

Inhaltsverzeichnis

I Vektoranalysis	1
1 Ebene und räumliche Kurven	1
1.1 Vektorielle Darstellung einer Kurve	1
1.2 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter	4
1.2.1 Ableitung eines Vektors	4
1.2.2 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor eines Massenpunktes	9
1.3 Bogenlänge einer Kurve	12
1.4 Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor	16
1.5 Krümmung einer Kurve	21
1.6 Ein Anwendungsbeispiel: Zerlegung von Geschwindigkeit und Beschleunigung in Tangential- und Normalkomponenten	27
2 Flächen im Raum	31
2.1 Vektorielle Darstellung einer Fläche	31
2.2 Flächenkurven	35
2.3 Tangentialebene, Flächennormale, Flächenelement	37
2.4 Flächen vom Typ $z = f(x, y)$	43
3 Skalar- und Vektorfelder	47
3.1 Ein einführendes Beispiel	47
3.2 Skalarfelder	50
3.3 Vektorfelder	52
3.4 Spezielle Vektorfelder aus Physik und Technik	55
3.4.1 Homogenes Vektorfeld	55
3.4.2 Kugel- oder radialsymmetrisches Vektorfeld (Zentralfeld)	56
3.4.3 Zylinder- oder axialsymmetrisches Vektorfeld	58
3.4.4 Zusammenstellung der behandelten Vektorfelder	59
4 Gradient eines Skalarfeldes	60
4.1 Definition und Eigenschaften des Gradienten	60
4.2 Richtungsableitung	64
4.3 Flächen vom Typ $F(x, y, z) = 0$	66
4.4 Ein Anwendungsbeispiel: Elektrisches Feld einer Punktladung	68
5 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes	70
5.1 Divergenz eines Vektorfeldes	70
5.1.1 Ein einführendes Beispiel	70
5.1.2 Definition und Eigenschaften der Divergenz	74
5.1.3 Ein Anwendungsbeispiel: Elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders	77

5.2 Rotation eines Vektorfeldes	79
5.2.1 Definition und Eigenschaften der Rotation	79
5.2.2 Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsfeld einer rotierenden Scheibe	83
5.3 Spezielle Vektorfelder	85
5.3.1 Quellenfreies Vektorfeld	85
5.3.2 Wirbelfreies Vektorfeld	87
5.3.3 Laplace- und Poisson-Gleichung	89
5.3.4 Ein Anwendungsbeispiel: Potentialgleichung des elektrischen Feldes ..	93
6 Spezielle ebene und räumliche Koordinatensysteme	94
6.1 Polarkoordinaten	94
6.1.1 Definition und Eigenschaften der Polarkoordinaten	94
6.1.2 Darstellung eines Vektors in Polarkoordinaten	95
6.1.3 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Polarkoordinaten	101
6.1.4 Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsvektor bei einer gleichförmigen Kreisbewegung	105
6.2 Zylinderkoordinaten	107
6.2.1 Definition und Eigenschaften der Zylinderkoordinaten	107
6.2.2 Darstellung eines Vektors in Zylinderkoordinaten	111
6.2.3 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten	116
6.2.4 Zylindersymmetrische Vektorfelder	119
6.2.5 Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsvektor eines Massen- punktes in Zylinderkoordinaten	121
6.3 Kugelkoordinaten	124
6.3.1 Definition und Eigenschaften der Kugelkoordinaten	124
6.3.2 Darstellung eines Vektors in Kugelkoordinaten	129
6.3.3 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Kugelkoordinaten	135
6.3.4 Kugel- oder radialsymmetrische Vektorfelder (Zentralfelder)	137
6.3.5 Ein Anwendungsbeispiel: Potential und elektrische Feldstärke in der Umgebung einer homogen geladenen Kugel	140
7 Linien- oder Kurvenintegrale	143
7.1 Ein einführendes Beispiel	143
7.2 Definition eines Linien- oder Kurvenintegrals	146
7.3 Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals	148
7.4 Wegunabhängigkeit eines Linien- oder Kurvenintegrals. Konservative Vektorfelder	152
7.5 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik	163
7.5.1 Kugel- oder radialsymmetrische Vektorfelder (Zentralfelder)	163
7.5.2 Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters	164
7.5.3 Elektrisches Feld in der Umgebung eines homogen geladenen Drahtes ..	165
7.6 Arbeitsintegral	167
7.6.1 Arbeit eines Kraftfeldes	167
7.6.2 Ein Anwendungsbeispiel: Elektronen im Magnetfeld	168

8 Oberflächenintegrale	170
8.1 Ein einführendes Beispiel	170
8.2 Definition eines Oberflächenintegrals	175
8.3 Berechnung eines Oberflächenintegrals	177
8.3.1 Oberflächenintegral in speziellen (symmetriegerechten) Koordinaten	178
8.3.2 Oberflächenintegral in Flächenparametern	190
8.4 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik	195
8.4.1 Fluss eines homogenen Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Würfels	195
8.4.2 Fluss eines zylinder- oder axialsymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Zylinders	199
8.4.3 Fluss eines kugel- oder radialsymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche einer Kugel	202
9 Integralsätze von Gauß und Stokes	205
9.1 Gaußscher Integralsatz	205
9.1.1 Ein einführendes Beispiel	205
9.1.2 Gaußscher Integralsatz im Raum	207
9.1.3 Gaußscher Integralsatz in der Ebene	211
9.2 Stokesscher Integralsatz	214
9.3 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik	222
9.3.1 Elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders	222
9.3.2 Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters	227
Übungsaufgaben	230
Zu Abschnitt 1	230
Zu Abschnitt 2	232
Zu Abschnitt 3	234
Zu Abschnitt 4	236
Zu Abschnitt 5	237
Zu Abschnitt 6	239
Zu Abschnitt 7	242
Zu Abschnitt 8	245
Zu Abschnitt 9	248
 II Wahrscheinlichkeitsrechnung	 251
1 Hilfsmittel aus der Kombinatorik	251
1.1 Urnenmodell	251
1.2 Permutationen	252
1.3 Kombinationen	255
1.4 Variationen	260
1.5 Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Formeln	264
2 Grundbegriffe	264
2.1 Einführende Beispiele	264
2.2 Zufallsexperimente	268

2.3	Elementarereignisse und Ergebnismenge eines Zufallsexperiments	269
2.4	Ereignisse und Ereignisraum	270
2.5	Verknüpfungen von Ereignissen	273
3	Wahrscheinlichkeit	276
3.1	Laplace-Experimente	276
3.2	Wahrscheinlichkeitsaxiome	281
3.2.1	Eigenschaften der relativen Häufigkeiten	281
3.2.2	Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff	284
3.2.3	Festlegung unbekannter Wahrscheinlichkeiten in der Praxis („statistische“ Definition der Wahrscheinlichkeit)	286
3.2.4	Wahrscheinlichkeitsraum	287
3.3	Additionssatz für beliebige Ereignisse	290
3.4	Bedingte Wahrscheinlichkeit	292
3.5	Multiplikationssatz	295
3.6	Stochastisch unabhängige Ereignisse	299
3.7	Ereignisbäume	302
3.8	Totale Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und Bayessche Formel	308
4	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen	315
4.1	Zufallsvariable oder Zufallsgrößen	315
4.1.1	Einführende Beispiele	315
4.1.2	Definition einer Zufallsvariablen	317
4.2	Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen	318
4.3	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen (diskrete Verteilung)	319
4.4	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Zufallsvariablen (stetige Verteilung)	327
5	Kennwerte oder Maßzahlen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung	335
5.1	Erwartungswert einer Zufallsvariablen	336
5.1.1	Ein einführendes Beispiel	336
5.1.2	Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen	336
5.1.3	Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen	337
5.2	Erwartungswert einer Funktion	339
5.3	Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer diskreten Zufalls- variablen	340
5.4	Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer stetigen Zufalls- variablen	344
5.5	Mittelwert und Varianz einer linearen Funktion	348
6	Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen	350
6.1	Binomialverteilung	350
6.2	Hypergeometrische Verteilung	361
6.3	Poisson-Verteilung	367

6.4	Gaußsche Normalverteilung	371
6.4.1	Allgemeine Normalverteilung	371
6.4.2	Standardnormalverteilung	374
6.4.3	Erläuterungen zur tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	376
6.4.4	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	378
6.4.5	Quantile der Standardnormalverteilung	388
6.5	Exponentialverteilung	390
6.6	Zusammenhang zwischen der Binomialverteilung und der Gaußschen Normalverteilung	393
6.7	Approximation einer diskreten Verteilung durch eine andere Verteilung, insbesondere durch die Normalverteilung	401
7	Wahrscheinlichkeitsverteilungen von mehreren Zufallsvariablen	403
7.1	Ein einführendes Beispiel	403
7.2	Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen	406
7.2.1	Verteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen	406
7.2.2	Diskrete zweidimensionale Verteilung	408
7.2.3	Stetige zweidimensionale Verteilung	411
7.3	Stochastisch unabhängige Zufallsvariable	417
7.4	Funktionen von mehreren Zufallsvariablen	423
7.5	Summen und Produkte von Zufallsvariablen	425
7.5.1	Additionssatz für Mittelwerte	425
7.5.2	Multiplikationssatz für Mittelwerte	427
7.5.3	Additionssatz für Varianzen	430
7.5.4	Eigenschaften einer Summe von stochastisch unabhängigen und normalverteilten Zufallsvariablen	433
7.6	Über die große Bedeutung der Gaußschen Normalverteilung in den Anwendungen	436
7.6.1	Zentraler Grenzwertsatz	436
7.6.2	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe von Zufallsvariablen	438
7.6.3	Grenzwertsatz von Moivre-Laplace	440
8	Prüf- oder Testverteilungen	441
8.1	Chi-Quadrat-Verteilung	441
8.2	t -Verteilung von Student	446
Übungsaufgaben		451
Zu Abschnitt 1		451
Zu Abschnitt 2		453
Zu Abschnitt 3		454
Zu Abschnitt 4		457
Zu Abschnitt 5		459
Zu Abschnitt 6		462
Zu Abschnitt 7		467

III Grundlagen der mathematischen Statistik	471
1 Grundbegriffe	471
1.1 Ein einführendes Beispiel	471
1.2 Zufallsstichproben aus einer Grundgesamtheit	472
1.3 Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe	474
1.3.1 Häufigkeitsfunktion einer Stichprobe	474
1.3.2 Verteilungsfunktion einer Stichprobe	477
1.3.3 Gruppierung der Stichprobenwerte bei umfangreichen Stichproben (Einteilung in Klassen)	479
2 Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe	485
2.1 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer Stichprobe	486
2.2 Spezielle Berechnungsformeln für die Kennwerte einer Stichprobe	489
2.2.1 Berechnung der Kennwerte unter Verwendung der Häufigkeits- funktion	489
2.2.2 Berechnung der Kennwerte einer gruppierten Stichprobe	491
3 Statistische Schätzmethoden für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parameterschätzungen“)	493
3.1 Aufgaben der Parameterschätzung	493
3.2 Schätzfunktionen und Schätzwerte für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Punktschätzungen“)	494
3.2.1 Ein einführendes Beispiel	495
3.2.2 Schätz- und Stichprobenfunktionen	495
3.2.3 Schätzungen für den Mittelwert μ	498
3.2.4 Schätzungen für die Varianz σ^2	499
3.2.5 Schätzungen für einen Anteilswert p (Parameter p einer Binomial- verteilung)	500
3.2.6 Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Schätzfunktionen und ihrer Schätzwerte	500
3.3 Ein Verfahren zur Gewinnung von Schätzfunktionen	503
3.3.1 Maximum-Likelihood-Methode	504
3.3.2 Anwendungen auf spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen	506
3.3.2.1 Binomialverteilung	506
3.3.2.2 Poisson-Verteilung	508
3.3.2.3 Gaußsche Normalverteilung	511
3.4 Vertrauens- oder Konfidenzintervalle für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Intervallschätzungen“)	514
3.4.1 Vertrauens- oder Konfidenzintervalle und statistische Sicherheit	514
3.4.2 Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert μ einer Normal- verteilung bei bekannter Varianz σ^2	518
3.4.3 Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert μ einer Normal- verteilung bei unbekannter Varianz σ^2	525
3.4.4 Vertrauensintervalle für die unbekannte Varianz σ^2 einer Normal- verteilung	530

3.4.5 Vertrauensintervalle für einen unbekannten Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung).....	534
3.4.6 Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert μ einer beliebigen Verteilung	539
4 Statistische Prüfverfahren für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parametertests“)	540
4.1 Ein einführendes Beispiel	540
4.2 Statistische Hypothesen und Parametertests	544
4.3 Planung und Durchführung eines Parametertests	545
4.4 Mögliche Fehlerquellen bei einem Parametertest	550
4.5 Spezielle Parametertests	555
4.5.1 Tests für den unbekannten Mittelwert μ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz σ^2	555
4.5.2 Tests für den unbekannten Mittelwert μ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz σ^2	564
4.5.3 Tests für die Gleichheit der unbekannten Mittelwerte μ_1 und μ_2 zweier Normalverteilungen (Differenzentests)	569
4.5.3.1 Abhängige und unabhängige Stichproben	569
4.5.3.2 Differenzentests bei abhängigen Stichproben	571
4.5.3.3 Differenzentests bei unabhängigen Stichproben	576
4.5.4 Tests für die unbekannte Varianz σ^2 einer Normalverteilung	588
4.5.5 Tests für einen unbekannten Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung).....	593
4.6 Ein Anwendungsbeispiel: Statistische Qualitätskontrolle unter Verwendung von Kontrollkarten	599
5 Statistische Prüfverfahren für die unbekannte Verteilungsfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Anpassungs- oder Verteilungstests“)	604
5.1 Aufgaben eines Anpassungs- oder Verteilungstests	604
5.2 Ein einführendes Beispiel	605
5.3 Chi-Quadrat-Test („ χ^2 -Test“)	607
6 Korrelation und Regression	620
6.1 Korrelation	620
6.1.1 Korrelationskoeffizient einer zweidimensionalen Stichprobe	620
6.1.2 Korrelationskoeffizient einer zweidimensionalen Grundgesamtheit ...	630
6.2 Regression	633
Übungsaufgaben	639
Zu Abschnitt 1	639
Zu Abschnitt 2	641
Zu Abschnitt 3	642
Zu Abschnitt 4	644
Zu Abschnitt 5	647
Zu Abschnitt 6	648

IV Fehler- und Ausgleichsrechnung	650
1 „Fehlerarten“ (systematische und zufällige Messabweichungen).	
Aufgaben der Fehler- und Ausgleichsrechnung	650
2 Statistische Verteilung der Messwerte und Messabweichungen („Messfehler“)	654
2.1 Häufigkeitsverteilungen	654
2.2 Normalverteilte Messgrößen	656
3 Auswertung einer Messreihe	662
3.1 Mittelwert und Standardabweichung	662
3.2 Vertrauensbereich für den Mittelwert μ , Messunsicherheit, Messergebnis	670
4 „Fehlerfortpflanzung“ nach Gauß	679
4.1 Ein einführendes Beispiel	679
4.2 Mittelwert einer „indirekten“ Messgröße	680
4.3 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz (Varianzfortpflanzungsgesetz)	683
4.4 Messergebnis für eine „indirekte“ Messgröße	687
5 Ausgleichs- oder Regressionskurven	694
5.1 Ein einführendes Beispiel	694
5.2 Ausgleichung nach der „Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate“	696
5.3 Ausgleichs- oder Regressionsgerade	701
5.3.1 Bestimmung der Parameter einer Ausgleichsgeraden	701
5.3.2 Streuungsmaße und Unsicherheiten bei der Parameterbestimmung	709
5.4 Ausgleichs- oder Regressionsparabel	715
5.5 Nichtlineare Ausgleichsprobleme, die auf die lineare Regression zurückführbar sind	719
Übungsaufgaben	730
Zu Abschnitt 3	730
Zu Abschnitt 4	732
Zu Abschnitt 5	734

Anhang	739
Teil A: Tabellen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik	740
Tabelle 1: Verteilungsfunktion $\phi(u)$ der Standardnormalverteilung	740
Tabelle 2: Quantile der Standardnormalverteilung	742
Tabelle 3: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung	744
Tabelle 4: Quantile der t -Verteilung von „Student“	746
Teil B: Lösungen der Übungsaufgaben	749
I Vektoranalysis	750
Abschnitt 1	750
Abschnitt 2	753
Abschnitt 3	757
Abschnitt 4	760
Abschnitt 5	763
Abschnitt 6	769
Abschnitt 7	777
Abschnitt 8	783
Abschnitt 9	790
II Wahrscheinlichkeitsrechnung	796
Abschnitt 1	796
Abschnitt 2	797
Abschnitt 3	798
Abschnitt 4	801
Abschnitt 5	804
Abschnitt 6	808
Abschnitt 7	814
III Grundlagen der mathematischen Statistik	819
Abschnitt 1	819
Abschnitt 2	824
Abschnitt 3	826
Abschnitt 4	829
Abschnitt 5	836
Abschnitt 6	840
IV Fehler- und Ausgleichsrechnung	844
Abschnitt 3	844
Abschnitt 4	847
Abschnitt 5	851
Literaturhinweise	859
Sachwortverzeichnis	860

Inhaltsübersicht Band 1

Kapitel I: Allgemeine Grundlagen

- 1 Einige grundlegende Begriffe über Mengen
- 2 Die Menge der reellen Zahlen
- 3 Gleichungen
- 4 Ungleichungen
- 5 Lineare Gleichungssysteme
- 6 Der Binomische Lehrsatz

Kapitel II: Vektoralgebra

- 1 Grundbegriffe
- 2 Vektorrechnung in der Ebene
- 3 Vektorrechnung im 3-dimensionalen Raum
- 4 Anwendungen in der Geometrie

Kapitel III: Funktionen und Kurven

- 1 Definition und Darstellung einer Funktion
- 2 Allgemeine Funktionseigenschaften
- 3 Koordinatentransformationen
- 4 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion
- 5 Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)
- 6 Gebrochenrationale Funktionen
- 7 Potenz- und Wurzelfunktionen
- 8 Kegelschnitte
- 9 Trigonometrische Funktionen
- 10 Arkusfunktionen
- 11 Exponentialfunktionen
- 12 Logarithmusfunktionen
- 13 Hyperbel- und Areafunktionen

Kapitel IV: Differentialrechnung

- 1 Differenzierbarkeit einer Funktion
- 2 Ableitungsregeln
- 3 Anwendungen der Differentialrechnung

Kapitel V: Integralrechnung

- 1 Integration als Umkehrung der Differentiation
- 2 Das bestimmte Integral als Flächeninhalt
- 3 Unbestimmtes Integral und Flächenfunktion
- 4 Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung
- 5 Grund- oder Stammintegrale
- 6 Berechnung bestimmter Integrale unter Verwendung einer Stammfunktion
- 7 Elementare Integrationsregeln
- 8 Integrationsmethoden
- 9 Uneigentliche Integrale
- 10 Anwendungen der Integralrechnung

Kapitel VI: Potenzreihenentwicklungen

- 1 Unendliche Reihen
- 2 Potenzreihen
- 3 Taylor-Reihen

Kapitel VII: Komplexe Zahlen und Funktionen

- 1 Definition und Darstellung einer komplexen Zahl
- 2 Komplexe Rechnung
- 3 Anwendungen der komplexen Rechnung
- 4 Ortskurven

Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben

Inhaltsübersicht Band 2

Kapitel I: Lineare Algebra

- 1 Vektoren
- 2 Reelle Matrizen
- 3 Determinanten
- 4 Ergänzungen
- 5 Lineare Gleichungssysteme
- 6 Komplexe Matrizen
- 7 Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix

Kapitel II: Fourier-Reihen

- 1 Fourier-Reihe einer periodischen Funktion
- 2 Anwendungen

Kapitel III: Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

- 1 Funktionen von mehreren Variablen
- 2 Partielle Differentiation
- 3 Mehrfachintegrale

Kapitel IV: Gewöhnliche Differentialgleichungen

- 1 Grundbegriffe
- 2 Differentialgleichungen 1. Ordnung
- 3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
- 4 Anwendungen in der Schwingungslehre
- 5 Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten
- 6 Numerische Integration einer Differentialgleichung
- 7 Systeme linearer Differentialgleichungen

Kapitel V: Fourier-Transformationen

- 1 Grundbegriffe
- 2 Spezielle Fourier-Transformationen
- 3 Wichtige „Hilfsfunktionen“ in den Anwendungen
- 4 Eigenschaften der Fourier-Transformation (Transformationssätze)
- 5 Rücktransformation aus dem Bildbereich in den Originalbereich
- 6 Anwendungen der Fourier-Transformation

Kapitel VI: Laplace-Transformationen

- 1 Grundbegriffe
- 2 Eigenschaften der Laplace-Transformation (Transformationssätze)
- 3 Laplace-Transformierte einer periodischen Funktion
- 4 Rücktransformation aus dem Bildbereich in den Originalbereich
- 5 Anwendungen der Laplace-Transformation

Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben