Inhaltsverzeichnis

I Vektoranalysis 1

1 Ebene und räumliche Kurven 1

1.1 Vektorielle Darstellung einer Kurve 1
1.2 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter 4
1.2.1 Ableitung eines Vektors 4
1.2.2 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor eines Massenpunktes .. 9
1.3 Bogenlänge einer Kurve 12
1.4 Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor 16
1.5 Krümmung einer Kurve 21
1.6 Ein Anwendungsbeispiel: Zerlegung von Geschwindigkeit und Beschleunigung in Tangential- und Normalkomponenten 27

2 Flächen im Raum 31

2.1 Vektorielle Darstellung einer Fläche 31
2.2 Flächenkurven 35
2.3 Tangentialebene, Flächennormale, Flächenelement 37
2.4 Flächen vom Typ $z = f(x; y)$ 43

3 Skalar- und Vektorfelder 47

3.1 Ein einführendes Beispiel 47
3.2 Skalarfelder 50
3.3 Vektorfelder 52
3.4 Spezielle Vektorfelder aus Physik und Technik 55
3.4.1 Homogenes Vektorfeld 55
3.4.2 Kugel- oder radialsymmetrisches Vektorfeld (Zentralfeld) 56
3.4.3 Zylinder- oder axialsymmetrisches Vektorfeld 58
3.4.4 Zusammenstellung der behandelten Vektorfelder 59

4 Gradient eines Skalarfeldes 60

4.1 Definition und Eigenschaften des Gradienten 60
4.2 Richtungsableitung 64
4.3 Flächen vom Typ $F(x; y; z) = 0$ 66
4.4 Ein Anwendungsbeispiel: Elektrisches Feld einer Punktladung 68

5 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes 70

5.1 Divergenz eines Vektorfeldes 70
5.1.1 Ein einführendes Beispiel 70
5.1.2 Definition und Eigenschaften der Divergenz 74
5.1.3 Ein Anwendungsbeispiel: Elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders 77

Bibliografische Informationen
http://d-nb.info/1010338137

digitalisiert durch DEUTSCHE NATIONAL BIBLIOTHEK

5.2 Rotation eines Vektorfeldes ... 79
5.2.1 Definition und Eigenschaften der Rotation ... 79
5.2.2 Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsfeld einer rotierenden Scheibe ... 83
5.3 Spezielle Vektorfelder ... 85
5.3.1 Quellenfreies Vektorfeld ... 85
5.3.2 Wirbelfreies Vektorfeld ... 87
5.3.3 Laplace- und Poisson-Gleichung ... 89
5.3.4 Ein Anwendungsbeispiel: Potentialgleichung des elektrischen Feldes ... 93

6 Spezielle ebene und räumliche Koordinatensysteme ... 94
6.1 Polarkoordinaten ... 94
6.1.1 Definition und Eigenschaften der Polarkoordinaten ... 94
6.1.2 Darstellung eines Vektors in Polarkoordinaten ... 95
6.1.3 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Polarkoordinaten ... 101
6.1.4 Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsvektor bei einer gleichförmigen Kreisbewegung ... 105
6.2 Zylinderkoordinaten ... 107
6.2.1 Definition und Eigenschaften der Zylinderkoordinaten ... 107
6.2.2 Darstellung eines Vektors in Zylinderkoordinaten ... 111
6.2.3 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten ... 116
6.2.4 Zylindersymmetrische Vektorfelder ... 119
6.2.5 Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsvektor eines Massenpunktes in Zylinderkoordinaten ... 121
6.3 Kugelkoordinaten ... 124
6.3.1 Definition und Eigenschaften der Kugelkoordinaten ... 124
6.3.2 Darstellung eines Vektors in Kugelkoordinaten ... 129
6.3.3 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Kugelkoordinaten ... 135
6.3.4 Kugel- oder radialsymmetrische Vektorfelder (Zentralfelder) ... 137
6.3.5 Ein Anwendungsbeispiel: Potential und elektrische Feldstärke in der Umgebung einer homogen geladenen Kugel ... 140

7 Linien- oder Kurvenintegrale ... 143
7.1 Ein einführendes Beispiel ... 143
7.2 Definition eines Linien- oder Kurvenintegrals ... 146
7.3 Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals ... 148
7.4 Wegunabhängigkeit eines Linien- oder Kurvenintegrals. Konservative Vektorfelder ... 152
7.5 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik ... 163
7.5.1 Kugel- oder radialsymmetrische Vektorfelder (Zentralfelder) ... 163
7.5.2 Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters ... 164
7.5.3 Elektrisches Feld in der Umgebung eines homogen geladenen Drahtes 165
7.6 Arbeitsintegral ... 167
7.6.1 Arbeit eines Kraftfeldes ... 167
7.6.2 Ein Anwendungsbeispiel: Elektronen im Magnetfeld ... 168

8 Oberflächenintegrale ... 170
8.1 Ein einführendes Beispiel ... 170
8.2 Definition eines Oberflächenintegrals ... 175
8.3 Berechnung eines Oberflächenintegrals ... 177
8.3.1 Oberflächenintegral in speziellen (symmetriegerechten) Koordinaten ... 178
8.3.2 Oberflächenintegral in Flächenparametern ... 190
8.4 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik ... 195
8.4.1 Fluss eines homogenen Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Würfels ... 195
8.4.2 Fluss eines zylinder- oder axialsymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Zylinders ... 199
8.4.3 Fluss eines kugel- oder radialsymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche einer Kugel ... 202

9 Integralsätze von Gauß und Stokes ... 205
9.1 Gaußscher Integralsatz ... 205
9.1.1 Ein einführendes Beispiel ... 205
9.1.2 Gaußscher Integralsatz im Raum ... 207
9.1.3 Gaußscher Integralsatz in der Ebene ... 211
9.2 Stokesscher Integralsatz ... 214
9.3 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik ... 222
9.3.1 Elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders ... 222
9.3.2 Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters ... 227

Übungsaufgaben ... 230
Zu Abschnitt 1 ... 230
Zu Abschnitt 2 ... 232
Zu Abschnitt 3 ... 234
Zu Abschnitt 4 ... 236
Zu Abschnitt 5 ... 237
Zu Abschnitt 6 ... 239
Zu Abschnitt 7 ... 242
Zu Abschnitt 8 ... 245
Zu Abschnitt 9 ... 248

II Wahrscheinlichkeitsrechnung ... 251

1 Hilfsmittel aus der Kombinatorik ... 251
1.1 Urnenmodell ... 251
1.2 Permutationen ... 252
1.3 Kombinationen ... 255
1.4 Variationen ... 260
1.5 Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Formeln ... 264

2 Grundbegriffe ... 264
2.1 Einführende Beispiele ... 264
2.2 Zufallsexperimente ... 268

2.3 Elementarereignisse und Ergebnismenge eines Zufallsexperiments 269
2.4 Ereignisse und Ereignisraum 270
2.5 Verknüpfungen von Ereignissen 273

3 Wahrscheinlichkeit 276

3.1 Laplace-Experimente 276
3.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome 281
3.2.1 Eigenschaften der relativen Häufigkeiten 281
3.2.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff 284
3.2.3 Festlegung unbekannter Wahrscheinlichkeiten in der Praxis („statistische" Definition der Wahrscheinlichkeit) 286
3.2.4 Wahrscheinlichkeitsraum 287
3.3 Additionssatz für beliebige Ereignisse 290
3.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit 292
3.5 Multiplikationssatz 295
3.6 Stochastisch unabhängige Ereignisse 299
3.7 Ereignisbäume 302
3.8 Totale Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und Bayessche Formel 308

4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen 315

4.1 Zufallsvariable oder Zufallsgrößen 315
4.1.1 Einführende Beispiele 315
4.1.2 Definition einer Zufallsvariablen 317
4.2 Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen 318
4.3 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen (diskrete Verteilung) 319
4.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Zufallsvariablen (stetige Verteilung) 327

5 Kennwerte oder Maßzahlen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung 335

5.1 Erwartungswert einer Zufallsvariablen 336
5.1.1 Ein einführendes Beispiel 336
5.1.2 Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen 336
5.1.3 Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen 337
5.2 Erwartungswert einer Funktion 339
5.3 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer diskreten Zufallsvariablen 340
5.4 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer stetigen Zufallsvariablen 344
5.5 Mittelwert und Varianz einer linearen Funktion 348

6 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen 350

6.1 Binomialverteilung 350
6.2 Hypergeometrische Verteilung 361
6.3 Poisson-Verteilung 367

6.4 Gaußsche Normalverteilung ... 371
6.4.1 Allgemeine Normalverteilung ... 371
6.4.2 Standardnormalverteilung ... 374
6.4.3 Erläuterungen zur tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ... 376
6.4.4 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ... 378
6.4.5 Quantile der Standardnormalverteilung ... 388
6.5 Exponentialverteilung ... 390
6.6 Zusammenhang zwischen der Binomialverteilung und der Gaußschen Normalverteilung ... 393
6.7 Approximation einer diskreten Verteilung durch eine andere Verteilung, insbesondere durch die Normalverteilung ... 401

7 Wahrscheinlichkeitsverteilungen von mehreren Zufallsvariablen ... 403

7.1 Ein einführendes Beispiel ... 403
7.2 Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen ... 406
7.2.1 Verteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen ... 406
7.2.2 Diskrete zweidimensionale Verteilung ... 408
7.2.3 Stetige zweidimensionale Verteilung ... 411
7.3 Stochastisch unabhängige Zufallsvariable ... 417
7.4 Funktionen von mehreren Zufallsvariablen ... 423
7.5 Summen und Produkte von Zufallsvariablen ... 425
7.5.1 Additionssatz für Mittelwerte ... 425
7.5.2 Multiplikationssatz für Mittelwerte ... 427
7.5.3 Additionssatz für Varianzen ... 430
7.5.4 Eigenschaften einer Summe von stochastisch unabhängigen und normalverteilten Zufallsvariablen ... 433
7.6 Über die große Bedeutung der Gaußschen Normalverteilung in den Anwendungen ... 436
7.6.1 Zentraler Grenzwertsatz ... 436
7.6.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe von Zufallsvariablen ... 438
7.6.3 Grenzwertsatz von Moivre-Laplace ... 440

8 Prüf- oder Testverteilungen ... 441

8.1 Chi-Quadrat-Verteilung ... 441
8.2 *t*-Verteilung von Student ... 446

Übungsaufgaben ... 451

Zu Abschnitt 1 ... 451
Zu Abschnitt 2 ... 453
Zu Abschnitt 3 ... 454
Zu Abschnitt 4 ... 457
Zu Abschnitt 5 ... 459
Zu Abschnitt 6 ... 462
Zu Abschnitt 7 ... 467

III Grundlagen der mathematischen Statistik 471

1 Grundbegriffe 471

1.1 Ein einführendes Beispiel 471
1.2 Zufallsstichproben aus einer Grundgesamtheit 472
1.3 Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe 474
1.3.1 Häufigkeitsfunktion einer Stichprobe 474
1.3.2 Verteilungsfunktion einer Stichprobe 477
1.3.3 Gruppierung der Stichprobenwerte bei umfangreichen Stichproben (Einteilung in Klassen) 479

2 Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe 485

2.1 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer Stichprobe 486
2.2 Spezielle Berechnungsformeln für die Kennwerte einer Stichprobe 489
2.2.1 Berechnung der Kennwerte unter Verwendung der Häufigkeitsfunktion 489
2.2.2 Berechnung der Kennwerte einer gruppierten Stichprobe 491

3 Statistische Schätzmethoden für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parameterschätzungen") 493

3.1 Aufgaben der Parameterschätzung 493
3.2 Schätzfunktionen und Schätzwerte für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Punktschätzungen") 494
3.2.1 Ein einführendes Beispiel 495
3.2.2 Schätz- und Stichprobenfunktionen 495
3.2.3 Schätzungen für den Mittelwert μ 498
3.2.4 Schätzungen für die Varianz σ^2 499
3.2.5 Schätzungen für einen Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung) 500
3.2.6 Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Schätzfunktionen und ihrer Schätzwerte 500
3.3 Ein Verfahren zur Gewinnung von Schätzfunktionen 503
3.3.1 Maximum-Likelihood-Methode 504
3.3.2 Anwendungen auf spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen 506
3.3.2.1 Binomialverteilung 506
3.3.2.2 Poisson-Verteilung 508
3.3.2.3 Gaußsche Normalverteilung 511
3.4 Vertrauens- oder Konfidenzintervalle für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Intervallschätzungen") 514
3.4.1 Vertrauens- oder Konfidenzintervalle und statistische Sicherheit 514
3.4.2 Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert μ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz σ^2 518
3.4.3 Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert μ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz σ^2 525
3.4.4 Vertrauensintervalle für die unbekannte Varianz σ^2 einer Normalverteilung 530

3.4.5 Vertrauensintervalle für einen unbekannten Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung) ... 534
3.4.6 Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert μ einer beliebigen Verteilung ... 539

4 Statistische Prüfverfahren für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parametertests“) ... 540

4.1 Ein einführendes Beispiel ... 540
4.2 Statistische Hypothesen und Parametertests ... 544
4.3 Planung und Durchführung eines Parametertests ... 545
4.4 Mögliche Fehlerquellen bei einem Parametertest ... 550
4.5 Spezielle Parametertests ... 555
4.5.1 Tests für den unbekannten Mittelwert μ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz σ^2 ... 555
4.5.2 Tests für den unbekannten Mittelwert μ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz σ^2 ... 564
4.5.3 Tests für die Gleichheit der unbekannten Mittelwerte μ_1 und μ_2 zweier Normalverteilungen (Differenzentests) ... 569
4.5.3.1 Abhängige und unabhängige Stichproben ... 569
4.5.3.2 Differenzentests bei abhängigen Stichproben ... 571
4.5.3.3 Differenzentests bei unabhängigen Stichproben ... 576
4.5.4 Tests für die unbekannte Varianz σ^2 einer Normalverteilung ... 588
4.5.5 Tests für einen unbekannten Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung) ... 593
4.6 Ein Anwendungsbeispiel: Statistische Qualitätskontrolle unter Verwendung von Kontrollkarten ... 599

5 Statistische Prüfverfahren für die unbekannte Verteilungsfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Anpassungs- oder Verteilungstests“) ... 604

5.1 Aufgaben eines Anpassungs- oder Verteilungstests ... 604
5.2 Ein einführendes Beispiel ... 605
5.3 Chi-Quadrat-Test („χ^2-Test“) ... 607

6 Korrelation und Regression ... 620

6.1 Korrelation ... 620
6.1.1 Korrelationskoeffizient einer zweidimensionalen Stichprobe ... 620
6.1.2 Korrelationskoeffizient einer zweidimensionalen Grundgesamtheit ... 630
6.2 Regression ... 633

Übungsaufgaben ... 639

Zu Abschnitt 1 ... 639
Zu Abschnitt 2 ... 641
Zu Abschnitt 3 ... 642
Zu Abschnitt 4 ... 644
Zu Abschnitt 5 ... 647
Zu Abschnitt 6 ... 648

IV Fehler- und Ausgleichsrechnung 650

1 „Fehlerarten" (systematische und zufällige Messabweichungen). Aufgaben der Fehler- und Ausgleichsrechnung 650

2 Statistische Verteilung der Messwerte und Messabweichungen („Messfehler") 654

2.1 Häufigkeitsverteilungen 654
2.2 Normalverteilte Messgrößen 656

3 Auswertung einer Messreihe 662

3.1 Mittelwert und Standardabweichung 662
3.2 Vertrauensbereich für den Mittelwert μ, Messunsicherheit, Messergebnis ... 670

4 „Fehlerfortpflanzung" nach Gauß 679

4.1 Ein einführendes Beispiel 679
4.2 Mittelwert einer „indirekten" Messgröße 680
4.3 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz (Varianzfortpflanzungsgesetz) 683
4.4 Messergebnis für eine „indirekte" Messgröße 687

5 Ausgleichs- oder Regressionskurven 694

5.1 Ein einführendes Beispiel 694
5.2 Ausgleichung nach der „Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate" 696
5.3 Ausgleichs- oder Regressionsgerade 701
5.3.1 Bestimmung der Parameter einer Ausgleichsgeraden 701
5.3.2 Streuungsmaße und Unsicherheiten bei der Parameterbestimmung ... 709
5.4 Ausgleichs- oder Regressionsparabel 715
5.5 Nichtlineare Ausgleichsprobleme, die auf die lineare Regression zurückführbar sind 719

Übungsaufgaben 730

Zu Abschnitt 3 730
Zu Abschnitt 4 732
Zu Abschnitt 5 734

Anhang 739

Teil A: Tabellen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik 740

Tabelle 1: Verteilungsfunktion $\phi(u)$ der Standardnormalverteilung 740
Tabelle 2: Quantile der Standardnormalverteilung 742
Tabelle 3: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung 744
Tabelle 4: Quantile der t-Verteilung von „Student" 746

Teil B: Lösungen der Übungsaufgaben 749

I Vektoranalysis 750

Abschnitt 1 750
Abschnitt 2 752
Abschnitt 3 754
Abschnitt 4 757
Abschnitt 5 760
Abschnitt 6 766
Abschnitt 7 772
Abschnitt 8 777
Abschnitt 9 781

II Wahrscheinlichkeitsrechnung 786

Abschnitt 1 786
Abschnitt 2 787
Abschnitt 3 787
Abschnitt 4 790
Abschnitt 5 792
Abschnitt 6 795
Abschnitt 7 800

III Grundlagen der mathematischen Statistik 803

Abschnitt 1 803
Abschnitt 2 807
Abschnitt 3 808
Abschnitt 4 811
Abschnitt 5 817
Abschnitt 6 821

IV Fehler- und Ausgleichsrechnung 824

Abschnitt 3 824
Abschnitt 4 825
Abschnitt 5 828

Literaturhinweise 833

Sachwortverzeichnis 834