cos\varepsilon && \mid -233{,}96 \\
\Longleftrightarrow\quad & -169{,}96 = -190{,}40 \cdot \cos\varepsilon && \mid :(-190{,}40) \\
\Longleftrightarrow\quad & \cos\varepsilon = \frac{-169{,}96}{-190{,}40} && \mid \cos^{-1}(\,) \\
\Longleftrightarrow\quad & \underline{\underline{\varepsilon = 26{,}79^\circ}}
\end{aligned}$$

Um das Maß α des Winkels BAD zu berechnen, überlegt man sich zunächst, dass aufgrund der Parallelität [CD] ∥ [AB] folgende Gleichung gilt:

$$\begin{aligned}
& \sphericalangle DCB + \varepsilon + \sphericalangle DBA = 180^\circ \\
\Longleftrightarrow\quad & 130^\circ + 26{,}79^\circ + \sphericalangle DBA = 180^\circ \\
\Longleftrightarrow\quad & 156{,}79^\circ + \sphericalangle DBA = 180^\circ && \mid -156{,}79^\circ \\
\Longleftrightarrow\quad & \underline{\sphericalangle DBA = 23{,}21^\circ}
\end{aligned}$$

Nun kann man mithilfe des Sinussatzes α berechnen:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin\alpha}{\overline{BD}} = \frac{\sin\sphericalangle DBA}{\overline{AD}} && \mid \cdot \overline{BD} \\
\Longleftrightarrow\quad & \sin\alpha = \frac{\overline{BD} \cdot \sin\sphericalangle DBA}{\overline{AD}} \\
\Longleftrightarrow\quad & \sin\alpha = \frac{13{,}60 \cdot \sin 23{,}21^\circ}{6} && \mid \sin^{-1}(\,) \\
\Longleftrightarrow\quad & \underline{\underline{\alpha = 63{,}29^\circ}}
\end{aligned}$$

A 2.2 Der Radius des Kreissektors CFG ist gerade die Streckenlänge $\overline{CE}$. Diese kann im rechtwinkligen Dreieck BCE mit dem Sinus berechnet werden:

$$\begin{aligned}
& \sin\varepsilon = \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}} && \mid \cdot \overline{BC} \\
\Longleftrightarrow\quad & \overline{CE} = \overline{BC} \cdot \sin\varepsilon \\
\Longleftrightarrow\quad & \overline{CE} = 7\,\text{cm} \cdot \sin 26{,}79^\circ \\
\Longleftrightarrow\quad & \underline{\underline{\overline{CE} = 3{,}16\,\text{cm}}}
\end{aligned}$$

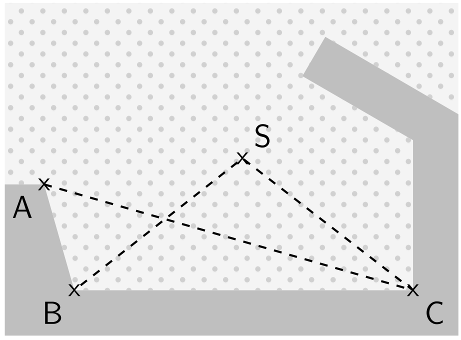
A 2.3 Den Flächeninhalt des Trapezes ABCD kann man mithilfe der beiden Teildreiecke berechnen:

$$\begin{aligned}
& A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{BC} \cdot \sin\sphericalangle DCB + \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BD} \cdot \sin\sphericalangle ADB \\
\Longleftrightarrow\quad & A_{ABCD} = \left[\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot \sin 130^\circ + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 13{,}60 \cdot \sin(180^\circ - (63{,}29^\circ + 23{,}21^\circ))\right] \text{cm}^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & \underline{A_{ABCD} = 62{,}17\,\text{cm}^2}
\end{aligned}$$

Teil A

A 1.0 Die Skizze zeigt den Grundriss eines Hafenbeckens.
Ein Schiff befindet sich an der Position S.
Es gilt:
$\sphericalangle BAC = 58°$; $\sphericalangle ACB = 16°$; $\sphericalangle SBA = 68°$;
$\overline{AB} = 182\,\text{m}$; $\overline{AC} = 635\,\text{m}$; $\overline{BS} = 353\,\text{m}$

Runden Sie im Folgenden auf ganze Meter.

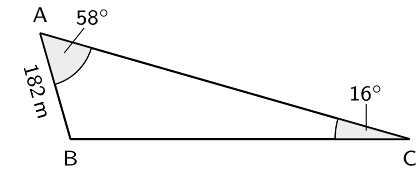


A 1.1 Berechnen Sie die Länge der Strecke [BC]. $\left[\text{Ergebnis: } \overline{BC} = 560\,\text{m}\right]$ 1 P

A 1.2 Bestimmen Sie durch Rechnung, wie weit die Position S vom Punkt C entfernt ist. 2 P
[Teilergebnis: $\sphericalangle CBS = 38°$; Ergebnis : $\overline{SC} = 356\,\text{m}$]

A 1.3 Das Schiff entfernt sich von C, bis es die Position P erreicht. P liegt auf der Halbgeraden [CS und hat die kleinstmögliche Entfernung zum Punkt A. 2 P
Berechnen Sie die Länge der Strecke [AP].

A 1.1 Die Streckenlänge $\overline{BC}$ berechnet sich mithilfe des Sinussatzes im Dreieck ABC (siehe Skizze):



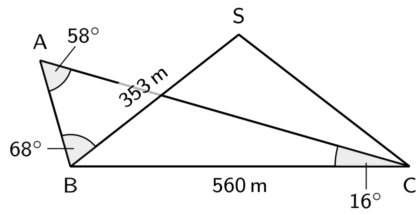
$$\frac{\overline{BC}}{\sin\sphericalangle BAC} = \frac{\overline{AB}}{\sin\sphericalangle ACB}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\overline{BC}}{\sin 58^\circ} = \frac{182\,\text{m}}{\sin 16^\circ} \qquad |\cdot \sin 58^\circ$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overline{BC} = \frac{182 \cdot \sin 58^\circ}{\sin 16^\circ}\,\text{m}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{\overline{BC} = 560\,\text{m}}}$$

A 1.2 Die Streckenlänge $\overline{SC}$ muss mithilfe des Kosinussatzes im Dreieck BCS bestimmt werden. Hierfür wird der Winkel $\sphericalangle CBS$ benötigt. Es gilt:



$$\sphericalangle CBS = \sphericalangle CBA - \sphericalangle SBA = \sphericalangle CBA - 68^\circ$$

Es muss also zunächst das Maß des Winkels $\sphericalangle CBA$ bestimmt werden. Im Dreieck ABC gilt:

$$\begin{aligned}\sphericalangle CBA &= 180^\circ - \sphericalangle BAC - \sphericalangle ACB\\ &= 180^\circ - 58^\circ - 16^\circ\\ &\underline{\underline{= 106^\circ}}\end{aligned}$$

Das Maß des Winkels CBS beträgt also $\sphericalangle CBS = 106^\circ - 68^\circ = 38^\circ$.
Mit dem Kosinussatz im Dreieck BCS gilt also:

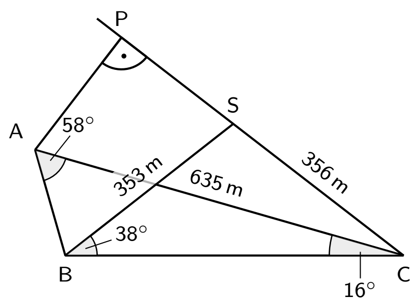
$$\overline{SC}^2 = \overline{BS}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{BS} \cdot \overline{BC} \cdot \cos\sphericalangle CBS \qquad |\sqrt{}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overline{SC} = \sqrt{353^2 + 560^2 - 2 \cdot 353 \cdot 560 \cdot \cos 38^\circ}\,\text{m}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overline{SC} = \sqrt{126\,661}\,\text{m}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{\overline{SC} = 356\,\text{m}}}$$

A 1.3 Da der Punkt P die kleinstmögliche Entfernung zum Punkt A hat, ist die Strecke [AP] ein Lot auf die Halbgerade [CS (vergleiche Skizze).
Die Streckenlänge $\overline{AP}$ wird im rechtwinkligen Dreieck ACP mithilfe des Sinus berechnet. Es gilt:



$$\sin\sphericalangle PCA = \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}$$

Hierfür wird das Maß des Winkels PCA benötigt. Dieses wird mithilfe des Winkelmaßes $\sphericalangle SCB$ bestimmt, welches wiederum mithilfe des Sinussatzes im Dreieck BCS bestimmt wird:

$$\frac{\sin\sphericalangle SCB}{\overline{BS}} = \frac{\sin\sphericalangle CBS}{\overline{CS}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\sin\sphericalangle SCB}{353\,\text{m}} = \frac{\sin 38^\circ}{356\,\text{m}} \qquad |\cdot 353\,\text{m}$$

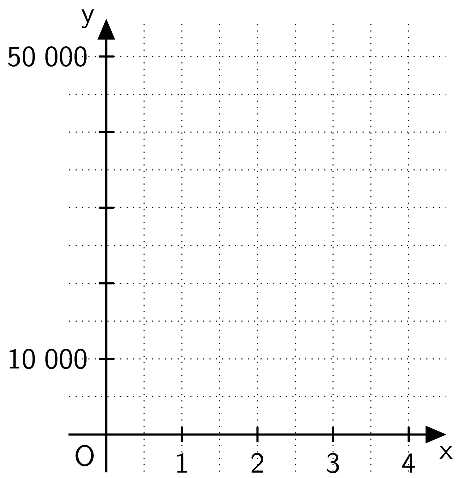
$$\Longleftrightarrow \quad \sin\sphericalangle SCB = \frac{\sin 38^\circ \cdot 353}{356}$$

A 1.0 Die Anzahl der Ladestationen für Elektrofahrzeuge in Deutschland soll laut einer Prognose in den nächsten Jahren exponentiell wachsen. Diese Entwicklung kann man näherungsweise durch die Funktion $f\colon y = 5000 \cdot 1{,}75^x$ $(\mathbb{G} = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+)$ beschreiben, wobei x die Anzahl der Jahre und y die Anzahl der Ladestationen darstellt.

A 1.1 Ergänzen Sie die Wertetabelle auf Tausender gerundet und zeichnen Sie sodann den Graphen der Funktion f in das Koordinatensystem ein. 2 P

x	0	1	2	3	4
$5000 \cdot 1{,}75^x$					

(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da die Zeichnung für den Buchdruck skaliert wurde.)



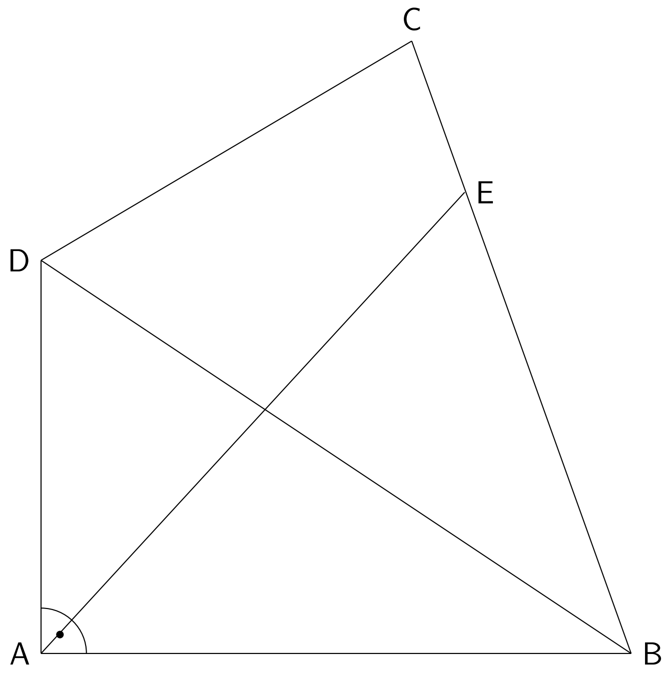
A 1.2 Ermitteln Sie mithilfe des Graphen, nach welcher Zeit die ursprüngliche Anzahl der Ladestationen erstmals um 600 % zugenommen haben wird. 2 P

A 1.3 Geben Sie an, welche jährliche Zunahme in Prozent in dieser Prognose angenommen wurde. 1 P

A 2.0 Die nebenstehende Zeichnung (nicht maßstabsgetreu) zeigt das Viereck ABCD.

Es gilt:

$\overline{AB} = 7{,}8\,\text{cm}$; $\overline{AD} = 5{,}2\,\text{cm}$;
$\overline{BC} = 8{,}6\,\text{cm}$;
$\sphericalangle BAD = 90°$; $\sphericalangle CBA = 70°$.



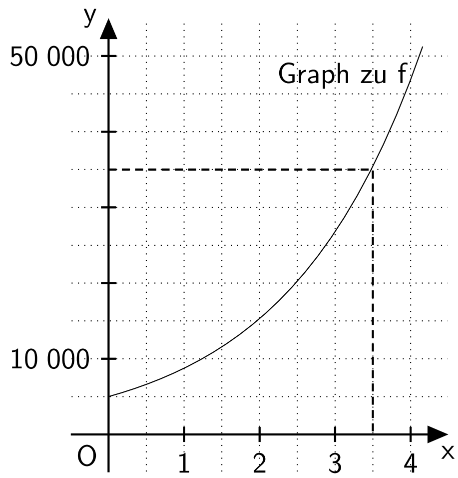
Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

A 2.1 Berechnen Sie die Länge der Diagonalen [BD] und den Flächeninhalt A des Dreiecks BCD. 4 P
[Ergebnisse: $\overline{BD} = 9{,}4\,\text{cm}$; $A = 23{,}9\,\text{cm}^2$]

A 1.1 Durch Einsetzen kann die Wertetabelle vervollständigt und dann der Graph eingezeichnet werden.

x	0	1	2	3	4
$5000 \cdot 1{,}75^x$	5000	9000	15000	27000	47000

(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da die Zeichnung für den Buchdruck skaliert wurde.)

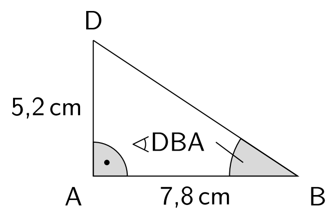


A 1.2 Bei einer ursprünglichen Anzahl von 5000, was 100 % entspricht, entspricht eine Zunahme um 600 % einem Wert von 35000. Anhand der gestrichelten Linie im Diagramm kann abgelesen werden, dass dies nach etwa $\underline{\underline{3{,}5}}$ Jahren der Fall ist.

A 1.3 Anhand der Funktionsgleichung mit dem Faktor $1{,}75^x$ kann man erkennen, dass die jährliche Zunahme bei $1{,}75 - 1 = 0{,}75 = \underline{\underline{75\,\%}}$ liegt.

A 2.1 Die Länge der Diagonalen [BD] kann im Dreieck ABD mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden:

Skizze



$$\overline{BD} = \sqrt{7{,}8^2 + 5{,}2^2}\,\text{cm} \approx \underline{\underline{9{,}4\,\text{cm}}}$$

Für den Flächeninhalt des Dreiecks BCD gilt:

$$A_{BCD} = 0{,}5 \cdot \overline{BD} \cdot \overline{BC} \cdot \sin \sphericalangle CBD$$

Dabei gilt:

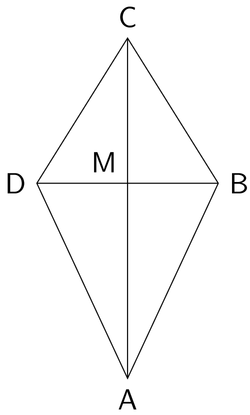
$$\sphericalangle CBD = 70^\circ - \sphericalangle DBA$$

$$\tan \sphericalangle DBA = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{5{,}2}{7{,}8} \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle DBA = 33{,}7^\circ$$

A 1.0 Pia möchte einen Flugdrachen bauen. Dazu erstellt sie nebenstehende Skizze eines Drachenvierecks ABCD mit der Symmetrieachse AC und dem Diagonalenschnittpunkt M.

Es gilt: $\overline{AB} = 95\,\text{cm}$; $\overline{AC} = 150\,\text{cm}$; $\overline{BC} = 75\,\text{cm}$.

Runden Sie im Folgenden auf Ganze.



A 1.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass für das Maß des Winkels ACB gilt: $\sphericalangle ACB = 32°$. 2 P

A 1.2 Berechnen Sie die Länge der Diagonale [BD] und den Flächeninhalt A des Drachenvierecks ABCD. 2 P

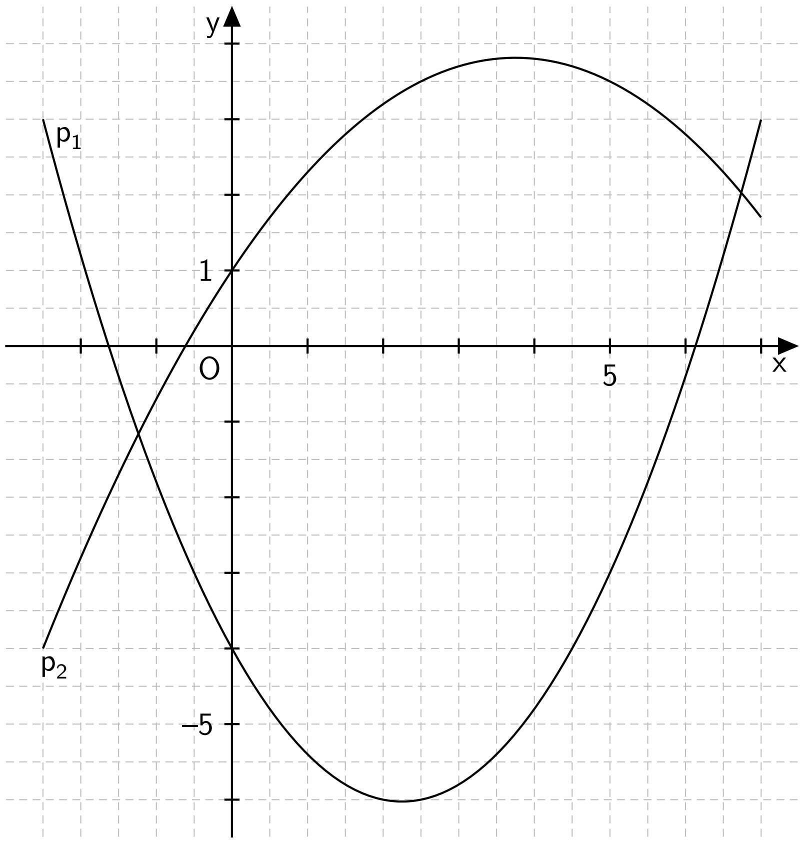
$\left[\text{Ergebnis: } \overline{BD} = 79\,\text{cm}\right]$

A 1.3 Da es im Baumarkt nur Holzstäbe mit einer Länge von 100 cm gibt, beschließt Pia, für die Diagonale [AC] diese Länge zu verwenden. Die Diagonale [BD] bleibt unverändert. 1 P

Kreuzen Sie an, um wie viel Prozent sich der Flächeninhalt dadurch verringert.

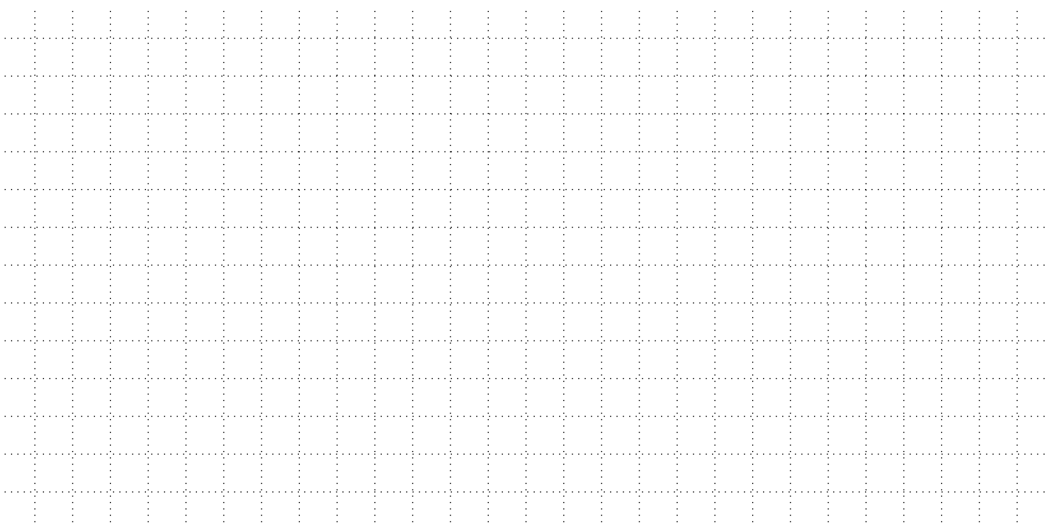
☐ 25 % ☐ 33 % ☐ 50 % ☐ 67 %

A 2.0 Gegeben sind die Parabeln p_1 mit der Gleichung $y = 0{,}4x^2 - 1{,}8x - 4$ und p_2 mit der Gleichung $y = -0{,}2x^2 + 1{,}5x + 1$ $(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.
(**Hinweis:** Das Koordinatensystem ist nicht maßstabsgetreu, da das Koordinatensystem für den Buchdruck skaliert wurde.)



A 2.1 Punkte $B_n\,(x\,|\,0{,}4x^2 - 1{,}8x - 4)$ auf p_1 und Punkte $C_n\,(x\,|\,-0{,}2x^2 + 1{,}5x + 1)$ auf p_2 haben dieselbe Abszisse x. Sie sind zusammen mit $A\,(0\,|\,1)$ für $x \in\,]0;\, 6{,}74[$ Eckpunkte von Dreiecken AB_nC_n. 2 P

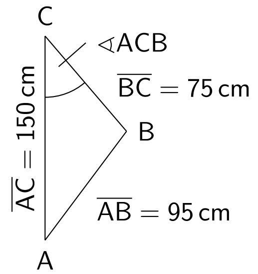
Zeichnen Sie das Dreieck AB_1C_1 für $x = 3$ in das Koordinatensystem zu A 2.0 ein. Zeigen Sie sodann, dass für die Länge der Strecken $[B_nC_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n gilt: $\overline{B_nC_n}(x) = (-0{,}6x^2 + 3{,}3x + 5)$ LE.



A 1.1 Im Dreieck ABC wird gemäß nebenstehender Skizze der Kosinussatz verwendet (Maße in cm):

$$\begin{aligned}
& \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \sphericalangle ACB \\
\Longleftrightarrow \quad & 95^2 = 150^2 + 75^2 - 2 \cdot 150 \cdot 75 \cdot \cos \sphericalangle ACB \\
\Longleftrightarrow \quad & 9025 = 22500 + 5625 - 22500 \cdot \cos \sphericalangle ACB \qquad |-28125 \\
\Longleftrightarrow \quad & -19100 = -22500 \cdot \cos \sphericalangle ACB \qquad |:(-22500) \\
\Longleftrightarrow \quad & \cos \sphericalangle ACB = \frac{191}{225} \qquad |\cos^{-1}(\ ) \\
\Rightarrow \quad & \underline{\underline{\sphericalangle ACB \approx 32^\circ}}
\end{aligned}$$

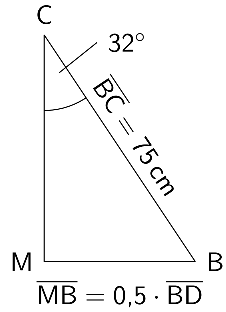
Skizze



A 1.2 Für die Berechnung der Länge der Diagonale [BD] wird das Dreieck MBC betrachtet:

$$\begin{aligned}
& \sin 32^\circ = \frac{\overline{MB}}{\overline{BC}} \qquad | \cdot \overline{BC} \\
\Longleftrightarrow \quad & \overline{MB} = \sin 32^\circ \cdot \overline{BC} \\
\Longleftrightarrow \quad & 0{,}5 \cdot \overline{BD} = \sin 32^\circ \cdot 75\,\text{cm} \qquad | \cdot 2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \underline{\underline{\overline{BD} \approx 79\,\text{cm}}}
\end{aligned}$$

Skizze



Damit kann der Flächeninhalt des Drachenvierecks bestimmt werden:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot 79\,\text{cm} \cdot 150\,\text{cm} = \underline{\underline{5925\,\text{cm}^2}}$$

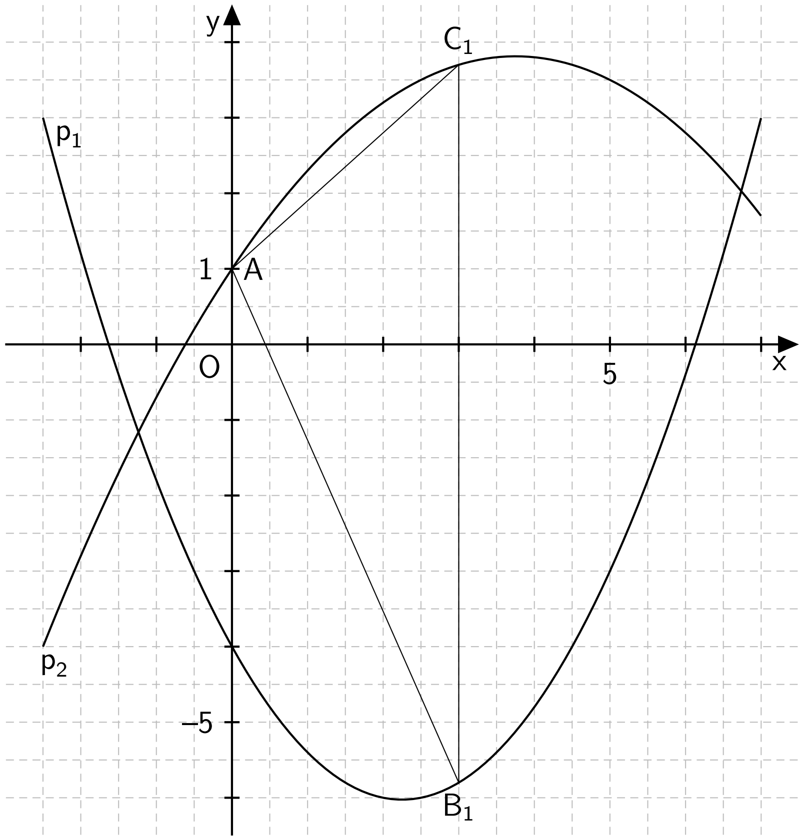
A 1.3 Da die Länge $\overline{AC}$ als Faktor in der Formel des Flächeinhaltes vorkommt, nimmt dieser im gleichen Maße ab wie die Länge an sich abnimmt. Die Abnahme beläuft sich auf

$$1 - \frac{100}{150} = 0{,}33 = \underline{\underline{33\,\%}}.$$

A 2.1 Da die Punkte B_n und C_n dieselbe Abszisse haben, entspricht die Länge $\overline{B_nC_n}$ der Differenz der y-Koordinaten beider Punkte. Dafür gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{B_nC_n} &= (y_{C_n} - y_{B_n})\,\text{LE} \\
&= (-0{,}2x^2 + 1{,}5x + 1 - (0{,}4x^2 - 1{,}8x - 4))\,\text{LE} \\
&= \underline{\underline{(-0{,}6x^2 + 3{,}3x + 5)\,\text{LE}}}
\end{aligned}$$

Graphische Darstellung:
(**Hinweis:** Das Koordinatensystem ist nicht maßstabsgetreu, da das Koordinatensystem für den Buchdruck skaliert wurde.)



A 2.2 Der allgemeine Ausdruck der Länge $\overline{B_nC_n}$ wird gleich 10 LE gesetzt, um den zugehörigen Wert für x zu finden.

$$\overline{B_nC_n} = 10\,\text{LE}$$
$$\Longleftrightarrow \quad -0{,}6x^2 + 3{,}3x + 5 = 10 \quad \vert -10$$
$$\Longleftrightarrow \quad -0{,}6x^2 + 3{,}3x - 5 = 0$$

Es wird nun die Diskriminante dieses quadratischen Terms berechnet, um zu bestimmen, wie viele Lösungen existieren.

$$D = 3{,}3^2 - 4 \cdot (-0{,}6) \cdot (-5) = 10{,}89 - 12 = -1{,}11 < 0$$

Da die Diskriminante kleiner null ist, hat die quadratische Gleichung keine Lösung. Somit gibt es unter den Dreiecken AB_nC_n auch kein Dreieck AB_0C_0, dessen Seite $[B_0C_0]$ eine Länge von 10 LE besitzt.

A 2.3 Die y-Koordinate des Mittelpunktes zwischen B_n und C_n erhält man, indem man deren y-Koordinaten aufaddiert und das Ergebnis halbiert:

$$y_{M_n} = \frac{y_{B_n} + y_{C_n}}{2}$$

B 1.0 Die Parabel p mit dem Scheitelpunkt $S(5\,|-4{,}5)$ hat eine Gleichung der Form $y = 0{,}1x^2 + bx + c$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; $b, c \in \mathbb{R}$).

Die Gerade g hat die Gleichung $y = -0{,}5x + 1$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 1.1 Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Gleichung der Parabel p gilt: $y = 0{,}1x^2 - x - 2$. 3 P

Zeichnen Sie sodann die Parabel p und die Gerade g für $x \in [-4;\, 9]$ in ein Koordinatensystem ein.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-4 \leqq x \leqq 9$; $-6 \leqq y \leqq 4$

B 1.2 Punkte $A_n\,(x\,|-0{,}5x + 1)$ auf der Geraden g und Punkte $B_n\,(x\,|\,0{,}1x^2 - x - 2)$ auf der Parabel p haben dieselbe Abszisse x und sind zusammen mit den Punkten C_n und D_n Eckpunkte von Trapezen $A_nB_nC_nD_n$. 2 P

Es gilt: $[A_nB_n] \parallel [C_nD_n]$; $\overrightarrow{A_nD_n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overline{C_nD_n} = 5\,\text{LE}$.

Zeichnen Sie die Trapeze $A_1B_1C_1D_1$ für $x = -1$ und $A_2B_2C_2D_2$ für $x = 4$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

B 1.3 Ermitteln Sie rechnerisch, für welche Belegungen von x es Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ gibt. 3 P

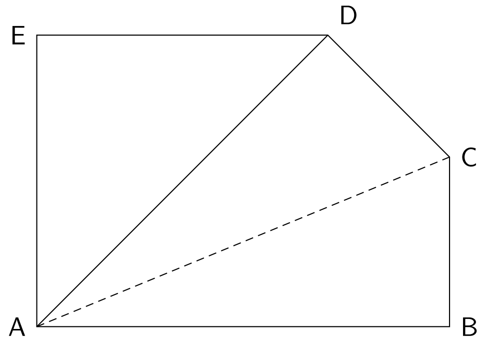
B 1.4 Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ in Abhängigkeit von x. Bestimmen Sie sodann den maximalen Flächeninhalt A_{max} der Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ und geben Sie den zugehörigen Wert für x an. 4 P

[Zwischenergebnis: $\overline{A_nB_n}(x) = (-0{,}1x^2 + 0{,}5x + 3)\,\text{LE}$]

B 1.5 Der Punkt D_3 des Trapezes $A_3B_3C_3D_3$ liegt auf der y-Achse. Ermitteln Sie durch Rechnung die Koordinaten des Punktes B_3. 2 P

B 1.6 Die kongruenten Trapeze $A_4B_4C_4D_4$ und $A_5B_5C_5D_5$ sind gleichschenklig. Zeigen Sie, dass die Strecken $[A_4B_4]$ und $[A_5B_5]$ jeweils 3 LE lang sind. Berechnen Sie sodann das Maß γ der Winkel $D_4C_4B_4$ bzw. $D_5C_5B_5$. 3 P

B 2.0 Nebenstehende Skizze zeigt das Fünfeck ABCDE, das aus dem Drachenviereck ABCD mit der Symmetrieachse AC und dem Dreieck ADE besteht.
Es gilt:
$\overline{AB} = \overline{AD} = 11\,\text{cm}$; $\sphericalangle BAD = 45°$;
$\sphericalangle CBA = \sphericalangle ADC = \sphericalangle BAE = 90°$; [AB] || [ED].
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



B 2.1 Zeichnen Sie das Fünfeck ABCDE sowie die Strecken [AD] und [AC]. 2 P

B 2.2 Begründen Sie, weshalb $\sphericalangle EDC = 135°$ und $\overline{AE} = \overline{ED}$ gilt. 3 P

Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke [ED].

[Teilergebnis: $\overline{ED} = 7{,}78\,\text{cm}$]

B 2.3 Berechnen Sie die Länge der Strecke [BC] und den prozentualen Anteil des Flächeninhalts des Drachenvierecks ABCD am Flächeninhalt des Fünfecks ABCDE. 4 P

[Teilergebnis: $\overline{BC} = 4{,}56\,\text{cm}$]

B 2.4 Auf der Stecke [AE] liegen Punkte S_n, für die gilt: $\overline{ES_n}(x) = x$ cm mit $x \in \mathbb{R}$, $x \in\,]0; 7{,}78[$. Punkte R_n liegen auf dem Kreisbogen $\widehat{AD}$ mit dem Mittelpunkt E. 2 P

Ferner gilt: $[S_nR_n]$ || [ED].

Zeichnen Sie den Kreisbogen $\widehat{AD}$ und die Strecke $[S_1R_1]$ für $x = 2$ in die Zeichnung zu B 2.1 ein.

B 2.5 Der Punkt R_2 ist der Schnittpunkt des Kreisbogens $\widehat{AD}$ mit der Symmetrieachse AC des Drachenvierecks ABCD . 3 P

Ergänzen Sie die Zeichnung zu B 2.1 um das Dreieck S_2R_2E und berechnen Sie die Länge der Strecke $[S_2R_2]$.

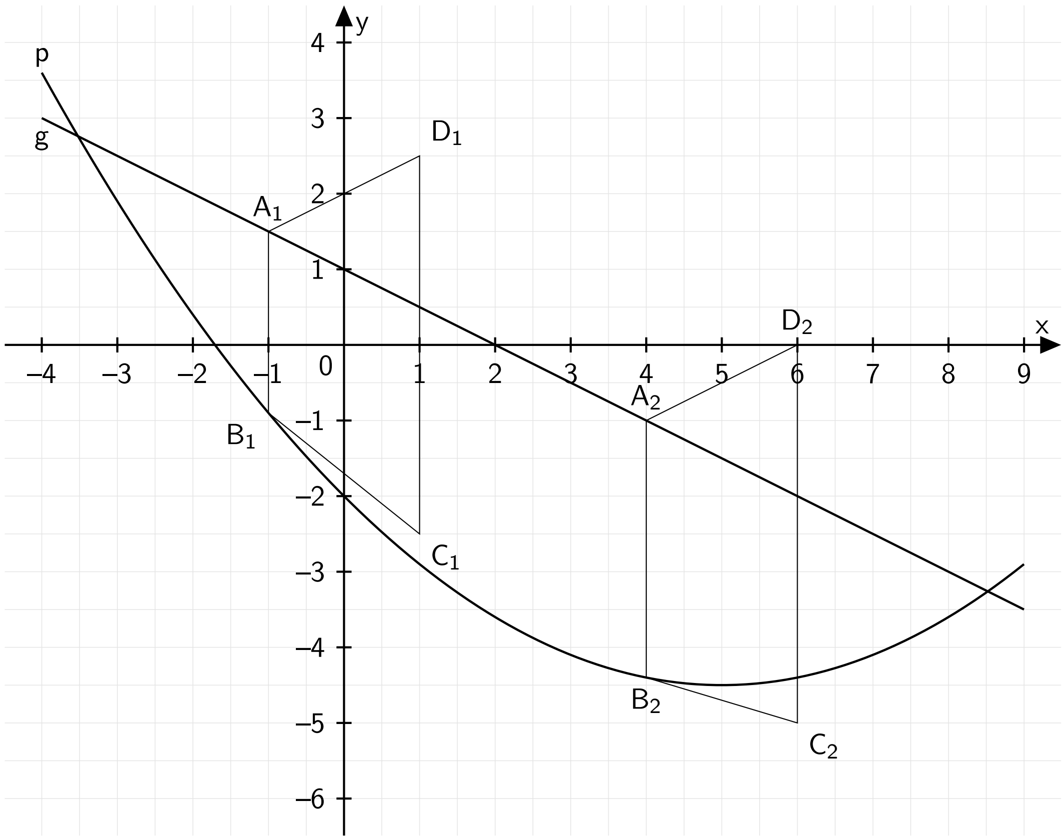
[Zwischenergebnis: $\sphericalangle R_2AE = \sphericalangle ER_2A = 67{,}5°$]

B 2.6 Die Bogenlänge b des Kreisbogens $\widehat{R_3D}$ mit dem Mittelpunkt E beträgt 3 cm. Berechnen Sie das Maß des Winkels R_3ED und den zugehörigen Wert für x. 3 P

B 1.1 Mit dem Koeffizienten 0,1 vor x^2 und den Koordinaten des Scheitelpunktes $S\,(5\,|-4{,}5)$ kann die Scheitelpunktform aufgestellt und dann umgeformt werden:

$$
\begin{aligned}
& y = 0{,}1(x-5)^2 - 4{,}5 \\
\Longleftrightarrow\quad & y = 0{,}1(x^2 - 10x + 25) - 4{,}5 \\
\Longleftrightarrow\quad & y = 0{,}1x^2 - 1x + 2{,}5 - 4{,}5 \\
\Longleftrightarrow\quad & y = 0{,}1x^2 - x - 2
\end{aligned}
$$

Zeichnen der Parabel p und der Gerade g:
(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da das Koordinatensystem für den Buchdruck skaliert wurde.)



B 1.2 Einzeichnen der Trapeze $A_1B_1C_1D_1$ für $x = -1$ und $A_2B_2C_2D_2$ für $x = 4$ in das Koordinatensystem von 1.1.

B 1.3 Ein Trapez liegt vor, wenn die Kante $[A_nB_n]$ existiert, also eine Länge größer als null hat. Setzt man die Ordinaten der beiden Punkte gleich, ergeben sich zwei Werte für x, für die die Punkte zusammenfallen würden.

$$
\begin{aligned}
& 0{,}1x^2 - x - 2 = -0{,}5x + 1 \qquad |-(-0{,}5x+1) \\
\Longleftrightarrow\quad & 0{,}1x^2 - 0{,}5x - 3 = 0 \\
\Rightarrow\quad & x_{1;2} = \frac{-(-0{,}5) \pm \sqrt{(-0{,}5)^2 - 4 \cdot 0{,}1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 0{,}1} \\
\Longleftrightarrow\quad & x_{1;2} = \frac{0{,}5 \pm \sqrt{1{,}45}}{0{,}2}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \qquad x_1 = -3{,}52 \quad \text{oder} \quad x_2 = 8{,}52 \qquad\qquad \mathbb{L} = \{-3{,}52; 8{,}52\}$$

Da für diese Werte die beiden Punkte genau zusammenfallen würden, existieren Trapeze für alle Werte zwischen diesen beiden. Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ gibt es also für alle $\underline{\underline{x \in]-3{,}52;\ 8{,}52[}}$.

B 1.4 Der Flächeninhalt der Trapeze ergibt sich aus der Länge der Unterkante ($\overline{C_nD_n}$), der Oberkante ($\overline{A_nB_n}$) und der Höhe des Trapezes h:

$$A(x) = 0{,}5 \cdot (\overline{A_nB_n} + \overline{C_nD_n}) \cdot h$$

Die Länge $\overline{A_nB_n}$ ergibt sich aus der Differenz der Ordinaten der beiden Punkte:

$$\begin{aligned} \overline{A_nB_n}(x) &= (y_{A_n} - y_{B_n})\,\text{LE} \\ &= (-0{,}5x + 1 - (0{,}1x^2 - x - 2))\,\text{LE} \\ &= (-0{,}1x^2 + 0{,}5x + 3)\,\text{LE} \end{aligned}$$

Die Länge $\overline{C_nD_n} = 5\,\text{LE}$ ist in den Angaben vorgegeben. Da A_n und B_n sowie C_n und D_n jeweils dieselbe Abszisse haben, ergibt sich die Höhe aus der Differenz der Abszissen von A_n und D_n. Diese ergibt sich aus $\overrightarrow{A_nD_n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu $h = 2\,\text{LE}$. Für die Fläche der Trapeze gilt damit:

$$\begin{aligned} A(x) &= 0{,}5 \cdot (\overline{A_nB_n} + \overline{C_nD_n}) \cdot h \\ &= 0{,}5 \cdot ((-0{,}1x^2 + 0{,}5x + 3) + 5) \cdot 2\,\text{FE} \\ &= \underline{\underline{(-0{,}1x^2 + 0{,}5x + 8)\,\text{FE}}} \end{aligned}$$

Der Funktionsterm für die Fläche ist eine nach unten geöffnete Parabel, die ihren maximalen Wert am Scheitelpunkt einnimmt. Dafür wird die Scheitelpunktform gebildet:

$$\begin{aligned} A(x) &= (-0{,}1x^2 + 0{,}5x + 8) \\ &= -0{,}1(x^2 - 5x - 80) \\ &= -0{,}1(x^2 - 2 \cdot 2{,}5x + 6{,}25 - 86{,}25) \\ &= -0{,}1((x - 2{,}5)^2 - 86{,}25) \\ &= -0{,}1(x - \underbrace{2{,}5}_{x_{max}})^2 + \underbrace{8{,}625}_{A_{max}} \end{aligned}$$

Die maximale Fläche ergibt sich für $\underline{\underline{x = 2{,}5}}$ zu $\underline{\underline{A_{max} = 8{,}63\,\text{FE}}}$.

B 1.5 Wenn $x_{D_3} = 0$ gilt (auf y-Achse), folgt wegen $\overrightarrow{A_nD_n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, dass $x_{A_3} = 0 - 2 = -2$ sein muss. Da außerdem A_n und B_n jeweils dieselbe Abszisse haben, ist $x_{B_3} = -2$. Eingesetzt in die Gleichung der Parabel:

$$y_{B_3} = 0{,}1 \cdot (-2)^2 - (-2) - 2 = 0{,}4 + 2 - 2 = 0{,}4$$

Die Koordinaten des Punktes lauten $\underline{\underline{B_3\,(-2\,|\,0{,}4)}}$.

B 1.6 Wenn die Trapeze gleichschenklig sind, ist der Unterschied der Ordinaten zwischen A_4 und D_4 sowie zwischen B_4 und C_4 jeweils gleich. Demnach ist in diesem Fall:

$$\begin{aligned}\overline{A_4B_4} = \overline{A_5B_5} &= \overline{C_nD_n} - (y_{D_n} - y_{A_n})\,\text{LE} - (y_{B_n} - y_{C_n})\,\text{LE} \\ &= \overline{C_nD_n} - 2 \cdot (y_{D_n} - y_{A_n})\,\text{LE}\end{aligned}$$

Die Differenz $y_{D_n} - y_{A_n}$ ergibt sich wiederum aus $\overrightarrow{A_nD_n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu 1 LE. Damit gilt:

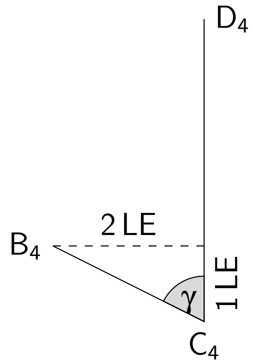
$$\begin{aligned}\overline{A_4B_4} = \overline{A_5B_5} &= \overline{C_nD_n} - 2 \cdot (y_{D_n} - y_{A_n})\,\text{LE} \\ &= 5\,\text{LE} - 2 \cdot (1\,\text{LE}) \\ &= 3\,\text{LE}\end{aligned}$$

Für das Maß des Winkels gilt:

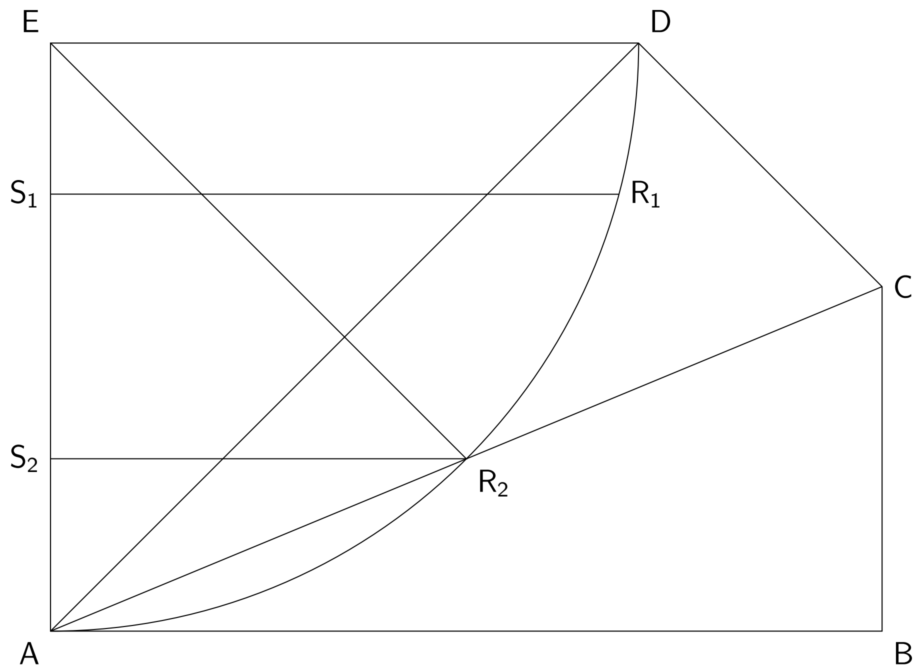
$$\tan\gamma = \frac{2\,\text{LE}}{1\,\text{LE}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \tan\gamma = 2 \qquad |\tan^{-1}(\ )$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{\gamma = 63{,}43^\circ}}$$



B 2.1 Zeichnen des Fünfecks ABCDE sowie der Strecken [AD] und [AC].
(**Hinweis:** Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu, da das Koordinatensystem für den Buchdruck skaliert wurde.)



B 2.2 Weil $[AB] \parallel [ED]$ ist, sind $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle EDA$ Wechselwinkel. Somit ist $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EDA = 45^\circ$. Mit dem gegebenen Winkel $\sphericalangle ADC = 90^\circ$ gilt dann:

$$\sphericalangle EDC = \sphericalangle EDA + \sphericalangle ADC = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$$

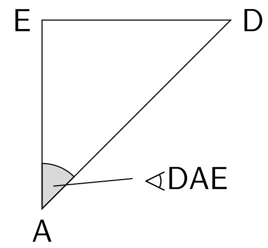
Weiterhin gilt:

$$\sphericalangle DAE = \sphericalangle BAE - \sphericalangle BAD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

Damit sind die beiden Basiswinkel $\sphericalangle DAE$ und $\sphericalangle EDA$ des Dreiecks ADE gleich groß. Somit ist das Dreieck ADE gleichschenklig und damit auch $\overline{AE} = \overline{ED}$.

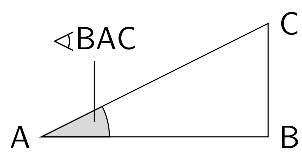
Die Länge $\overline{ED}$ kann sodann im Dreieck ADE berechnet werden:

$$\begin{aligned} & \sin \sphericalangle DAE = \frac{\overline{ED}}{\overline{AD}} && \mid \cdot \overline{AD} \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{ED} = \sin(45^\circ) \cdot 11\,\text{cm} \\ \Longleftrightarrow\quad & \underline{\underline{\overline{ED} = 7{,}78\,\text{cm}}} \end{aligned}$$



B 2.3 Da es sich um ein Drachenviereck handelt, ist $\sphericalangle BAC = 0{,}5 \cdot \sphericalangle BAD = 0{,}5 \cdot 45^\circ = 22{,}5^\circ$. Im Dreieck ABC gilt damit:

$$\begin{aligned} & \tan \sphericalangle BAC = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} && \mid \cdot \overline{AB} \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{BC} = \tan(22{,}5^\circ) \cdot 11\,\text{cm} \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{BC} = 4{,}56\,\text{cm} \end{aligned}$$



Für die Fläche des Drachenvierecks gilt:

$$\begin{aligned} A_{ABCD} &= 2 \cdot A_{ABC} \\ &= 2 \cdot 0{,}5 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \\ &= 2 \cdot 0{,}5 \cdot 11 \cdot 4{,}56\,\text{cm}^2 \\ &= 50{,}16\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Die Fläche des Fünfecks setzt sich zusammen aus der des Drachenvierecks plus die des Dreiecks ADE:

$$\begin{aligned} A_{ABCDE} &= A_{ABCD} + A_{ADE} \\ &= 50{,}16\,\text{cm}^2 + 0{,}5 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{ED} \\ &= 50{,}16\,\text{cm}^2 + 0{,}5 \cdot 7{,}78 \cdot 7{,}78\,\text{cm}^2 \\ &= 80{,}42\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Damit gilt schließlich für den prozentualen Anteil der Fläche des Drachenvierecks:

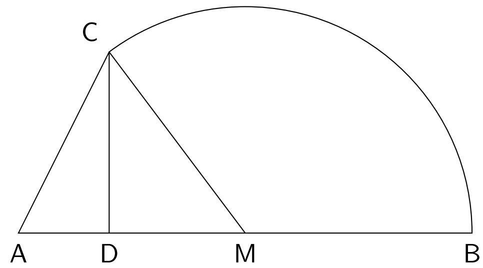
$$\frac{A_{ABCD}}{A_{ABCDE}} \cdot 100\,\% = \frac{50{,}16}{80{,}42} \cdot 100\,\% = \underline{\underline{62{,}37\,\%}}$$

A 1.0 Die nebenstehende Skizze zeigt die Figur, die durch die Strecken [AB] und [AC] sowie den Kreisbogen $\overset{\frown}{BC}$ mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = \overline{MB}$ begrenzt wird.

Es gilt:

$\overline{AD} = 2\,\text{cm}$; $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = 5\,\text{cm}$; $\sphericalangle MDC = 90°$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



A 1.1 Berechnen Sie das Maß des Winkels CMD und die Länge b des Kreisbogens $\overset{\frown}{BC}$. 3 P

[Teilergebnis : $\sphericalangle CMD = 53{,}13°$]

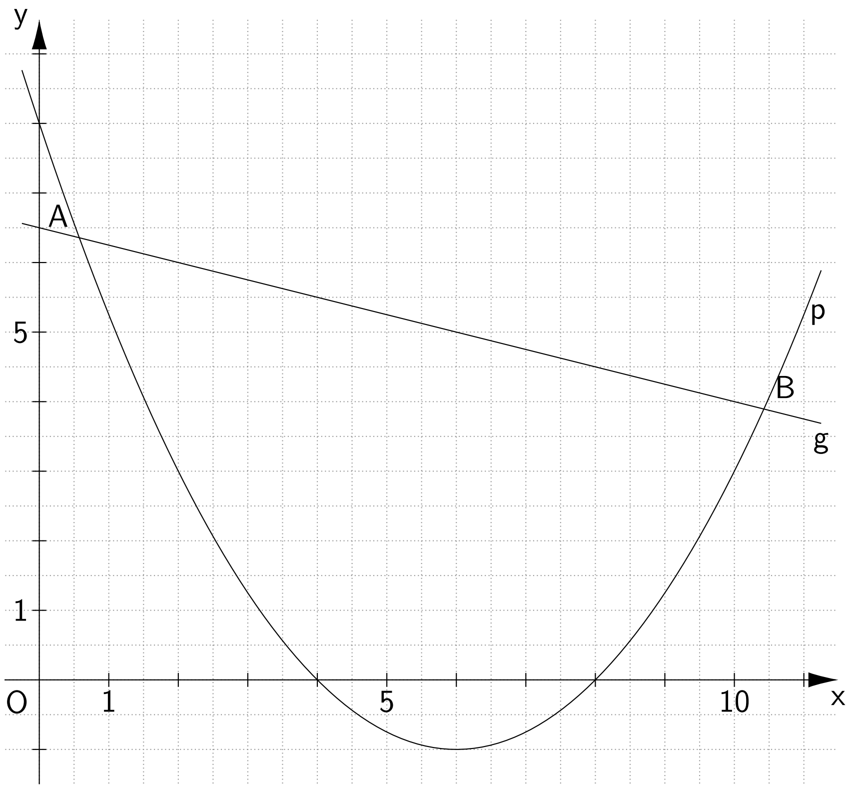
A 1.2 Ermitteln Sie rechnerisch den Flächeninhalt der Figur aus A 1.0. 2 P

A 2.0 Gegeben sind die Parabel p mit der Gleichung $y = 0{,}25x^2 - 3x + 8$ und die Gerade g mit der Gleichung $y = -0{,}25x + 6{,}5$. Es gilt: $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Die Punkte A und B sind die Schnittpunkte der Parabel p und der Gerade g.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

(**Hinweis:** Das Koordinatensystem ist nicht maßstabsgetreu, da das Koordinatensystem für den Buchdruck skaliert wurde.)



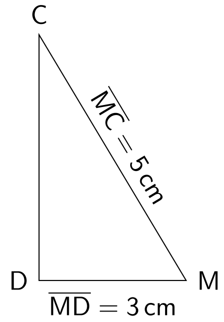
A 2.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte A und B. 3 P

A 1.1 Aus den Angaben folgt:

$$\overline{MD} = \overline{MA} - \overline{AD} = 5\,\text{cm} - 2\,\text{cm} = 3\,\text{cm}$$

Damit ergibt sich im Dreieck DMC für den Winkel $\sphericalangle CMD$:

Skizze:



$$\cos\sphericalangle CMD = \frac{\overline{MD}}{\overline{MC}} = \frac{3}{5}$$
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\sphericalangle CMD \approx 53{,}13^\circ}}$$

Die Länge b des Kreisbogens ergibt sich aus dem Umfang des Kreises und dem Anteil des Winkels $\sphericalangle BMC$ am vollen Winkel des Kreises:

$$b = \frac{\sphericalangle BMC}{360^\circ} \cdot u = \frac{\sphericalangle BMC}{360^\circ} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = \frac{\sphericalangle BMC}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \overline{MB} \cdot \pi$$

Dabei ist $\sphericalangle BMC$ der Nebenwinkel von $\sphericalangle CMD$, sodass gilt:

$$\sphericalangle BMC + \sphericalangle CMD = 180^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad \sphericalangle BMC = 180^\circ - \sphericalangle CMD = 180^\circ - 53{,}13^\circ = 126{,}87^\circ$$

Damit gilt für die Länge des Kreisbogens:

$$b = \frac{\sphericalangle BMC}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \overline{MB} \cdot \pi = \frac{126{,}87^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \pi\,\text{cm} \approx \underline{\underline{11{,}07\,\text{cm}}}$$

A 1.2 Die Gesamtfläche setzt sich aus zwei Teilflächen zusammen: dem Kreissektor und dem Dreieck AMC. Der Flächeninhalt des Kreissektors ergibt sich dabei anteilig an der Gesamtfläche des Kreises (Anteil des Winkels $\sphericalangle BMC$ am gesamten Winkel von 360°). Die Fläche des Dreiecks ergibt sich aus den Längen der Seiten $\overline{MA} = \overline{MC} = 5\,\text{cm}$ und dem eingeschlossenen Winkel $\sphericalangle CMD$:

$$\begin{aligned} A_{ges} = A_{Kreissektor} + A_{Dreieck} &= \frac{\sphericalangle BMC}{360^\circ} \cdot A_{Kreis} + \frac{1}{2} \cdot \overline{MA} \cdot \overline{MC} \cdot \sin(\sphericalangle CMD) \\ &= \left(\frac{126{,}87}{360} \cdot 5^2 \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin(53{,}13^\circ)\right) \text{cm}^2 \approx \underline{\underline{37{,}68\,\text{cm}^2}} \end{aligned}$$

A 2.1 Um die Schnittpunkte A und B von Parabel p und Gerade g zu bestimmen, werden die Funktionsgleichungen gleichgesetzt und umgeformt:

$$0{,}25x^2 - 3x + 8 = -0{,}25x + 6{,}5 \qquad | - (-0{,}25x + 6{,}5)$$
$$\Longleftrightarrow \qquad 0{,}25x^2 - 2{,}75x + 1{,}5 = 0$$

Nun wird die Lösungsformel verwendet:

$$x_{1;2} = \frac{-(-2{,}75) \pm \sqrt{(-2{,}75)^2 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot 1{,}5}}{2 \cdot 0{,}25} = \frac{2{,}75 \pm \sqrt{6{,}0625}}{0{,}5}$$

$\Rightarrow \quad x_1 \approx 0{,}58 \quad \text{oder} \quad x_2 \approx 10{,}42 \qquad\qquad \mathbb{L} = \{0{,}58; 10{,}42\}$

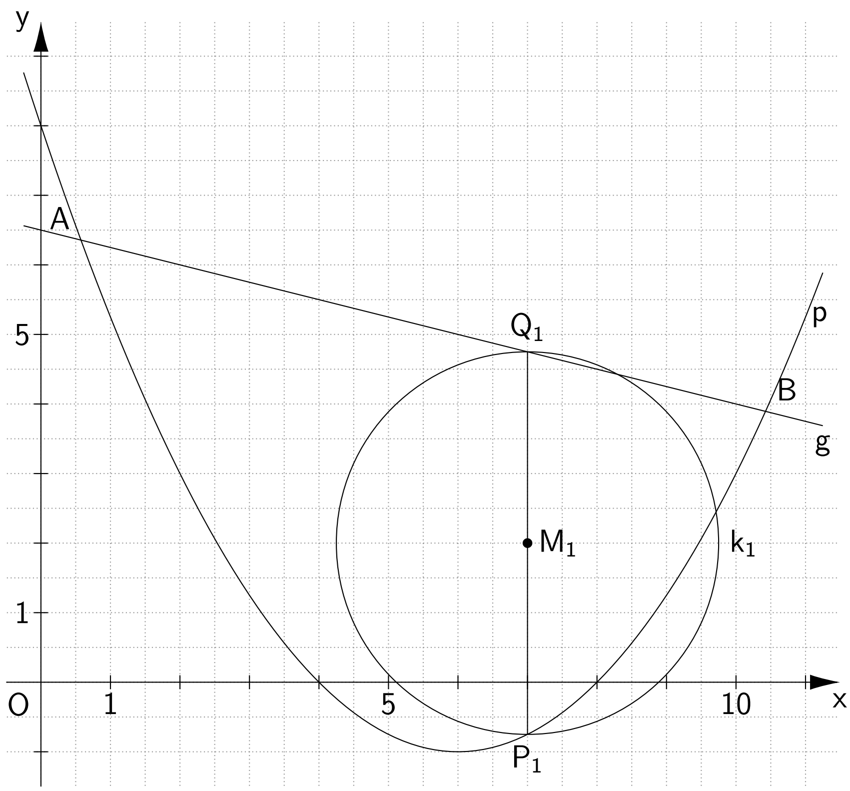
Die zugehörigen Funktionswerte ergeben sich durch Einsetzen von x_1 und x_2 in eine der beiden Funktionsgleichungen (es wird die der Gerade gewählt):

$$y_1 = -0{,}25 \cdot 0{,}58 + 6{,}5 \approx 6{,}36 \qquad\qquad y_2 = -0{,}25 \cdot 10{,}42 + 6{,}5 \approx 3{,}90$$

Die Koordinaten der Punkte lauten $\underline{\underline{A\,(0{,}58\,|\,6{,}36)}}$ und $\underline{\underline{B\,(10{,}42\,|\,3{,}90)}}$.

A 2.2 Zunächst kann bei $x = 7$ jeweils Punkt P_1 auf p und Punkt Q_1 auf g markiert und zur Strecke $[P_1Q_1]$ verbunden werden. Auf dieser Strecke kann nun der Mittelpunkt M_1 markiert und dann mit $\overline{M_1P_1}$ in der Zirkelspanne der Kreis k_1 gezeichnet werden:

(**Hinweis:** Das Koordinatensystem ist nicht maßstabsgetreu, da das Koordinatensystem für den Buchdruck skaliert wurde.)



A 2.3 Die Länge der Strecke ergibt sich aus der Differenz der y-Koordinaten der Punkte Q_n und P_n:

$$\begin{aligned}\overline{P_nQ_n}(x) &= \left[y_{Q_n} - y_{P_n}\right] \text{ LE} = \left[(-0{,}25x + 6{,}5) - (0{,}25x^2 - 3x + 8)\right] \text{ LE} \\ &= \underline{\underline{\left(-0{,}25x^2 + 2{,}75x - 1{,}5\right) \text{ LE}}}\end{aligned}$$

A 2.4 Der Umfang des Kreises ergibt sich aus dem Durchmesser, welcher der Strecke $\overline{P_nQ_n}(x)$ entspricht, die in Teilaufgabe 2.3 allgemein ermittelt wurde:

$$u(x) = d \cdot \pi = \overline{P_nQ_x}(x) \cdot \pi = \left(-0{,}25x^2 + 2{,}75x - 1{,}5\right) \cdot \pi \text{ LE}$$

Die Länge wird demnach von einer nach unten geöffneten Parabel beschrieben. Diese besitzt ihren Hochpunkt, also ihr Maximum am Scheitelpunkt:

$$S\left(-\frac{b}{2a}\,\middle|\,c-\frac{b^2}{4a}\right) \quad \Rightarrow \quad S\left(-\frac{2{,}75}{2\cdot(-0{,}25)}\,\middle|\,-1{,}5-\frac{2{,}75^2}{4\cdot(-0{,}25)}\right) \quad \Rightarrow \quad S\,(5{,}5\,|\,5{,}8125)$$

Der maximale Umfang ergibt sich demnach, indem $x = 5{,}5$ in die Gleichung eingesetzt wird:

$$u_{max} = u(5{,}5) = \left(-0{,}25\cdot 5{,}5^2 + 2{,}75\cdot 5{,}5 - 1{,}5\right)\cdot \pi \text{ LE} \approx \underline{\underline{19{,}05\text{ LE}}}$$

A 2.5 Wenn der Durchmesser von k_3 viermal so groß ist wie der von k_2, so ist auch $d_3 = 4\cdot d_2$.
Aus $d_3 = 4\cdot d_2$ folgt: $r_3 = 4\cdot r_2$.
Für den Flächeninhalt des Kreises A_3 gilt damit:

$$A_3 = r_3^2\cdot\pi = (4\cdot r_2)^2\cdot\pi = 16\cdot r_2^2\cdot\pi = 16\cdot A_2$$

Wenn der Durchmesser von k_3 viermal so groß wie der von k_2 ist, so hat k_3 den 16-fachen Flächeninhalt.

A 3.0 Das gesuchte Volumen kann aus drei Teilvolumina zusammengesetzt werden. Zunächst geht man vom Volumen V_Z des Zylinders aus, der bei Rotation des Rechtecks ABCF entsteht. Dabei ist im oberen Teil zu viel Volumen berücksichtigt, dass nun abgezogen wird. Dabei wird das Volumen V_{gK} des Kegels subtrahiert, der bei Rotation des Dreiecks FGC entsteht. Da hier nun zu viel Volumen subtrahiert wurde, wird final das Volumen V_{kK} des Kegels, der bei Rotation des Dreiecks GDE entsteht, wieder addiert:

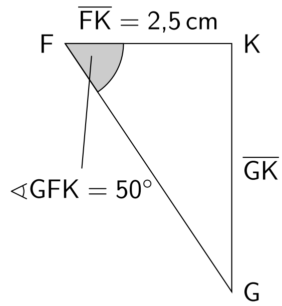
$$\begin{aligned} V_{ges} &= V_Z - V_{gK} + V_{kK} = r_Z^2\cdot\pi\cdot h_Z - \frac{1}{3}\cdot r_{gK}^2\cdot\pi\cdot h_{gK} + \frac{1}{3}\cdot r_{kK}^2\cdot\pi\cdot h_{kK} \\ &= \overline{FK}^2\cdot\pi\cdot\overline{AF} - \frac{1}{3}\cdot\overline{FK}^2\cdot\pi\cdot\overline{GK} + \frac{1}{3}\cdot\overline{EH}^2\cdot\pi\cdot\overline{GH} \end{aligned}$$

Einige der vorhandenen Größen sind dabei bereits gegeben oder können aus der Symmetrie ermittelt werden:

$\overline{FK} = \overline{CF} : 2 = (5:2)\text{ cm} = 2{,}5\text{ cm}$ $\qquad \overline{AF} = 4\text{ cm}$ $\qquad \overline{EH} = \overline{ED} : 2 = (2{,}4:2)\text{ cm} = 1{,}2\text{ cm}$

Es bleibt, die Längen $\overline{GK}$ und $\overline{GH}$ zu bestimmen. Für $\overline{GK}$ gilt im Dreieck GKF:

$$\begin{aligned} & \tan\sphericalangle GFK = \frac{\overline{GK}}{\overline{FK}} && |\cdot\overline{FK} \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{GK} = (\tan(50^\circ)\cdot 2{,}5)\text{ cm} \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{GK} \approx 2{,}98\text{ cm} \end{aligned}$$



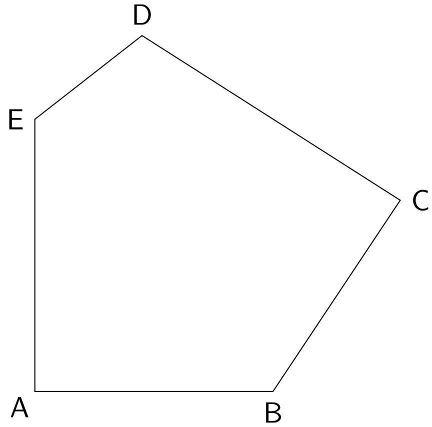
Im gleichen Dreieck kann zudem der Strahlensatz verwendet werden:

$$\frac{\overline{GH}}{\overline{GK}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{FK}} \qquad\qquad |\cdot\overline{GK}$$

B 1.0 Die nebenstehende Skizze zeigt das Fünfeck ABCDE.

Es gilt:
$\overline{AB} = 7\,\text{cm}$; $\overline{AE} = 8\,\text{cm}$; $\overline{DE} = 4\,\text{cm}$;
$\overline{CE} = 11\,\text{cm}$; $\overline{CD} = 9\,\text{cm}$;
$\sphericalangle BAE = 90°$; $\sphericalangle AED = 128°$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



B 1.1 Zeichnen Sie das Fünfeck ABCDE sowie die Strecken [BE] und [CE]. 4 P

Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke [BE] und das Maß des Winkels AEB.

[Teilergebnisse: $\overline{BE} = 10{,}63\,\text{cm}$; $\sphericalangle AEB = 41{,}19°$]

B 1.2 Ermitteln Sie durch Rechnung den Flächeninhalt des Vierecks ABCE. 4 P

[Zwischenergebnis: $\sphericalangle BEC = 36{,}33°$]

B 1.3 Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Strecke [BC] und das Maß des Winkels ECB gilt: $\overline{BC} = 6{,}75\,\text{cm}$; $\sphericalangle ECB = 68{,}90°$. 2 P

B 1.4 Die Punkte $F \in [CE]$ und $G \in [BE]$ legen die Strecke [FG] fest, wobei gilt: 4 P

$[FG] \parallel [BC]$ und $\overline{CF} = 3\,\text{cm}$.

Ergänzen Sie die Strecke [FG] in der Zeichnung zu B 1.1 und berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks BCFG.

B 1.5 Ein Kreis mit dem Mittelpunkt A berührt die Strecke [BE] im Punkt R. Er schneidet die Strecke [AB] im Punkt Q und die Strecke [AE] im Punkt S. 3 P

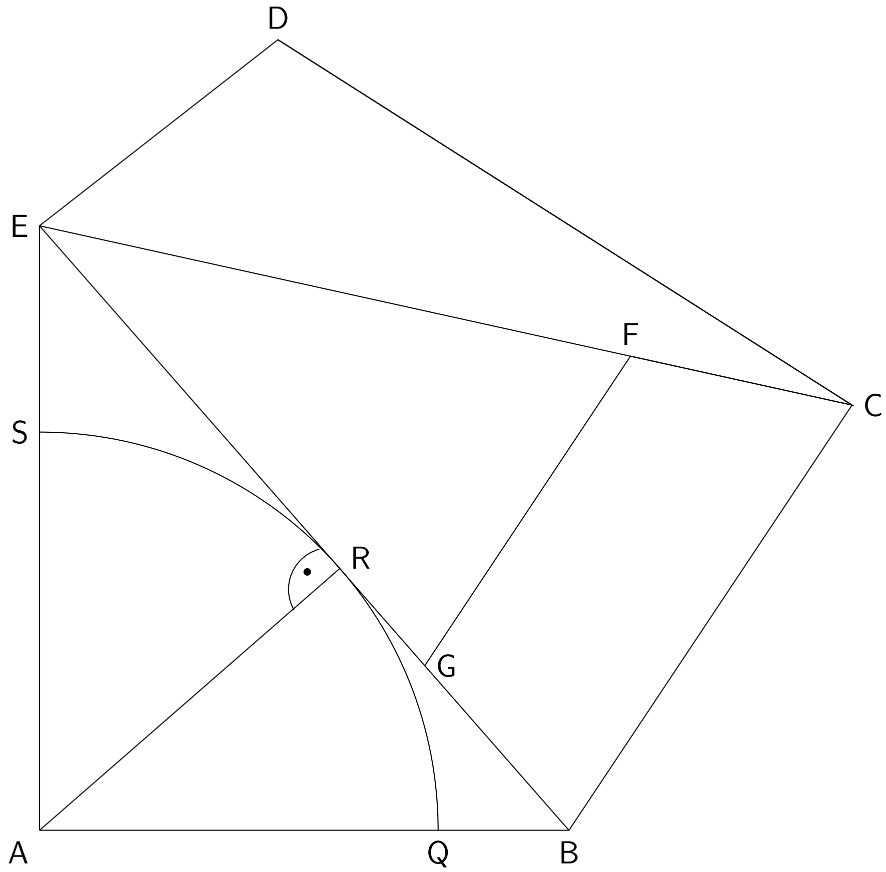
Zeichnen Sie den Kreisbogen $\overset{\frown}{QS}$ und den Punkt R in die Zeichnung zu B 1.1 ein.

Ermitteln Sie sodann rechnerisch den Flächeninhalt des Sektors, der von den Strecken [AQ] und [AS] sowie dem Kreisbogen $\overset{\frown}{QS}$ begrenzt wird.

[Zwischenergebnis: $\overline{AR} = 5{,}27\,\text{cm}$]

B 1.1 Für die Zeichnung kann zunächst die Strecke [AB] und im rechten Winkel davon die Strecke [AE] gezeichnet werden. Im Winkel von $\sphericalangle AED = 128°$ kann dann die Strecke [DE] abgetragen werden. Ausgehend vom Punkt D wird dann mit Zirkelspanne $\overline{CD} = 9\,\text{cm}$ und vom Punkt E mit Zirkelspanne $\overline{CE} = 11\,\text{cm}$ ein Kreis gezeichnet. Dort wo sich diese schneiden liegt, in Übereinstimmung mit der gegebenen Skizze, der Punkt C. Damit kann das Fünfeck vervollständigt und zusätzlich die Strecken [BE] und [CE] gezeichnet werden.

(**Hinweis:** Die Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu, da sie für den Buchdruck skaliert wurde.)



Die gesuchte Länge kann nun im Dreieck ABE mit dem Satz des Pythagoras bestimmt werden.

$$\overline{BE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2 \qquad |\sqrt{\ }$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \overline{BE} = 7^2 + 8^2\,\text{cm}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \overline{BE} \approx 10{,}63\,\text{cm}$$

Außerdem gilt:

$$\tan \sphericalangle AEB = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{7}{8} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\sphericalangle AEB \approx 41{,}19°}}$$

B 1.2 Die Fläche des Vierecks setzt sich aus zwei Teildreiecken zusammen, dem rechtwinkligen Dreieck ABE und dem Dreieck BCE, sodass gilt:

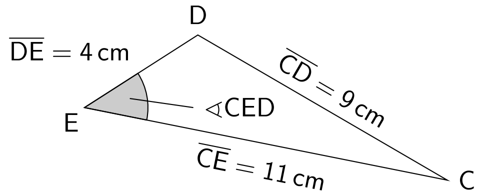
$$A_{ABCE} = A_{ABE} + A_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AE} + \frac{1}{2} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{CE} \cdot \sin \sphericalangle BEC$$

Aus Angaben und Teilaufgabe 1.1 sind alle Größen außer $\sphericalangle$BEC bekannt. Für diesen Winkel gilt am Punkt E:

$$\begin{aligned} & \sphericalangle AED = \sphericalangle BEC + \sphericalangle AEB + \sphericalangle CED && | - (\sphericalangle AEB + \sphericalangle CED) \\ \Longleftrightarrow \quad & \sphericalangle BEC = \sphericalangle AED - \sphericalangle AEB - \sphericalangle CED \end{aligned}$$

Um darüber die Größe des Winkels $\sphericalangle$BEC zu bestimmen fehlt noch die Größe des Winkels $\sphericalangle$CED. Da die drei Seitenlängen $\overline{DE} = 4\,\text{cm}$, sowie $\overline{CE} = 11\,\text{cm}$ und $\overline{CD} = 9\,\text{cm}$ bekannt sind, kann der gesuchte Winkel im Dreieck ECD mithilfe des Cosinussatz bestimmt werden (Maße in cm):

$$\begin{aligned} & \overline{CD}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{CE}^2 - 2 \cdot \overline{DE} \cdot \overline{CE} \cdot \cos \sphericalangle CED \\ \Longleftrightarrow \quad & 9^2 = 11^2 + 4^2 - 2 \cdot 11 \cdot 4 \cdot \cos \sphericalangle CED && | - (11^2 + 4^2) \\ \Longleftrightarrow \quad & -56 = -88 \cdot \cos \sphericalangle CED && | : (-88) \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{56}{88} = \cos \sphericalangle CED \\ \Rightarrow \quad & \sphericalangle CED \approx 50{,}48^\circ \end{aligned}$$



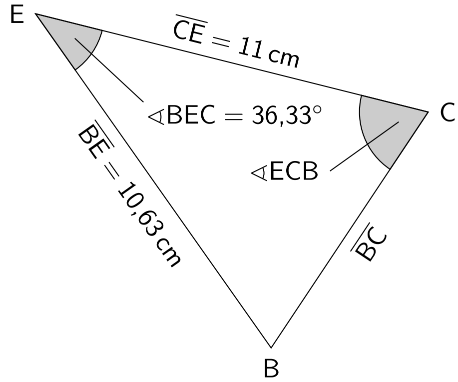
Damit gilt:

$$\sphericalangle BEC = \sphericalangle AED - \sphericalangle AEB - \sphericalangle CED = 128^\circ - 41{,}19^\circ - 50{,}48^\circ = 36{,}33^\circ$$

Damit kann schließlich die Fläche des Vierecks ermittelt werden:

$$\begin{aligned} A_{ABCE} = A_{ABE} + A_{BCE} &= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AE} + \frac{1}{2} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{CE} \cdot \sin \sphericalangle BEC \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 10{,}63 \cdot 11 \cdot \sin \sphericalangle 36{,}33^\circ \right) \text{cm}^2 \approx \underline{\underline{62{,}64\,\text{cm}^2}} \end{aligned}$$

B 1.3 Beide Größen können im Dreieck BCE ermittelt werden. Skizze:



Mit dem Kosinussatz gilt nun:

$$\overline{BC}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 - 2 \cdot \overline{BE} \cdot \overline{CE} \cdot \cos \sphericalangle BEC \qquad |\sqrt{\ }\,)$$

PERFEKT VORBEREITET AUF DEN MSA 10. Klasse Bayern 2022

ENTWICKELT VON PÄDAGOGEN

- Original-Prüfungaufgaben mit Lösungen 2014 - 2021
- Anschauliche, ausführliche und nachvollziehbare Lösungswege
- Ideal zur Vorbereitung auf einzelne Arbeiten während des Schuljahres
- Übersicht zu den einzelnen Prüfungsthemen mit Seitenangabe
- Digitalisierte Original-Prüfungen, Schritt für Schritt vorgerechnet

Mathe II/III - Trainer für Realschule MSA 2022

DIGITALES COACHING

- Neue Lernplattform mit geschützem Mitgliederbereich
- Themenbezogene, kurze, verständliche Lernvideos
- Individuelles Online-Coaching
- Prüfungsvorbereitung Online
- Immer auf dem aktuellsten Stand

Alle weiteren Informationen auf www.lern.de

SCAN ME

Hier wachsen kluge Köpfe

lernverlag®
www.lern-verlag.de

Bestell-Nr. :
EAN 9783743000827

Realschule 10. Klasse | Mittlerer Schulabschluss | Bayern

ISBN 978-3-7430-0082-7

€ 11,90

9 783743 000827 >

lern.de Bildungsgesellschaft mbH
lernverlag
Fürstenrieder Straße 52
80686 München
E-Mail: kontakt@lern-verlag.de