

# Inhaltsverzeichnis

|          |                                                                    |            |
|----------|--------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>1</b> | <b>Algebraische Strukturen</b>                                     | <b>1</b>   |
| 1.1      | Aussagenlogik                                                      | 1          |
| 1.2      | Mengen und Quantoren                                               | 5          |
| 1.3      | Abbildungen                                                        | 10         |
| 1.4      | Gruppen, Ringe, Körper und Vektorräume                             | 14         |
| 1.5      | Restklassen                                                        | 34         |
| 1.6      | Komplexe Zahlen                                                    | 37         |
| 1.7      | Zerlegung von Polynomen                                            | 47         |
| 1.8      | Fundamentalsatz der Algebra                                        | 53         |
| 1.9      | Übungsaufgaben                                                     | 55         |
| <b>2</b> | <b>Lineare Gleichungssysteme, Matrizen und Determinanten</b>       | <b>59</b>  |
| 2.1      | Lösung linearer Gleichungssysteme                                  | 59         |
| 2.2      | Matrix-Vektor-Notation                                             | 65         |
| 2.3      | Reguläre und singuläre Matrizen, inverse Matrix                    | 81         |
| 2.4      | Darstellung elementarer Umformungen als Matrixprodukt              | 95         |
| 2.5      | LU-Faktorisierung                                                  | 110        |
| 2.6      | Determinanten                                                      | 122        |
| 2.7      | Cramer'sche Regeln                                                 | 148        |
| 2.8      | Invariantenteilersatz                                              | 161        |
| 2.9      | Übungsaufgaben                                                     | 169        |
| <b>3</b> | <b>Erzeugung von Vektorräumen</b>                                  | <b>175</b> |
| 3.1      | Lineare Erzeugnisse, Basis und Dimension                           | 175        |
| 3.2      | Standardisierung der Lösung inhomogener linearer Gleichungssysteme | 205        |
| 3.3      | Basiswahl und Koordinatenvektoren                                  | 212        |
| 3.4      | Basiswechsel bei der Darstellung von Vektoren                      | 221        |
| 3.5      | Quotientenvektorräume                                              | 229        |
| 3.6      | Übungsaufgaben                                                     | 232        |

|          |                                                                     |            |
|----------|---------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>4</b> | <b>Lineare Abbildungen und Bilinearformen</b>                       | <b>237</b> |
| 4.1      | Lineare Abbildungen                                                 | 237        |
| 4.2      | Homomorphiesatz                                                     | 250        |
| 4.3      | Basiswahl und Koordinatenmatrix bei Homomorphismen                  | 259        |
| 4.4      | Basiswechsel und Äquivalenztransformation                           | 266        |
| 4.5      | Vektorraumendomorphismen                                            | 276        |
| 4.6      | Basiswahl und Koordinatenmatrix bei Endomorphismen                  | 277        |
| 4.7      | Basiswechsel und Ähnlichkeitstransformation                         | 278        |
| 4.8      | Bilinearformen und quadratische Formen                              | 283        |
| 4.9      | Basiswahl und Strukturmatrix                                        | 288        |
| 4.10     | Basiswechsel und Kongruenztransformation                            | 295        |
| 4.11     | Homomorphismenräume                                                 | 310        |
| 4.12     | Übungsaufgaben                                                      | 315        |
| <b>5</b> | <b>Produkte in Vektorräumen</b>                                     | <b>321</b> |
| 5.1      | Skalarprodukt                                                       | 321        |
| 5.2      | Norm, Metrik, Länge und Winkel                                      | 325        |
| 5.3      | Orthogonale Entwicklung                                             | 337        |
| 5.4      | Vektorprodukt                                                       | 346        |
| 5.5      | Spatprodukt                                                         | 350        |
| 5.6      | Tensorprodukt und multilineare Abbildungen                          | 352        |
| 5.7      | Übungsaufgaben                                                      | 377        |
| <b>6</b> | <b>Eigenwerte und Eigenvektoren</b>                                 | <b>383</b> |
| 6.1      | Eigenwertprobleme und charakteristisches Polynom                    | 383        |
| 6.2      | Adjungierte Endomorphismen                                          | 406        |
| 6.3      | Selbstadjungierte Endomorphismen und Spektralsatz                   | 411        |
| 6.4      | Positiv definite Matrizen                                           | 429        |
| 6.5      | Orthogonale und unitäre Endomorphismen bzw. Matrizen                | 433        |
| 6.6      | Übungsaufgaben                                                      | 438        |
| <b>7</b> | <b>Trigonalisierung und Normalformen</b>                            | <b>445</b> |
| 7.1      | Trigonalisierung durch $f$ -invariante Teilräume                    | 445        |
| 7.2      | Hauptvektoren und Jordan'sche Normalform                            | 458        |
| 7.3      | Transformation durch invers gekoppelte Umformungen                  | 513        |
| 7.4      | Zusammenhang mit Invariantenteilern                                 | 515        |
| 7.5      | Übungsaufgaben                                                      | 543        |
| <b>8</b> | <b>Anwendungen</b>                                                  | <b>547</b> |
| 8.1      | Trigonometrische Polynome und Fourier-Reihen                        | 547        |
| 8.2      | Quadriken und mehrdimensionale quadratische Gleichungen             | 555        |
| 8.3      | Markov-Ketten                                                       | 561        |
| 8.4      | Systeme linearer Differenzialgleichungen und Matrixexponentialreihe | 569        |
| 8.5      | Übungsaufgaben                                                      | 594        |

|                                                                             |            |
|-----------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>9 Zusammenfassungen und Übersichten</b>                                  | <b>599</b> |
| 9.1 Regularität und Singularität .....                                      | 599        |
| 9.2 Basis und lineare Unabhängigkeit .....                                  | 604        |
| 9.3 Invarianten .....                                                       | 604        |
| 9.4 Zusammenstellung der Matrixfaktorisierungen und ihrer Normalformen .... | 607        |
| 9.5 Eigenwerttheorie .....                                                  | 610        |
| 9.6 Mathematische Begriffe Deutsch – Englisch .....                         | 613        |
| <b>Literaturverzeichnis</b>                                                 | <b>615</b> |
| <b>Sachverzeichnis</b>                                                      | <b>617</b> |