

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kapitel 1. Vorbemerkungen</b>	1
§ 1. Einleitung	1
§ 2. Verwendete Notation	2
 <b>Kapitel 2. Einführung und Motivation</b>	 4
§ 3. Programmiersprachen und elementare Konzepte der mathematischen Logik	4
§ 4. Umgangssprache und die Gestalt der Syntax einer mathematischen Logik	9
4.1. Exkurs: Satz – Aussage – Sachverhalt	10
4.2. Die Zerlegung von Sätzen der natürlichen Sprache in Teilsätze	12
4.3. Exkurs: Extension und Intension	14
4.4. Die Definition der extensionalen Junktoren	16
4.5. Die Feinstruktur von Aussagen	20
4.6. Schreibvarianten der Kalkülzeichen	23
Übungen zu § 4	23
§ 5. Das weitere Vorgehen	25
 <b>Kapitel 3. Syntax und Semantik der Prädikatenlogik</b>	 26
§ 6. Syntax und Semantik	26
6.1. Die Syntax der Sprache	27
6.2. Beweise und Definitionen induktiv über den Aufbau der Terme und Formeln	29
6.3. Strukturen und Deutungen	31
6.4. Ein kleines Beispiel für eine Sprache mit Deutung	35
Übungen zu § 6	36
§ 7. Prädikatenlogische Wahrheit	37

<b>Kapitel 4. Eigenschaften der Prädikatenlogik</b>	<b>40</b>
§ 8. Aussagenlogik im Rahmen der Prädikatenlogik	40
8.1. Erste Gesetze	40
8.2. Ersetzung und Spezialisierung	45
8.3. Weitere Gesetze	47
8.4. Formeln mit aussagenlogischem Aufbau	48
Übungen zu § 8	50
§ 9. Gesetze über Quantoren und Substitution	52
9.1. Gebundene und freie Variable	52
9.1.1. Definitionen	52
9.1.2. Das Koinzidenztheorem	54
9.2. Die Substitution	56
9.2.1. Definitionen	56
9.2.2. Die Bedeutung der Substitution: das Überführungstheorem	60
9.2.3. Die gebundene Umbenennung	61
9.3. Quantorengesetze	62
9.4. Normalformen	69
9.4.1. Pränexe Normalformeln	69
9.4.2. Universelle Normalformeln	71
9.4.3. Konjunktive Normalformeln	74
Übungen zu § 9	76
§ 10. Logisches Schließen als „Rechnen“: Folgern – Ableiten	79
10.1. Problemstellung	79
10.2. Der semantische Folgerungsbegriff	81
10.3. Das syntaktische Ableiten	89
10.3.1. Einführung	89
10.3.2. Ableitungsregeln und eine Axiomenmenge für die Prädikatenlogik	92
10.3.3. Exkurs: Theorien	95
10.3.4. Skizze zum Verhältnis der eingeführten Begriffe zueinander	97
10.3.5. Gesetze über ableitbare Formeln	97
10.3.6. Eine Präzisierung des informellen Beweisens	104
10.4. Die syntaktische Widerspruchsfreiheit	105
Übungen zu § 10	106
§ 11. Der Vollständigkeitssatz	109
11.1. Herausarbeiten der wesentlichen Schwierigkeiten des Beweises	109
11.2. Exkurs: syntaktisch vollständige und maximal syntaktisch widerspruchsfreie Formelmengen	116
11.3. Der Beweis	118
11.4. Konsequenzen aus dem Vollständigkeitssatz	123

11.5. Prädikatenlogik mit Gleichheit . . . . .	124
11.6. Spezielle Vollständigkeitsresultate . . . . .	128
§ 12. Entscheidbarkeitsfragen . . . . .	130
12.1. Bemerkungen zur Entwicklung des Entscheidungs- problems . . . . .	131
12.2. Die Entscheidbarkeit der quantorenfreien Formeln (Aussagenlogik) . . . . .	133
12.3. Die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik . . . .	134
12.4. Die Semi-Entscheidbarkeit der Ableitungsmengen .	137
12.5. Ein Anwendungsbeispiel aus der Theorie der Pro- grammierung: das Terminationsproblem von Pro- grammen . . . . .	143
12.5.1. Exkurs zum Forschungsgebiet Semantik von Programmiersprachen . . . . .	143
12.5.2. Die Termination von Programmen . . . . .	144
Übungen zu § 11 und § 12 . . . . .	152
 <b>Kapitel 5. Logische Grundlagen des maschinellen Beweisens (Resolventenprinzip) . . . . .</b>	 155
§ 13. Einleitung . . . . .	155
§ 14. Die Klauselform der Prädikatenlogik und Herbrand- Strukturen (eine Umformulierung der klassischen Logik)	158
14.1. Folgerungen und Nichterfüllbarkeit . . . . .	159
14.2. Zur universellen Normalform . . . . .	160
14.3. Die Klauselform der Prädikatenlogik . . . . .	162
14.4. Herbrand-Strukturen und der Satz von Herbrand .	167
Übungen zu § 14 . . . . .	174
§ 15. Herbrand-Prozeduren . . . . .	175
§ 16. Das Resolventenprinzip . . . . .	179
16.1. Syntaktisches Ableiten in der Klausellogik . . . .	179
16.2. Der Vereinheitlichungsalgorithmus . . . . .	182
16.3. Die Resolventenregel . . . . .	187
16.4. Das Liften . . . . .	190
16.5. Die Vollständigkeit der Resolventenregel . . . . .	193
16.6. Split-Resolventen und volle Resolventen . . . . .	195
Übungen zu § 16 . . . . .	199
§ 17. Beweisverfahren des Resolventenprinzips . . . . .	201
17.1. Beweisverfahren . . . . .	201
17.2. Zur Effizienz (Verfeinerungen der Resolventenregel)	205
Übungen zu § 17 . . . . .	212
§ 18. Der konstruktive Charakter von Resolventenableitungen (Greenscher Antworten-Extraktionsprozeß) . . . . .	212

18.1. Motivation . . . . .	214
18.2. Eine Verschärfung des Resolventensatzes . . . . .	217
18.3. Resultate in Ableitungen . . . . .	220
18.4. Ein Verfahren zur Berechnung von Resultaten mit Beispielen für dessen Anwendung . . . . .	224
Übungen zu § 18 . . . . .	228
§ 19. Prädikatenlogik als Programmiersprache . . . . .	230
<b>Kapitel 6. Die Methode der Formalisierung: zwei Beispiele . . .</b>	<b>238</b>
§ 20. Informationswiedergewinnung als Anwendungsbeispiel . . .	238
Übungen zu § 20 . . . . .	248
§ 21. Exkurs: das Formalisieren . . . . .	248
§ 22. Die Formalisierung der Wertzuweisung . . . . .	251
Übungen zu § 22 . . . . .	257
<b>Kapitel 7. Probleme mit der Logik . . . . .</b>	<b>259</b>
§ 23. Grenzen der mathematischen Logik . . . . .	259
23.1. Strukturen als „Wirklichkeit“ . . . . .	260
23.2. Zur Definition von Wahrheit . . . . .	261
23.3. Der methodische Zirkel . . . . .	262
23.4. Hinweise auf nichtbehandelte Sonderlogiken . . .	263
23.5. Was ist semantisch, was syntaktisch? . . . . .	264
23.6. Fazit . . . . .	265
§ 24. Bemerkungen zur Geschichte der Logik . . . . .	265
24.1. Warum werden in diesem Buch Probleme der Ge- schichte der Logik aufgegriffen? . . . . .	265
24.2. Welche Möglichkeiten bestehen, die Geschichte der Logik adäquat zu behandeln? . . . . .	267
24.3. Zum Verhältnis von Logik zu Mathematik (und Philosophie) . . . . .	269
24.4. Zu innermathematischen Gründen, die zur Heraus- bildung der mathematischen Logik führten . . . . .	273
24.5. Epilog . . . . .	278
<b>Schlußbemerkungen . . . . .</b>	<b>279</b>
<b>Anhang . . . . .</b>	<b>280</b>
Teil A. Beweise von Eigenschaften über Zustandsabänderungen	280
Teil B. Der Beweis des Koinzidenztheorems . . . . .	282

Teil C. Beweise von Eigenschaften der Substitution . . . . .	283
C1. Beweis von Lemma 9.12. . . . .	283
C2. Charakterisierung der Komposition von Substitutionen . . . . .	284
C3. Der Beweis des Überführungstheorems Satz 9.16 . . . . .	285
Teil D. Der Satz von der universellen Normalform . . . . .	287
Teil E. Semantische und syntaktische Beweisführung . . . . .	288
Teil F. Beispiele für die Verwendung von Ableitungen . . . . .	290
F1. Beispiel für eine längere Ableitung . . . . .	290
F2. Das Theorem über neue Konstanten . . . . .	292
Teil G. Hilfsmittel für den Vollständigkeitssatz . . . . .	293
G1. Der Lindenbaumsche Ergänzungssatz . . . . .	293
G2. Der Beweis von Satz 11.17. . . . .	294
Teil H. Hilfsmittel aus der Theorie der Berechenbarkeit . . . . .	296
H1. Liste der verwendeten Definitionen und Sätze aus der Theorie der berechenbaren Wortfunktionen . . . . .	296
H2. Die Äquivalenz von Aufzählbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit . . . . .	297
H3. Die Aufzählbarkeit der nichterfüllbaren Formeln . . . . .	299
Teil I. Eine „strikte“ Syntax . . . . .	300
Teil J. Zerlegungssatz für allgemeinste Vereinheitlicher . . . . .	302
 <b>Literaturangaben . . . . .</b>	 304
 <b>Hinweise zu weiterführender Literatur . . . . .</b>	 311
 <b>Verzeichnis häufig verwendeter Symbole . . . . .</b>	 315
 <b>Namen- und Sachverzeichnis . . . . .</b>	 318