Auf einen Blick

Über den Autor ... **7**
Danksagung ... **7**
Einleitung ... **19**

Teil I: Mehrdimensionale Analysis für Ingenieure ... **25**
Kapitel 1: Was bisher geschah ... 27
Kapitel 2: Grundlagen der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ ... 51
Kapitel 3: Darf's noch etwas mehr sein? Mehr Differentialrechnung ... 77
Kapitel 4: Erste Anwendungen der mehrdimensionalen Differentialrechnung ... 93
Kapitel 5: Optimierung ... 115

Teil II: Integralrechnung und Vektoranalysis ... **135**
Kapitel 6: Integralrechnung in zwei oder drei Dimensionen ... 137
Kapitel 7: Fäden durch den Raum: Kurvenintegrale ... 171
Kapitel 8: Eine Dimension nach oben: Flächenintegrale ... 203
Kapitel 9: Die hohe Kunst der Vektoranalysis: Integralsätze ... 227

Teil III: Gewöhnliche Differentialgleichungen ... **249**
Kapitel 10: Es ändert sich: Wie funktioniert's? Grundlegende Fragestellung bei Differentialgleichungen ... 251
Kapitel 11: Kochrezepte: Explizite Lösungsmethoden für spezielle gewöhnliche Differentialgleichungen ... 265
Kapitel 12: Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung ... 283
Kapitel 13: Spezielle lineare Differentialgleichungen ... 301
Kapitel 14: Systeme linearer Differentialgleichungen ... 323

Teil IV: Funktionentheorie ... **359**
Kapitel 15: Überhaupt nicht hohl: Holomorphe Funktionen ... 361
Kapitel 16: Komplexe Integration ... 371
Kapitel 17: Potenz- und Laurentreihen ... 389

Teil V: Der Top-Ten-Teil ... **405**
Kapitel 18: Fast zehn Tipps und Tricks, um einen Mathekurs zu überstehen ... 407

Abbildungsverzeichnis ... **411**

Stichwortverzeichnis ... **413**

Inhaltsverzeichnis

Über den Autor **7**
Danksagung **7**
Einleitung **19**
Zu diesem Buch 19
Konventionen in diesem Buch 20
Törichte Annahmen über den Leser 20
Wie dieses Buch aufgebaut ist 21
Teil I: Mehrdimensionale Analysis für Ingenieure 21
Teil II: Integralrechnung und Vektoranalysis 21
Teil III: Gewöhnliche Differentialgleichungen 22
Teil IV: Funktionentheorie 22
Teil V: Der Top-Ten-Teil 23
Symbole in diesem Buch 23
Wie es weitergeht 24

TEIL I
MEHRDIMENSIONALE ANALYSIS FÜR INGENIEURE **25**

Kapitel 1
Was bisher geschah **27**
Grundlagen aus der linearen Algebra 27
Vektor- und Matrizenrechnung 28
Lineare Gleichungssysteme und das Gauß-Verfahren 31
Eigenwerte, Eigenvektoren und die Definitheit von Matrizen 36
Eindimensionale Analysis 37
Folgen, Häufungspunkte und Grenzwerte 38
Grenzwerte reellwertiger Funktionen und Stetigkeit 41
Differenzierbarkeit und Kurvendiskussion 43
Integration 47

Kapitel 2
Grundlagen der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ **51**
Unsere Welt ist mehrdimensional 51
Viele Variablen und ein Funktionswert 52
Einmal sehen ist besser als hundertmal hören: Graphische Darstellung... 53
Viele Wege führen dahin: Stetigkeit 56
Abbildungen zwischen mehrdimensionalen Räumen 58
Ableiten bis zum Abwinken: Totale Differenzierbarkeit 59
Nur einen Teil: Die partielle Ableitung 59
Totale Differenzierbarkeit 63
Was heißt das denn? Charakterisierungen der Differenzierbarkeit 64
Praktische Berechnung der totalen Ableitung 68
Richtungsableitungen 71

Und weiter so! Ableitungen höherer Ordnung ... 72
In eine Richtung: Partielle Ableitungen höherer Ordnung ... 72
Vorsicht: Vertauschen partieller Ableitungen geht nicht immer! ... 74

Kapitel 3
Darf's noch etwas mehr sein? Mehr Differentialrechnung ... 77
Die Kettenregel, eine alte Bekannte ... 78
Eindimensionales in höherdimensionalen Räumen: Kurven ... 78
Achtung, Schleudergefahr: Ableitung entlang einer Kurve ... 79
Und nun überall: Die Kettenregel bei Koordinatentransformationen ... 81
Kettenregel kurz und knapp mit der Jacobi-Matrix ... 84
In voller Pracht: Die Formel für die allgemeine Kettenregel ... 85
Höhere Ableitungen, Differentialoperatoren und mathematische Schreibfaulheit ... 87
Zweite Ableitungen sammeln: Hesse-Matrix ... 87
Div, rot, grad und der Laplace-Operator ... 88
Der Mittelwertsatz ... 90
Der Mittelwertsatz im Mehrdimensionalen ... 90

Kapitel 4
Erste Anwendungen der mehrdimensionalen Differentialrechnung ... 93
Die Taylorsche Formel ... 94
Beispielhaft zweidimensionale Funktionen approximieren ... 94
Einige Spezialfälle zur Taylorschen Formel ... 95
Das Newton-Verfahren ... 97
Das eindimensionale Newton-Verfahren ... 97
Das Newton-Verfahren im mehrdimensionalen Fall ... 104
Von hinten durch die Brust ins Auge: Implizite Funktionen ... 107
Implizite Funktionen im Eindimensionalen ... 108
Mehrdimensionale implizite Funktionen ... 111

Kapitel 5
Optimierung ... 115
Berggipfel und tiefste Schluchten: Extremstellen ... 115
Höher als die Umgebung? Oder am allerhöchsten? ... 116
Weniger geht nicht: Unrestringierte Optimierung ... 116
Kritisch! Eine notwendige Bedingung für lokale Extrema ... 117
Stationäre Punkte und Tangentialebenen ... 118
Ganz sicher: Hinreichende Optimalitätsbedingung ... 120
Informationen durch die Hesse-Matrix: Höhen, Tiefen und Sattelpunkte ... 120
Und wie ist's denn nun? Ein einfacher Positivitätstest ... 122
Restringierte Optimierung ... 124
Die Sache mit den Nebenbedingungen ... 124
Direkt zum Ziel: Die explizite Methode ... 125
Der indirekte Weg: Lagrange-Multiplikatoren ... 128

Problemvergrößerung erleichtert die Lösung ... 130
Jetzt schreckt nichts mehr: Mehrere Nebenbedingungen ... 134

TEIL II
INTEGRALRECHNUNG UND VEKTORANALYSIS ... 135

Kapitel 6
Integralrechnung in zwei oder drei Dimensionen ... 137
Bauklötzchen oder: Die zweidimensionale Integration ... 138
Wir basteln uns ein Integral ... 139
Messbare Mengen und Flächeninhalt ... 141
Flächeninhalt durch Integration berechnen ... 143
Projizierbare Mengen ... 143
Zweimal eins ist zwei ... 146
Integralberechnung ganz praktisch: Beispiele ... 146
Die zweidimensionale Substitutionsregel ... 149
Rundes gerade biegen: Polarkoordinaten ... 151
Im Raum geht das auch: Dreidimensionale Integration ... 155
Dreidimensionale Projizierbarkeiten ... 156
Drei Integrationen zur dreidimensionalen Integration ... 157
Krumme Volumina und Integration im Raum ... 159
Substitutionsregel dreidimensional ... 161
Etwas Physik: Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmomente ... 166

Kapitel 7
Fäden durch den Raum: Kurvenintegrale ... 171
Punkte und Kurven im dreidimensionalen Raum ... 171
Wandern mathematisch: Wege und Kurven im $\mathbb{R}^3$ ... 172
Differenzierbare Wege oder Geschwindigkeit! ... 173
Kurven mit und ohne Ecken! ... 174
Eine Fahrschule: Rechenregeln für differenzierbare Wege ... 175
Orientierungslos im Raum: Kurvenintegrale über Skalarfelder ... 177
Kurvenintegrale ohne Orientierung ... 178
Dieselbe Kurve – Unabhängigkeit von der Parametrisierung ... 180
Drahtspiele: Bogenlänge, Masse und Schwerpunkt ... 180
Orientierte Kurvenintegrale ... 184
Da entlang: Kurven mit Richtung ... 184
Einbahnstraße: Der Tangenteneinheitsvektor ... 184
Der Weg ist das Ziel: Orientierung und Parametrisierung ... 186
Viele, viele Pfeile: Vektorfelder ... 187
Arbeit ist – ein orientiertes Kurvenintegral! ... 187
Da könnte doch etwas sein: Potentialfelder ... 190
Gibt es Stammfunktionen für Vektorfelder? ... 191
Stammtischfähig: Konservative Vektorfelder ... 192
Integrieren kann so schön sein: Der erste Hauptsatz für Kurvenintegrale ... 193
Kurvenintegrale über Potentialfelder sind wegunabhängig! ... 194

Integrabilitätsbedingungen oder: Der zweite Hauptsatz ... 196
Das Potential ausschöpfen: Berechnung einer Stammfunktion ... 198

Kapitel 8
Eine Dimension nach oben: Flächenintegrale ... 203
Flächen im dreidimensionalen Raum ... 203
Mathematische Darstellungen von Flächen im Raum ... 203
Voll normal: Reguläre Bereiche ... 206
Nur nicht ausrutschen! Glatte Flächen ... 208
Koordinatensysteme auf glatten Flächen ... 210
Flächen mit Knick: Stückweise glatt ... 211
Jede Menge parametrisierter Flächen: Beispiele ... 212
Wie groß ist eine gebogene Fläche? ... 216
Viele kleine Plättchen: Auf dem Weg zum Flächeninhalt ... 217
Eine Formel für den Flächeninhalt ... 219
Jede Menge Inhalt: Formeln für bestimmte Flächeninhalte ... 220
Flächenintegrale mit und ohne Orientierung ... 222
Skalarfelder auf Flächen: Orientierungslos ... 222
Mit Orientierung: Vektorfelder über Flächen integrieren ... 223
Alles fließt: Eine physikalische Deutung ... 224

Kapitel 9
Die hohe Kunst der Vektoranalysis: Integralsätze ... 227
Differentialoperatoren und Integralrechnung ... 228
Differentialoperatoren: Laplace-Operator, Divergenz und Rotation ... 228
Operatoroperationen mit dem Nabla-Operator ... 230
Es wirbelt herum: Rotation und Potentialfelder ... 231
Rechenregeln zu Rotation, Divergenz und Gradient ... 235
Noch mehr Rechenregeln ... 236
Harmonie unter Funktionen ... 238
Der Gaußsche Integralsatz ... 238
Oben und unten: Orientierung glatter Flächen ... 239
Quellen, Senken und der Fluss durch die Oberfläche ... 241
Die Sätze von Kelvin-Stokes und Green ... 244
Der Greensche Integralsatz ... 247

TEIL III
GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ... 249

Kapitel 10
Es ändert sich: Wie funktioniert's? Grundlegende Fragestellung bei Differentialgleichungen ... 251
Was sind Differentialgleichungen? ... 251
Gewöhnlich oder partiell: Definitionen ... 251
Vom Pendel zum Räuber-Beute-Modell: Überall Differentialgleichungen ... 252

Ordnung muss sein: Die allgemeine Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung ... 254
Gibt's das und, wenn ja, wie viele? Existenz und Eindeutigkeit ... 255
Langsam anfangen: Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung ... 256
Am Anfang der Anfangswert und dann? Anfangswertprobleme ... 257
Das gibt's! Der Satz von Picard-Lindelöf ... 258
Graphische Veranschaulichungen ... 262
Das Richtungsfeld ... 262
Nicht aus »Star Trek«: Die Isoklinen ... 263

Kapitel 11
Kochrezepte: Explizite Lösungsmethoden für spezielle gewöhnliche Differentialgleichungen ... 265
Die exakte Differentialgleichung ... 266
Was eine Differentialgleichung exakt macht: Die Potentialfunktion! ... 266
Wieder einmal: Konservative Vektorfelder ... 267
Implizite Lösungen einer exakten Differentialgleichung ... 268
Unpassendes passend machen: Integrierende Faktoren ... 271
Separable Differentialgleichungen ... 273
Oh, das ist ja exakt! ... 273
Ähnlich die Ähnlichkeits-Differentialgleichungen! ... 275
Lineare Differentialgleichungen ... 277

Kapitel 12
Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung ... 283
Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung ... 283
Alles in einem: Die allgemeine Form einer linearen Differentialgleichung ... 284
Funktionale Vektoren oder: Lineare Algebra im Funktionenraum ... 285
Lineare Unabhängigkeit von Funktionen ... 285
Ein grundlegender Ableitungsoperator ... 287
Jede lineare Differentialgleichung hat ihren eigenen Operator ... 288
Die homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung ... 289
Rückkehr der Kerne: Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ... 289
Ganz grundlegend: Das Fundamentalsystem ... 290
Funktionen im Karree: Die Wronski-Matrix ... 292
Die inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung ... 293
Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ... 293
Spezielle Lösung durch Variation der Konstanten ... 294
Das Reduktionsverfahren von d'Alembert ... 297

Kapitel 13
Spezielle lineare Differentialgleichungen ... 301
Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ... 301
Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung ... 303
Das charakteristische Polynom ... 304
Lösungen bei reellen Nullstellen ... 304

Lösungen bei komplexen Nullstellen ... 305
Ein spezielles Fundamentalsystem ... 307
Schritt für Schritt zur Lösung ... 308
Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung ... 310
Spezielle rechte Seiten ... 311
Die Eulersche Differentialgleichung ... 316
Ein Lösungsverfahren zur Eulerschen Differentialgleichung ... 316

Kapitel 14
Systeme linearer Differentialgleichungen ... 323

Allgemeine lineare Differentialgleichungssysteme ... 323
Schreibweisen: Vektorwertige Funktionen oder ein Vektor von Funktionen ... 324
Was ist ein Differentialgleichungssystem? ... 324
Zwei Seiten der Medaille: Eine lineare Differentialgleichung als Differentialgleichungssystem ... 327
Gibt's denn das? Existenz und Eindeutigkeit bei Differentialgleichungssystemen ... 329
Das alte Spiel: Lösungsmethode für lineare Differentialgleichungssysteme ... 330
Eins: Die Fundamentalmatrix des linearen Systems ... 330
Zwei: Die allgemeine Lösung homogener linearer Systeme ... 332
Drei: Die allgemeine Lösung des inhomogenen linearen Systems ... 333
Noch einmal: Die Variation der Konstanten ... 334
Spezieller: Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten ... 337
Kein bisschen kompliziert: Komplexwertige Lösungen ... 337
Schon wieder die Exponentialfunktion: Lösung des homogenen Systems ... 338
Eigenwerte liefern Lösungen ... 339
Auf dem Weg zum Fundamentalsystem ... 340
Einfache Eigenwerte: Reell – geschenkt! ... 340
Lösungspärchen bei einfachen komplexen Eigenwerten ... 341
Hauptvektoren ... 346
Die Matrix-Exponentialfunktion ... 349
Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten ... 352

TEIL IV
FUNKTIONENTHEORIE ... 359

Kapitel 15
Überhaupt nicht hohl: Holomorphe Funktionen ... 361

Funktionentheorie oder komplexe Analysis ... 361
Fast wie im Reellen: Folgen komplexer Zahlen ... 361
Teuflische Tücke im Detail: Die komplexe Ableitung ... 364
Na, so was! Schon wieder Differentialgleichungen: Cauchy-Riemann ... 365

Dem Kind einen Namen geben: Holomorphe Funktionen ... 366
Verwaltungsfreude: Regeln für die komplexe Ableitung ... 367

Kapitel 16
Komplexe Integration ... 371
Vorsichtig anfangen: eindimensionale Integration im Komplexen ... 371
Teilen, teilen! Integrale komplexwertiger reeller Funktionen ... 371
Krumme Linien: Das komplexe Kurvenintegral ... 372
Es geht! Praktische Berechnung komplexer Kurvenintegrale ... 373
Viel mehr zu komplexen Kurvenintegralen! ... 376
Richtungsweisend: Orientierte Integrale ... 377
Das berühmte Beispiel von Cauchy ... 378
Der Integralsatz von Cauchy ... 379
Fast alles verschwindet! ... 379
Ein bisschen beweisen: Beweisskizze zum Integralsatz ... 379
Noch einmal: Das Cauchy-Beispiel und eine Folgerung ... 380
Böse Stellen: Die Singularitäten ... 381
Igitt, eine Singularität! ... 382
Da bleibt doch was ... das Residuum ... 383
Das ist ja einfach! Berechnung des Residuums für Polstellen 1. Ordnung. 383
Kurvenintegrale um Singularitäten ... 384
Singularitäten links liegen lassen: Der Residuensatz ... 384
Hilfe bei reellen Integralen: Komplexe Umwege vereinfachen die Integration ... 385

Kapitel 17
Potenz- und Laurentreihen ... 389
Mal wieder Potenzreihen – diesmal komplex! ... 389
Nach altem Rezept: Die Potenzreihen ... 389
Diesmal wirklich: Konvergenzkreise ... 390
Im Kreis: Potenzreihen sind holomorph! ... 391
Trost bei Singularitäten: Laurentreihen ... 393
Laurentreihen, Residuen und Cauchys Integralformel ... 397
Einige besondere Eigenschaften holomorpher Funktionen ... 400
Funktionswerte und Kurvenintegrale holomorpher Funktionen ... 401
Identitätssatz und Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen ... 402
Der Fundamentalsatz der Algebra ... 403

TEIL V
DER TOP-TEN-TEIL ... 405

Kapitel 18
Fast zehn Tipps und Tricks, um einen Mathekurs zu überstehen ... 407
Die Schwierigkeiten der höheren Mathematik ... 407
Wozu das Ganze gut ist ... 408

Nicht lockerlassen! ... 408
Der Unterschied zwischen einer Mathematikvorlesung und einer Theatervorstellung ... 409
Immer noch: Glauben Sie nichts! ... 410
Üben Sie! Üben Sie! ... 410

Abbildungsverzeichnis ... 411

Stichwortverzeichnis ... 413