

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Vorbemerkungen	1
§ 1. Einleitung	1
§ 2. Verwendete Notation	2
Kapitel 2. Einführung und Motivation	4
§ 3. Programmiersprachen und elementare Konzepte der mathematischen Logik	4
§ 4. Umgangssprache und die Gestalt der Syntax einer mathematischen Logik	9
4.1. Exkurs: Satz – Aussage – Sachverhalt	10
4.2. Die Zerlegung von Sätzen der natürlichen Sprache in Teilsätze	12
4.3. Exkurs: Extension und Intension	14
4.4. Die Definition der extensionalen Junktoren	16
4.5. Die Feinstruktur von Aussagen	20
4.6. Schreibvarianten der Kalkülzeichen	23
Übungen zu § 4	23
§ 5. Das weitere Vorgehen	25
Kapitel 3. Syntax und Semantik der Prädikatenlogik	26
§ 6. Syntax und Semantik	26
6.1. Die Syntax der Sprache	27
6.2. Beweise und Definitionen induktiv über den Aufbau der Terme und Formeln	29
6.3. Strukturen und Deutungen	31
6.4. Ein kleines Beispiel für eine Sprache mit Deutung . .	35
Übungen zu § 6	36
§ 7. Prädikatenlogische Wahrheit	37

Kapitel 4. Eigenschaften der Prädikatenlogik	40
§ 8. Aussagenlogik im Rahmen der Prädikatenlogik	40
8.1. Erste Gesetze	40
8.2. Ersetzung und Spezialisierung	45
8.3. Weitere Gesetze	47
8.4. Formeln mit aussagenlogischem Aufbau	48
Übungen zu § 8	50
§ 9. Gesetze über Quantoren und Substitution	52
9.1. Gebundene und freie Variable	52
9.1.1. Definitionen	52
9.1.2. Das Koinzidenztheorem	54
9.2. Die Substitution	56
9.2.1. Definitionen	56
9.2.2. Die Bedeutung der Substitution: das Überführungstheorem	60
9.2.3. Die gebundene Umbenennung	61
9.3. Quantorengesetze	62
9.4. Normalformen	69
9.4.1. Pränexe Normalformeln	69
9.4.2. Universelle Normalformeln	71
9.4.3. Konjunktive Normalformeln	74
Übungen zu § 9	76
§ 10. Logisches Schließen als „Rechnen“: Folgern – Ableiten	79
10.1. Problemstellung	79
10.2. Der semantische Folgerungsbegriff	81
10.3. Das syntaktische Ableiten	89
10.3.1. Einführung	89
10.3.2. Ableitungsregeln und eine Axiomenmenge für die Prädikatenlogik	92
10.3.3. Exkurs: Theorien	95
10.3.4. Skizze zum Verhältnis der eingeführten Begriffe zueinander	97
10.3.5. Gesetze über ableitbare Formeln	97
10.3.6. Eine Präzisierung des informellen Beweisens	104
10.4. Die syntaktische Widerspruchsfreiheit	105
Übungen zu § 10	106
§ 11. Der Vollständigkeitssatz	109
11.1. Herausarbeiten der wesentlichen Schwierigkeiten des Beweises	109
11.2. Exkurs: syntaktisch vollständige und maximal syntaktisch widerspruchsfreie Formelmengen	116
11.3. Der Beweis	118
11.4. Konsequenzen aus dem Vollständigkeitssatz	123

11.5. Prädikatenlogik mit Gleichheit	124
11.6. Spezielle Vollständigkeitsresultate	128
§ 12. Entscheidbarkeitsfragen	130
12.1. Bemerkungen zur Entwicklung des Entscheidungsproblems	131
12.2. Die Entscheidbarkeit der quantorenfreien Formeln (Aussagenlogik)	133
12.3. Die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik	134
12.4. Die Semi-Entscheidbarkeit der Ableitungsmengen	137
12.5. Ein Anwendungsbeispiel aus der Theorie der Programmierung: das Terminationsproblem von Programmen	143
12.5.1. Exkurs zum Forschungsgebiet Semantik von Programmiersprachen	143
12.5.2. Die Termination von Programmen	144
Übungen zu § 11 und § 12	152
Kapitel 5. Logische Grundlagen des maschinellen Beweisens (Resolventenprinzip)	155
§ 13. Einleitung	155
§ 14. Die Klauselform der Prädikatenlogik und Herbrand-Strukturen (eine Umformulierung der klassischen Logik)	158
14.1. Folgerungen und Nichterfüllbarkeit	159
14.2. Zur universellen Normalform	160
14.3. Die Klauselform der Prädikatenlogik	162
14.4. Herbrand-Strukturen und der Satz von Herbrand	167
Übungen zu § 14	174
§ 15. Herbrand-Prozeduren	175
§ 16. Das Resolventenprinzip	179
16.1. Syntaktisches Ableiten in der Klausellogik	179
16.2. Der Vereinheitlichungsalgorithmus	182
16.3. Die Resolventenregel	187
16.4. Das Liften	190
16.5. Die Vollständigkeit der Resolventenregel	193
16.6. Split-Resolventen und volle Resolventen	195
Übungen zu § 16	199
§ 17. Beweisverfahren des Resolventenprinzips	201
17.1. Beweisverfahren	201
17.2. Zur Effizienz (Verfeinerungen der Resolventenregel)	205
Übungen zu § 17	212
§ 18. Der konstruktive Charakter von Resolventenableitungen (Greenscher Antworten-Extraktionsprozeß)	212

18.1. Motivation	214
18.2. Eine Verschärfung des Resolventensatzes	217
18.3. Resultate in Ableitungen	220
18.4. Ein Verfahren zur Berechnung von Resultaten mit Beispielen für dessen Anwendung	224
Übungen zu § 18	228
§ 19. Prädikatenlogik als Programmiersprache	230
Kapitel 6. Die Methode der Formalisierung: zwei Beispiele	238
§ 20. Informationswiedergewinnung als Anwendungsbeispiel	238
Übungen zu § 20	248
§ 21. Exkurs: das Formalisieren	248
§ 22. Die Formalisierung der Wertzuweisung	251
Übungen zu § 22	257
Kapitel 7. Probleme mit der Logik	259
§ 23. Grenzen der mathematischen Logik	259
23.1. Strukturen als „Wirklichkeit“	260
23.2. Zur Definition von Wahrheit	261
23.3. Der methodische Zirkel	262
23.4. Hinweise auf nichtbehandelte Sonderlogiken	263
23.5. Was ist semantisch, was syntaktisch?	264
23.6. Fazit	265
§ 24. Bemerkungen zur Geschichte der Logik	265
24.1. Warum werden in diesem Buch Probleme der Geschichte der Logik aufgegriffen?	265
24.2. Welche Möglichkeiten bestehen, die Geschichte der Logik adäquat zu behandeln?	267
24.3. Zum Verhältnis von Logik zu Mathematik (und Philosophie)	269
24.4. Zu innermathematischen Gründen, die zur Herausbildung der mathematischen Logik führten	273
24.5. Epilog	278
Schlußbemerkungen	279
Anhang	280
Teil A. Beweise von Eigenschaften über Zustandsänderungen	280
Teil B. Der Beweis des Koinzidenztheorems	282

Teil C. Beweise von Eigenschaften der Substitution	283
C1. Beweis von Lemma 9.12.	283
C2. Charakterisierung der Komposition von Substitutionen	284
C3. Der Beweis des Überführungstheorems Satz 9.16	285
Teil D. Der Satz von der universellen Normalform	287
Teil E. Semantische und syntaktische Beweisführung	288
Teil F. Beispiele für die Verwendung von Ableitungen	290
F1. Beispiel für eine längere Ableitung	290
F2. Das Theorem über neue Konstanten	292
Teil G. Hilfsmittel für den Vollständigkeitssatz	293
G1. Der Lindenbaumsche Ergänzungssatz	293
G2. Der Beweis von Satz 11.17.	294
Teil H. Hilfsmittel aus der Theorie der Berechenbarkeit	296
H1. Liste der verwendeten Definitionen und Sätze aus der Theorie der berechenbaren Wortfunktionen .	296
H2. Die Äquivalenz von Aufzählbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit	297
H3. Die Aufzählbarkeit der nichterfüllbaren Formeln	299
Teil I. Eine „strikte“ Syntax	300
Teil J. Zerlegungssatz für allgemeinste Vereinheitlicher	302
 Literaturangaben	304
 Hinweise zu weiterführender Literatur	311
 Verzeichnis häufig verwendeter Symbole	315
 Namen- und Sachverzeichnis	318