

1

So kam der Mensch auf die Zahl

Bald nachdem der Mensch zu sprechen begonnen und diese Sprache zum Kommunizieren ebenso wie zum Denken zu nutzen gelernt hatte, dürfte er auch seine zehn Finger und andere Gegenstände zum Abzählen verwendet haben. Sehr rasch musste er die Tiere eines Rudels, insbesondere die gefährlichen, die Tage einer Mondphase und die Mondphasen eines Jahres abzählen. Die Jagd musste durch Absprechen geplant werden, andernfalls hätten die Jäger keine Chance gehabt.

Die Himmelsbeobachtung – vorwissenschaftliche astronomische Praxis – erlaubte die verlässlichsten Voraussagen für kommende Jahreszeiten. Regenzeit, Jungtierzeit, Erntezeit und Frostzeiten ließen sich an den Gestirnen ablesen. In Ägypten kündete das Auftauchen des Sirius in der Morgendämmerung den Beginn der jährlichen Nil-Überschwemmungen an. Diese Beobachtungen mussten unterrichtet werden, weil ihre Perioden vielfach die Lebensspanne eines Einzelnen überstiegen. Im Gegensatz zu Jagdfertigkeiten, die man sich durch praktischen Unterricht aneignen konnte, waren diese Erfahrungen vom Hörensagen der Beginn des theoretischen Unterrichts.

Bald begann der Mensch auch, die Resultate der Zählung zu notieren. Die ältesten Zählzeichen, die wir seit der Altsteinzeit kennen, sind Kerben auf Tierknochen aus der Zeit vor 35 000 Jahren oder Striche I, II, III, IIII, IIIII, ... auf Felswänden. Diese Zählzeichen sind bis heute in Gebrauch, z. B. auf Bierdeckeln, wie man sich in deutschen Bierkneipen und auf dem Münchner Oktoberfest überzeugen kann.

Die Römer haben elegante Abkürzungen eingeführt wie V, X, L und C für 5, 10, 50 und 100 Striche. Die Notation war additiv in absteigender Reihenfolge, größere vor kleineren Zeichen. So steht CCXXVIII für 228. Positionsschreibweisen waren einzig die Konventionen, kleinere Zeichen vor größeren abzuziehen. So steht IV statt IIII für vier, IX statt VIIII für neun, XCVII statt LXXXVII für 97. Das war übersichtlicher, ließ sich leichter in Marmor meißeln und hat über zwei Jahrtausende die Schüler verwirrt. Die römische Ziffer V können wir auf eine gespreizte Hand zurückführen, die Ziffer X auf zwei gekreuzte gespreizte Hände. Die Redewendung, jemand ein X für ein U vorzumachen, bedeutet, jemand eine Zehn für eine Fünf vorzumachen: Im Mittelalter wurde das V handschriftlich meist als U geschrieben.

Damit ist das römische Zahlensystem immer noch sehr steinzeitlich. Die Ägypter, Babylonier und die Griechen hatten sehr viel ausgefeiltere Zahlensysteme, die eine sehr viel effizientere Mathematik hervorgebracht haben.

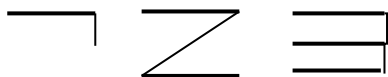


Abb. 1.1 Ziffern und Zählzeichen
(Thomas Barth 2015).

Unser heutiges Zahlensystem, das Dezimalsystem in Positionsschreibweise stammt aus Indien, war den arabischen Mathematikern in Bagdad seit der zweiten Hälfte des 8. Jahrhunderts bekannt und kam im 12. Jahrhundert über den arabischen Kulturraum, über Toledo in Spanien und Palermo in Sizilien nach Europa. Das erste abendländische Rechenbuch darüber wurde 1202 von Leonardo da Pisa (ca. 1170–1240), genannt Leonardo Fibonacci, verfasst. Fibonacci ist den Börsianern bis heute aus der Chartanalyse bekannt.

Die bei uns gebräuchlichen Ziffern, die wir deshalb *arabische Ziffern* nennen, enthalten noch immer etwas von den Zählzeichen der Steinzeit, vgl. Abb. 1.1, wie der Autor 1973 in einer Vorlesung bei Paul Lorenzen (1915–1994) gelernt hat. Solche Ziffern, die *Brahmi-Ziffern*, wurden in Indien seit dem 3. Jahrhundert v. Chr. geschrieben, wie man dem Buch von Georges Ifrah, *Universalgeschichte der Zahlen*, Ifrah [5], Kap. 31 entnehmen kann. Sie bilden den Ursprung der modernen indischen, arabischen und europäischen Ziffern.

1.1 Was sind Zahlen?

Wir lernen heute bereits als Kinder einen abstrakten Zahlbegriff, der aber nicht angeboren, sondern eine Kulturleistung ist. Das zeigt die Untersuchung von Kulturen, die sich ohne Kontakt zu der unseren entwickelt haben. Die folgenden Ausführungen stammen aus dem Buch von Keith Devlin, *Muster der Mathematik*, Devlin [3]:

„Ethnologen haben in Sri Lanka den Volksstamm der Vedda erforscht. Dort zählen Frauen die gerade geernteten Kokosnüsse auf folgende Weise. Sie sammeln Stöckchen und legen für jede Kokosnuss ein Stöckchen auf einen besonderen Haufen, dazu sagen sie: ‚Das ist eines‘. Wenn man sie fragt, wie viele Kokosnüsse sie haben, so zeigen sie auf den Stöckchenhaufen und sagen: ‚So viele‘.

Die Vedda haben also eine Art Zählsystem, aber sie kennen keine Zahlwörter oder Zahlen außer ‚eines‘. Sie ‚zählen‘ mit Stöckchen wie die Menschen der Steinzeit mit Kerben auf Knochen oder mit Strichen auf Felswänden. Dabei werden Zählgegenstände einer besonderen Art, eben die Stöckchen, den zu zählenden Gegenständen eins zu eins zugeordnet. Die Formel ‚Das ist eines‘ klingt eher wie ein Zuordnungsritual als wie eine Zählung.“

Ähnliche Zählsysteme mit Eins-zu-eins-Zuordnung von Zählgegenständen findet man immer wieder in Kulturen, die keine Schrift entwickelt haben. Kieselsteine und Muschelschalen, Kakaobohnen, Mais-, Reis- und Weizenkörner dienen dabei als Zählgegenstände. Diese enthalten aber keinen Hinweis darauf, was gezählt wurde.

Die Archäologie hat in den letzten 20 Jahren ganz erstaunliche Entdeckungen gemacht, so eine Reihe von Steinkreisanlagen in Göbekli Tepe in der Südosttürkei, nahe der syrischen Grenze, im Norden Mesopotamiens. *Mesopotamien* ist der griechische Name für das fruchtbare Zweistromland zwischen den beiden Flüssen Euphrat und Tigris im heutigen Irak und der Südosttürkei. Die Steinkreise in Göbekli Tepe stammen aus der Jungsteinzeit, aus dem zehnten Jahrtausend v. Chr. Sie bestehen aus mehreren hochgemauerten tempelartigen Anlagen mit T-förmigen Steinpfeilern von bis zu 7 m Höhe und 50 t Gewicht. Die Pfeiler sind zum Teil mit ausdrucksvollen Tierreliefs verziert, manchmal ähnlich denen in romanischen Kirchen.

Es handelt sich wohl um ein steinzeitliches Heiligtum und einen Ort für Treffen und Zeremonien. Es sind die ältesten bisher bekannten Heiligtümer der Menschheit. Eine Siedlung gab es damals dort nicht. Der *Homo sapiens* war zu der Zeit noch Jäger und Sammler und nicht sesshaft. Der deutsche Prähistorische Archäologe Klaus Schmidt (1953–2014) hatte seit 1995 die Ausgrabung dieses rätselhaften Kultzentrums geleitet. Er erzählt die Geschichte seiner Entdeckung in seinem Buch Klaus Schmidt, *Sie bauten die ersten Tempel*, Schmidt [12].

Etwas weiter westlich, in Çatal Höyük im türkischen Südanatolien wird seit ca. 1995 eine Siedlung mit erstaunlich rechteckig gebauten Häusern aus quaderförmigen Lehmziegeln ausgegraben, die wohl bis zu 2500 Menschen Unterkunft bot und aus der Zeit um 7500 v. Chr. stammt. Jetzt hatte der *Homo sapiens* den Weg zum Ackerbauern und Viehzüchter gefunden und sich niedergelassen. Er besaß Feuerstellen im Haus und hatte gelernt, Getreide oder Gemüse in Tongeschirr auf dem Feuer zu kochen oder auf heißen Steinen zu backen. Die Architektur der Siedlung gibt keine Hinweise auf das Vorhandensein einer Herrschaftsstruktur. Die Häuser sind alle gleich.

Man nennt das die neolithische Revolution. Sie begann im *fruchtbaren Halbmond* nördlich der syrischen Wüste, dem Gebiet vom heutigen Syrien über Mesopotamien in der Südosttürkei und im Irak bis hin zum Zagrosgebirge im Westiran, auch *Belt* genannt. Dort steht die Wiege unserer heutigen Kultur.

Der Belt dehnte sich rasch aus nach Ägypten und nach Nordindien und China, von da über den Pazifik nach Mittelamerika. In all diesen Ländern entwickelte sich eine hochstehende Mathematik und ein ausgefeilter, astronomisch fundierter Kalender. Im Lauf der Zeit erfasste die neolithische Revolution auch Europa und den Rest der Welt. Das Zahlensystem der Inder und Chinesen, ein Dezimalsystem mit einem Kringel bzw. Punkt oder Lücke für die Null, und das der Mayas, ein 20er-Positionssystem mit null, blieben dem europäischen bis ins 17. Jahrhundert weit überlegen.

Auch die Zahlensysteme des östlichen Mittelmeerraums, der Ägypter und der Babylonier waren dem römischen weit überlegen, wurden aber durch die Standardisierung des römischen Reichs in Europa auf das Niveau des römischen Zahlensystems mit seiner Nähe zu den steinzeitlichen Strichsystemen zurückgesetzt.

Bei vielen Ausgrabungen im Nahen Osten wurden neben den üblichen Tongefäßen, Backsteinen, Figürchen und ähnlichen Funden auch Ansammlungen kleiner handgemachter Tonformen mit 1–3 cm Durchmesser gefunden: Kugeln, Scheiben, Kegel, Tetraeder, Ovale, Zylinder, Dreiecke, Rechtecke usw. Die frühesten solcher

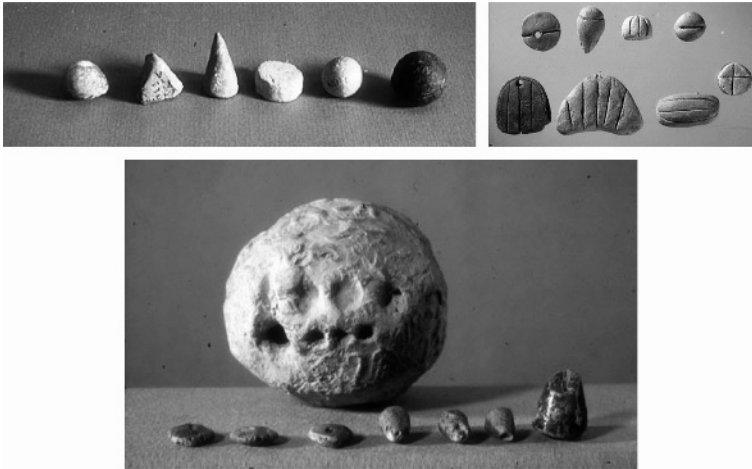


Abb. 1.2 Ältere und neuere Token mit Urne (Mit freundlicher Genehmigung von Denise Schmandt-Besserat, Penn Museum, Philadelphia, PA, USA, und Musée du Louvre, Paris).

Objekte stammen aus der Zeit um etwa 8000 v. Chr., als sich die Landwirtschaft zu entwickeln begann.

Die Anthropologin Denise Schmandt-Besserat von der University of Texas in Austin hat diese Tonformen detailliert studiert und kam zu dem Ergebnis, dass es sich um Symbole für Bestände in der Landwirtschaft handelt. Sie nannte sie Token. So standen Zylinder für Tiere, Kegel- und Kugelformen für zwei verschiedene Kornmaße, eine kreisrunde Scheibe für eine Herde. Mit ihrer Hilfe konnte man Bestände nach ihrer Art erfassen, z. B. wenn sie bei einem Tempel in Verwahrung gegeben wurden, und wohl auch tauschen. Um 6000 v. Chr. hatte sich der Gebrauch dieser Tonartefakte über das ganze Gebiet verbreitet. Die Formen blieben unverändert in Gebrauch bis ca. 3000 v. Chr.

Um 3500 v. Chr. haben die Sumerer im südlichen Mesopotamien rund um die Städte Ur, Uruk, genannt die Schafhürde, und Lagash die erste menschliche Hochkultur entwickelt. Ur war damals noch Hafenstadt am Persischen Golf. In ihrer hoch entwickelten städtischen Gesellschaft kamen gegen 3300 v. Chr. neue, kompliziertere und stärker ausgearbeitete Token hinzu für handwerkliche Produkte, so etwa für ein bestimmtes Gewand, einen Laib Brot oder einen Metallgegenstand. Aber auch kreisrunde Formen mit einem Kreuz für ein Schaf, Formen für ein Maß eines bestimmten Öls, für ein Maß Honig ließen sich identifizieren. Einige davon hatten Löcher und ließen sich auf einen Faden auffädeln. Die alten Token blieben weiter in Gebrauch für landwirtschaftliche Produkte.

Die älteren Token in Abb. 1.2 stammen aus Tepe Gawra ca. 4000 v. Chr., die neueren mit den Löchern aus Tello, dem alten Girsu, ca. 3300 v. Chr., beide im heutigen Irak, die Urne aus Susa ca. 3300 v. Chr. im Iran. Wir danken D. Schmandt-Besserat und dem Penn Museum Philadelphia für die Abdruckgenehmigung der Token aus Tepe Gawra, D. Schmandt-Besserat und dem Musée du Louvre für die Abdruckgenehmigung der Token aus Tello und der Urne aus Susa.

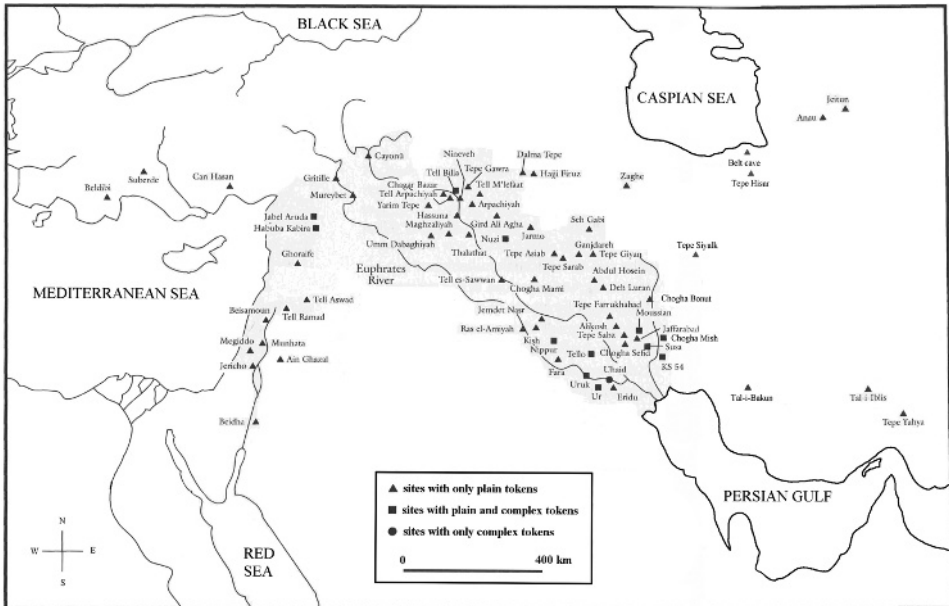


Abb. 1.3 Der Belt: Fundorte der Token (Mit freundlicher Genehmigung von Denise Schmandt-Besserat).

In der Zeit von 3300 bis 3250 v. Chr. kam die Aufbewahrung der alten landwirtschaftlichen Token in kleinen versiegelten Urnen aus Ton in Gebrauch, die wohl für Verträge benutzt wurden. Da man das Siegel aufbrechen musste, um den Inhalt zu überprüfen, entwickelte sich die Gewohnheit, den Inhalt außen auf der noch feuchten Wand des Tongefäßes zu verzeichnen, ehe dieses verschlossen wurde. Parallel dazu wurden die neueren Formen auf Fäden in Tonrahmen gespannt, die Mengen auf dem Rahmen notiert.

Wir können uns vorstellen, dass man bei einem Tauschgeschäft die Urne bzw. den Rahmen erwarb und dann bei dem Tempel, der die Tonformen emittiert und dem Handelspartner als Gutschrift gegeben hatte, bzw. bei dem Handwerksbetrieb die entsprechende Menge an Schafen, Öl, Korn oder anderen Gegenständen damit einfordern konnte.

Mit den tönernen Urnen wurde eine Menge von landwirtschaftlichen Produkten gleich zweimal gezählt: einmal mit den Tonformen im Inneren, dann mit der Beschriftung auf der Außenseite. Es dauerte mehrere Jahrhunderte, bis man ab ca. 3000 v. Chr. auf die Tonartefakte im Inneren der Urnen verzichtete und nur noch die Schriftzeichen auf Tonklumpen benutzte. Vielleicht ging dieser Prozess mit den Rahmen in den Städten schneller als mit den Urnen auf dem Land, wo die landwirtschaftlichen Produkte herkamen.

Die Fundorte der Token beschreiben den fruchtbaren Halbmond, den Belt (vgl. Abb. 1.3).

Im Verlauf dieser Entwicklung entstand ab ca. 3300 v. Chr. die sumerische Keilschrift, zunächst als Anreicherung der Zählformen durch Piktogramme, die zusätz-

liche Informationen weitergaben. Ähnlich wie in der chinesischen Schrift wurden Paare von Piktogrammen benutzt, um weitere Bedeutungen auszudrücken, etwa „Auge“ und „Wasser“ für „Weinen“ oder „Kopf“ und „Essschale“ für „Essen“ oder „Frau“ und „Schmuck“ für „Fürstin“ oder auch „Frau“ und „Gebirge“ für Sklavinnen. Die Sumerer raubten ihre Sklavinnen wohl bei den benachbarten Bergvölkern. Die Keile und die Piktogramme wurden ab ca. 2700 v. Chr. mit dem Schreibgriffel in flache Täfelchen aus feuchtem Ton gedrückt, die anschließend getrocknet oder gebrannt wurden.

Aus der *Kunst des Zählens* mit Token, die als Form der Buchhaltung für landwirtschaftliche Produkte erfunden worden war, entwickelte sich also die *Kunst des Schreibens*. Damit konnte erstmals in der Menschheitsgeschichte das gesprochene Wort festgehalten und überliefert werden, auch Geschichten konnten jetzt in Schriftform erzählt werden. Aus den Anfängen der Buchhaltung heraus hat die Schrift eine atemberaubende Entwicklung hin zum Träger von Kultur durchlaufen – von Religionen, Künsten und Wissenschaften, um die Worte von Albert Einstein aufzugreifen.

Denise Schmandt-Besserat beschreibt diese Entwicklung in ihrem spannenden populärwissenschaftlichen Buch *How writing came about*, Schmandt-Besserat [10], von dem sie mit *The history of counting* (Morrow 1999) für ihre Enkelkinder auch eine Version für Jugendliche verfasst hat. Es gibt auch einen kurzen Artikel auf Deutsch, Schmandt-Besserat [9]. Vom American Scientist wurde *How writing came about* als eines der 100 Wissenschaftsbücher benannt, die das 20. Jahrhundert geprägt haben. Die Auswirkungen auf die Kunst beschreibt sie in ihrem Buch *When writing met art: From symbol to story*, Schmandt-Besserat [11].

Eine Beschreibung der Urnen und ihrer Bedeutung für die Zahlen findet sich auch bei Georges Ifrah, *Universalgeschichte der Zahlen*, Ifrah [5], Kap. 10.

Erst viel später entstand daraus eine Lautschrift von der Art, die wir noch heute schreiben. Die sumerische Sprache wurde nur bis ca. 1800 v. Chr. als Umgangssprache benutzt. Babylon trat das Erbe der sumerischen Städte an. Aber als Sprache für Gelehrte und Priester wurde Sumerisch noch bis ca. 100 n. Chr. geschrieben. Die sumerische Sprache ist damit die erste Sprache, für die eine Schrift entwickelt wurde. Nur die ältesten ägyptischen Hieroglyphen, ebenfalls Piktogramme, die ab ca. 3200 v. Chr. verwendet wurden, sind ähnlich alt.

Ab ca. 2500 v. Chr. begann man, mit Stücken von Gold, Silber, Kupfer oder Bernstein zu bezahlen. Händler hatten immer eine kleine Goldwaage bei sich, mit der sie Nuggets abwägen konnten. Die Gewichte waren Sache des Einzelnen, wie er seinen Preis festlegen wollte, normierte Gewichte sind nicht überliefert. Der Weg vom direkten Tausch von Gütern über den Handel mit Token für Güter bis hin zum Handel mit einer Art von allgemeinen Tauschmitteln ist ein Weg steigender Abstraktion in den sozialen Prozessen einer Gesellschaft.

Irgendwann in der Zeit nach der Einführung der Schrift muss sich der Übergang von Zählensymbolen für bestimmte Produkte, ob nun als handgreifliche Tonartefakte oder als schriftliche Symbole, zu abstrakten Zahlen vollzogen haben. Ab ca. 2000 v. Chr. finden sich sowohl in Mesopotamien als auch in Ägypten mathematische Texte, etwa eine Anleitung zur Berechnung eines Pyramidenstumpfes, in denen abs-

trakte Zahlen verwendet werden. Der Anfang der Mathematik liegt in Babylonien und in Ägypten um diese Zeit. Die Zahlen hatten den Sprung von Handel und Verwaltung in die Baukunst geschafft. Heute nennen wir diese Zahlen *natürliche Zahlen*.

Der Schriftsteller Hans Magnus Enzensberger (* 1929) hatte 1998 auf dem *5th International Congress of Mathematicians* in Berlin von einer Zugbrücke außer Betrieb gesprochen, s. Hans Magnus Enzensberger, *Zugbrücke außer Betrieb*, Enzensberger [4]. Jetzt soll diese Zugbrücke probeweise etwas heruntergelassen werden, indem in einem ersten Schritt die natürlichen Zahlen durch Abstraktion aus Zählzeichen definiert werden in derselben Weise, wie in den Geisteswissenschaften abstrakte Begriffe definiert werden.

Aus unserer heutigen Kultur ist das Verfahren der Abstraktion nicht wegzudenken. Wir verwenden ständig abstrakte Begriffe in unserer Sprache. Betrachten wir zur Erläuterung den Begriff der *G7-Währung*. G7 bezeichnet die sieben derzeit führenden westlichen Industriestaaten Deutschland, Frankreich, Großbritannien, Italien, Japan, Kanada und die USA. Die Gruppe ihrer Währungen ist überschaubar. Es sind der Euro, das britische Pfund, der japanische Yen, der kanadische Dollar und der US-Dollar.

Sätze über G7-Währungen sind solche, die wahr bleiben, wenn man eine dieser Währungen durch eine von den anderen vier austauscht. So trifft der Satz „Die Banknoten einer G7-Währung tragen die Unterschrift des jeweiligen Zentralbankpräsidenten“ für alle fünf genannten Währungen zu. Dagegen gilt der Satz „Die Banknoten des US-Dollars verwenden eine spezielle grüne Farbe, weshalb der Dollar auch Greenback genannt wird“ nur für den US-Dollar. Es ist also kein Satz über G7-Währungen. Abstraktion bedeutet somit Einschränkung auf bestimmte, zugelassene Sätze. Wir reden *abstrakt* über G7-Währungen, wenn die Auswahl einer speziellen unter den fünf Währungen keine Rolle spielt.

Nach einem deutschen Sprichwort darf man Äpfel und Birnen nicht zusammenzählen. Wir können aber sehr wohl sagen:

$$3 \text{ Äpfel} + 2 \text{ Birnen} = 5 \text{ Stück Obst} .$$

Mit dem Oberbegriff *Stück Obst* dürfen wir natürlich addieren. Wir haben eine beiden gemeinsame abstraktere Kategorie gefunden, verlieren aber die konkrete Information, dass es sich um Äpfel und Birnen handelt, wenn wir nur noch über Stück Obst reden. Wenn es um den Nachtschrank geht, wissen wir mit drei Äpfeln und zwei Birnen mehr als mit der Ankündigung von fünf Stück Obst.

Ebenso reden wir *abstrakt* über *natürliche Zahlen*, wenn die spezielle Wahl der Zählzeichen keine Rolle mehr spielt. Wenn es egal ist, ob wir Striche, Schafe, Äpfel und Birnen oder mit Dual- oder Dezimalzahlen zählen. Wir reden über Zahlen, wenn wir *invariant* unter der Wahl der Zählzeichen sprechen. Wenn wir schreiben, etwa V oder 5, oder die Dualzahl 101 zur Darstellung der fünf benutzen, diese Wahl aber keine weitere Rolle spielt.

Stühle und Tische sind Möbel, auch hier eine beiden gemeinsame abstraktere Kategorie. Wenn von zwei Möbeln die Rede ist, müssen wir aus dem Kontext entnehmen, um welche Art von Möbeln es sich handelt. Auch die Begriffe Stühle und Ti-

sche sind abstrakte Kategorien, und wir lernen schon als Kinder, was als Stuhl und was als Tisch zu bezeichnen ist.

Der hier verwendete Begriff der *Abstraktion* in unserer normalen Sprache als Einschränkung der zugelassenen Sätze stammt von Paul Lorenzen, vgl. Wilhelm Kamlah und Paul Lorenzen, *Logische Propädeutik: Vorschule des vernünftigen Redens*, Kamlah und Lorenzen [6]. Die Suche nach dem Kontext ist auch ein Problem von Big Data und Künstlicher Intelligenz.

1.2 Vom Unendlichen

Wir bleiben noch etwas bei den Zählzeichen I, II, III, IIII, ... der Altsteinzeit, weil wir uns da noch einiges klarmachen können. Natürlich wissen wir jetzt, dass wir über Zahlen invariant unter der Wahl der Zählzeichen reden wollen. Es war schon immer klar, dass man, wenn man mit einem Strich I begonnen hatte, noch einen weiteren Strich II hinzufügen konnte. Das konnte man mit jedem Zählzeichen machen, bei dem man angekommen war. Das erregte weder in der Steinzeit noch bei den Babyloniern oder Ägyptern besonderes Kopfzerbrechen. Für Babyloniens Kornspeicher und für Pharaos Pyramiden reichten die Zahlen.

Erst mit der Entstehung der *Geometrie* als Wissenschaft von der Erd- und Landvermessung im Milet des 6. Jahrhunderts v. Chr. entwickelte sich ein philosophischer Diskurs darüber. Der erste Philosoph und Geometer der Mathematik- und Philosophiegeschichte ist Thales von Milet (ca. 624–547 v. Chr.), zusammen mit seinem Zeitgenossen, dem Naturphilosophen Anaximander (ca. 610–547 v. Chr.), beide in Milet. Bei der Längenmessung musste man eine Längeneinheit immer wieder auf einer geraden Linie antragen und so die Zahlen dort auftragen. Es war klar, dass man im Prinzip nach rechts und nach links beliebig weiterfortfahren konnte. Thales beweist die ersten allgemeinen geometrischen Lehrsätze über rechtwinklige Dreiecke, und Anaximander formuliert die Theorie des *Apeiron*, des Unbegrenzten. Sowohl der Kosmos ist unbegrenzt in seiner räumlichen Ausdehnung, als auch die Zeit: Es gibt immer ein „davor“ und ein „danach“. In der Folgezeit werden die Griechen Zahlen immer geometrisch verstehen.

Wir machen einen großen Sprung ins 18. Jahrhundert. Über den genialen Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777–1855) wird folgende Anekdote erzählt: Mit sieben Jahren kam er in die Volksschule in seiner Geburtsstadt Braunschweig. Um die Schüler zu beschäftigen, stellte sein Lehrer Büttner ihnen die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 zusammen zu zählen. Gauß löste diese Aufgabe in kürzester Zeit, indem er die Zahlen wie folgt anordnete:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & 2 & 3 & & 98 & 99 & 100 \\
 +100 & + 99 & + 98 & & + 3 & + 2 & + 1 \\
 \hline
 101 & + & 101 & + & 101 & + & 101 \\
 & & & & \dots & & \\
 & & & & + & & \\
 & & & & 101 & + & 101 & + & 101
 \end{array}$$

$$= 100 \cdot 101 = 10\,100.$$

Der gesuchte Wert ergibt sich nun zu $\frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$. Der Lehrer Büttner erkannte die außergewöhnliche Begabung seines Schülers Gauß, beschaffte ein besonderes Rechenbuch aus Hamburg für ihn und sorgte dafür, dass er das Gymnasium besuchen konnte. Mit 14 Jahren erhielt der Wunderknabe Carl Friedrich Gauß ein Stipendium des Herzogs von Braunschweig und konnte damit studieren.

Löst man sich von der konkreten Zahl 100, so kann man schreiben

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} .$$

Hierbei ist n eine *Variable*, ein Platzhalter, der durch beliebige *Konstanten* aus dem Bereich der natürlichen Zahlen ersetzt werden kann. Etwa durch 1000 oder durch 10 000 oder durch zwei Millionen. Die Verwendung von *Unbekannten* als Platzhalter geht wohl auf Diophant von Alexandria (vermutlich ca. 200–250 n. Chr.) zurück. Allerdings lassen neuere Auswertungen von Keilschrifttafeln vermuten, dass dies schon den Babyloniern bekannt war. Ein großer Teil von Keilschriftfunden aus Mesopotamien ist bis heute nicht adäquat ausgewertet und publiziert.

Das von Gauß verwendete Verfahren lässt sich auf jede Konstante aus dem Bereich der natürlichen Zahlen anwenden, also gilt die obige Formel für alle natürlichen Zahlen und das sind unendlich viele. Wir sind unversehens mit endlich vielen Operationen zumindest symbolisch zu unendlich vielen wahren Aussagen $A(n)$ gelangt und damit tief in die Logik vorgestoßen. Das ist der Variablen n geschuldet. Eigentlich muss man sie ja durch eine zulässige Konstante wie 100 oder 1000 ersetzen, um so zu einer konkreten wahren Aussage zu kommen.

Setzt man in unserer Aussage $A(n)$ nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ... für n ein, so erhält man die Folge 1, 3, 6, 10, 15, Diese Zahlen waren schon den Griechen als *Dreieckszahlen* bekannt und wurden besonders von den Pythagoreern in hohen Ehren gehalten. Sie spielen eine große Rolle in der Geometrie.

1.3 Aktual vs. potenziell Unendliches

Wir sind aber auch tief in der Philosophie angelangt mit der Diskussion über das *aktual* und das *potenziell Unendliche*, die schon Platon (ca. 428–347 v. Chr.) und Aristoteles (ca. 384–322 v. Chr.) geführt haben. Die Unterscheidung formuliert Aristoteles in seiner *Physik*, Aristoteles [1]: *Potenzielle Unendlichkeit* besteht nach Aristoteles darin, „dass immer ein Anderes und wieder ein Anderes genommen wird, das eben genommene aber wieder ein Begrenztes, jedoch ein Verschiedenes und wieder ein Verschiedenes ist.“ Das kann ein geregeltes, nicht abbrechendes Verfahren wie das *Immer-weiter-Zählen* mit den natürlichen Zahlen sein. Wir werden im folgenden entsprechende Verfahren untersuchen.

Der Begriff des *aktual Unendlichen* besteht in einer Gesamtschau von irgendwie existierenden unendlichen Gesamtheiten wie der aller natürlichen Zahlen oder aller reellen Zahlen. Aristoteles verwirft den Begriff des aktual Unendlichen als nicht erkennbar, weshalb es nicht als wirklich Existierendes angenommen werden könne. Er bezieht sich wohl auf die Vorstellungen vom *Kontinuum*, die damals gängig

waren, und erwähnt Platon nicht, vgl. Jürgen Mittelstraß, *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*, Mittelstraß [7], Stichwort *unendlich*.

Die neue griechische Philosophie Platons verdankt ihren Theoriebegriff der neuartigen griechischen Geometrie. In der ersten Hälfte des 6. Jahrhunderts v. Chr. hatte Thales in Milet mathematische Lehrsätze über Dreiecke und über seine bevorzugte Grundfigur, ein Rechteck mit Diagonalen und umschriebenem Kreis formuliert und bewiesen. Das hatte es vorher, in der ägyptischen oder babylonischen Geometrie nicht gegeben.

Platon weist darauf hin, dass die Gegenstände, über die in der mathematischen Theorie geredet wird, nicht die individuellen Dreiecke sind, die gerade mit dem Griffel auf eine Wachstafel oder mit dem Stock in den Sand gezeichnet worden sind, auch nicht das Rechteck, das zu Beginn der Bauarbeiten als Grundriss des Parthenon-Tempels im felsigen Boden der Akropolis in Athen abgesteckt worden war. Es sind *theoretische Gegenstände*, ideale Dreiecke und ideale Linien, eben die *Idee des Dreiecks*, die die Geometer sich erarbeitet haben. Vgl. Jürgen Mittelstraß, *Die griechische Denkform*, Mittelstraß [8], Abschnitt I.3, *Die geometrischen Wurzeln der platonischen Ideenlehre*.

Für Platon sind es die *Ideen*, über die in den Theorien der Geometrie oder der Philosophie geredet wird, so auch die *Idee der Zahl* in der Theorie der Arithmetik. Eine Beschränkung auf Konstruktionen im Begrenzten, wie beim Konzept des potenziell Unendlichen bei Aristoteles, gibt es für ihn bei den Ideen nicht.

Platon spricht in der ihm zugeschriebenen *Prinzipienlehre* von zwei Urprinzipien: dem *Einen* als dem Prinzip der Einheit und Bestimmtheit und der *unbestimmten Zweiheit* als dem Prinzip des Großen und Kleinen, der Verminder- und Vermehrbarkeit, der Unbestimmtheit und der Vielheit. Alles Seiende beruht darauf, dass das Eine auf die unbestimmte Zweiheit einwirkt, indem es dem Formlosen Grenzen setzt, ihm Form und Merkmale verleiht und es in die Existenz bringt. Insbesondere die „mathematische“ Reihung Zahl – Linie – Fläche – Körper, aber auch die „erkenntnistheoretische“ Reihung Einsicht – Wissen – Meinung – Wahrnehmung sowie die moralischen Kategorien des Guten und Schlechten. Beide Urprinzipien sind *transzendent*, d. h. jenseits des Seienden.

Platon war wohl der Meinung, dass die Prinzipienlehre so kompliziert sei, dass sie nur mündlich unterrichtet werden sollte, um Missverständnisse zu vermeiden. Deshalb wollte er sie nicht aufschreiben. Aristoteles berichtet in seiner *Physik*, Aristoteles [1], von „den sogenannten ungeschriebenen Lehren“ Platons.

Nach Aristoteles *Metaphysik*, Aristoteles [2], führt Platon die Erzeugung der Zahlen darauf zurück, dass das Eine auf die unbestimmte Zweiheit einwirkt und die bestimmte Zweiheit, die Zahl Zwei erzeugt. Wiederholtes Einwirken der unbestimmten Zweiheit erzeugt daraus die Zahlen 4, 8, 16 usw. Die Zahlen dazwischen werden durch arithmetische Mittelbildung erzeugt, z. B. $5 = \frac{2+8}{2}$, vgl. Jürgen Mittelstraß, *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*, Mittelstraß [7], Stichwort *Ideenzahlenlehre*.

Für die zivilisatorische Praxis des Zählens können wir uns das durchaus vorstellen: Die Zahl Eins ist Maß und Prinzip der anderen Zahlen, an dem sie gemessen werden. Sie bringt sie durch Verdoppelung und Mittelbildung hervor. So betrach-

tet ist sie der ganzen Zahlenwelt übergeordnet. Die Erzeugung der Zahlen durch Verdoppelung und Mittelbildung entspricht auch bei Platon den Vorstellungen des potenziell Unendlichen.

Der Musiktheoretiker und Philosoph Aristoxenos von Tarent (ca. 360–300 v. Chr.), Schüler von Aristoteles in Athen, berichtet, dass Aristoteles oft von einem öffentlichen Vortrag Platons „Über das Gute“ erzählt habe, in dem Platon neben mathematischen und astronomischen Darlegungen auch über das höchste Prinzip des Einen gesprochen habe. Er muss demnach seine Prinzipienlehre dargestellt haben. Nach Darstellung des Aristoteles soll der Vortrag beim philosophisch unkundigen Publikum auf Unverständnis gestoßen sein.

Nach dem Bericht von Aristoxenos hat Platon zwischen den mathematischen Zahlen und den metaphysischen *idealen Zahlen* oder *Ideenzahlen* unterschieden. Bei Letzteren drückt die bestimmte Zweiheit, die durch die beiden Urprinzipien erzeugt wird, das Wesen der Zweiheit aus. Deren Bestimmtheit zeigt sich darin, dass sie das Verhältnis zwischen einem bestimmten Übertreffenden, dem Doppelten, und einem bestimmten Übertroffenen, dem Halben, ausdrückt. Sie ist keine Zahl, sondern ein Verhältnis zwischen zwei Größen, von denen die eine das Doppelte der anderen ausmacht.

Für die technische Praxis der Längenmessung ist eine bestimmte Länge von zwei das Doppelte einer vorher festgelegten Längeneinheit. Die französische Revolution hat ab 1790 die Schaffung eines einheitlichen und universellen Einheitensystems betrieben. In einer internationalen Konferenz wurde 1799 das *metrische System* mit den Einheiten Meter, Quadratmeter, Kubikmeter und daraus abgeleitet Kilogramm vereinbart und im Dezember 1799 von der Nationalversammlung gesetzlich festgelegt. Eine Länge von 2 m war danach das Doppelte der Länge des in Paris aufbewahrten Urmeters, ein Gewicht von 2 kg das Doppelte des Gewichts des in Paris aufbewahrten Urkilogramms. Dasselbe gilt entsprechend für alle anderen physikalischen Größen.

Später wurde im Interesse der Physik das Kilogramm als Einheit der Masse vom Gewicht unterschieden, das in Kilopond bzw. seit 1978 in Newton gemessen wird. Wir verwenden das metrische System heute noch, aber mit technisch präziseren Normierungen der entsprechenden Einheiten. Diese durch technische Normen festgelegten Einheiten sind natürlich der Messung übergeordnet. Urmeter und Urkilogramm werden heute im Panthéon in Paris aufbewahrt.

Ob Platon mit seinen Ideenzahlen die zahlenmäßige Messung physikalischer Größen gemeint hat, lässt sich anhand der dürftigen und lediglich indirekten Quellenlage nicht sagen. Ob seine Prinzipienlehre sich mit der Begründung der Naturwissenschaften befasst hat, bleibt damit im Dunkeln.

1800 Jahre später, zu Beginn der Renaissance, war es Nikolaus von Kues, lateinisch Cusanus (1401–1464), geboren als Nikolaus Cryfftz (Krebs) in Kues, später Bischof von Brixen, Kurienkardinal und päpstlicher Generalvikar, d. h. Administrator des Kirchenstaats, der die Diskussion über das Unendliche mit mathematischen und theologischen Argumenten wieder aufnahm. Für ihn war Gott die absolute aktual unendliche Einheit, deren positives Begreifen für den menschlichen Verstand unerreichbar ist.

Nikolaus Cusanus war ein Förderer der Wissenschaften, hat viele antike Handschriften wiederentdeckt, u. a. Werke von Plautus und Tacitus, oder von seiner Reise 1437–1438 nach Konstantinopel mitgebracht, darunter wohl auch einen Kodex mit Werken des Archimedes (287–212 v. Chr.), den später sogenannten Kodex A. Er war einer der bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit und hat eine Reihe mathematischer Schriften verfasst, darunter mehrere über die Quadratur des Kreises wie etwa den *Dialogus de circuli quadratura*.

In seinem erkenntnistheoretischen Hauptwerk *Idiota*, deutsch *Der Laie*, verweist er darauf, dass menschliches Wissen im Vergleichen (*comparatio*) und Messen (*mensura*) besteht, vgl. Jürgen Mittelstraß, *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*, Mittelstraß [7]. Daneben war er ein ausgezeichneter Verwalter und Buchhalter, der seine Pfründen wirtschaftlich sanieren konnte. Mit seinem Buch *De Docta Ignorantia*, deutsch *Von der gelehrten Unwissenheit*, ist er wohl das satirische Vorbild des Doktor Allwissend in den Märchen der Brüder Grimm.

Zurück zum potenziell Unendlichen: Es gibt noch ein anderes, allgemeiner anwendbares Verfahren, die obigen Aussagen $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n zu beweisen, und das ist das *Prinzip der vollständigen Induktion*.

Stellen wir uns einen mathematischen Dienstleister vor, der die Aufgabe übernimmt, die Aussage $A(n)$ zu beweisen, wenn immer ein Auftraggeber eine natürliche Zahl n vorgibt. Der Dienstleister hat folgendes zur Verfügung:

1. Die Aussage $A(1)$ ist wahr und vom Auftraggeber akzeptiert.
2. Wenn die Aussage $A(k)$ für eine beliebige Zahl, d. h. eine Konstante k wahr und vom Auftraggeber akzeptiert ist, kann der Dienstleister daraus die Wahrheit der Aussage $A([k + 1])$ folgern, was vom Auftraggeber akzeptiert werden muss.

Dann kann der Dienstleister jeden derartigen Auftrag erfüllen. Der Auftraggeber muss allerdings die Zahl n zur Verfügung stellen, d. h., er muss sie auf dem Weg über I, II, III, IIII, ... erzeugen. Der Dienstleister erzeugt parallel dazu die Aussage $A(I)$, die bereits akzeptiert ist, folgert dann aus $A(I)$ die Aussage $A(II)$, was der Auftraggeber akzeptieren muss, daraus dann $A(III)$ und $A(IIII)$, was der Auftraggeber wieder akzeptieren muss usw., bis die vorgegebene Konstante n und die Aussage $A(n)$ erreicht sind. Der Auftrag ist erfüllt.

Leser, denen die folgenden Formeln zu kompliziert erscheinen, sollten sie einfach überspringen und bei der allgemein verständlichen Schlussfolgerung weiterlesen. Sie können sich darauf verlassen, dass die übrigen Leser die Formeln überprüft und für richtig befunden haben.

Für unsere Aussage $A(n)$ über die Dreieckszahlen, nämlich die von Carl Friedrich Gauß als Schüler bewiesene Formel

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2},$$

bedeutet das:

1. Die Aussage $1 = \frac{1 \cdot (1 + 1)}{2}$, die offensichtlich wahr ist.

2. Wenn für eine Konstante k die Aussage $A(k)$ wahr ist, so kann man die ersten k Zahlen entsprechend der obigen Formel ersetzen, und es gilt

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + (k - 1) + k + [k + 1] &= \frac{k \cdot (k + 1)}{2} + [k + 1] \\ &= \frac{k \cdot [k + 1]}{2} + \frac{2 \cdot [k + 1]}{2} \\ &= \frac{[k + 1] \cdot (k + 2)}{2}, \end{aligned}$$

was aber genau die Aussage $A([k + 1])$ ist, die somit ebenfalls wahr ist.

Hier haben wir beim zweiten Ausdruck oben rechts den Trick benutzt, mit dem Faktor $\frac{2}{2} = 1$ zu multiplizieren, damit alles auf den gleichen Bruchstrich mit Hauptnenner zwei kommt. Das ändert nichts am Wert des Ausdrucks. Danach konnten wir den Faktor $[k + 1]$ ausklammern.

Schlussfolgerung: Unser Dienstleister ist jetzt mit dem Nötigen versehen, um die Aussage $A(n)$ über Dreieckszahlen für jede von einem Auftraggeber vorgegebene natürliche Zahl n zu beweisen.

Aus der Konstruktion der Zahlen I, II, III, IIII, ... lässt sich somit das Prinzip der vollständigen Induktion herleiten. Das Vorgehen entspricht den Kriterien des Aristoteles für das potenziell Unendliche: „Es wird ein Anderes genommen und wieder ein Anderes, aber immer ein Begrenztes und Verschiedenes.“ Es wird weitergezählt, aber Zahlen und Aussagen sind alle endlich und durch die vom Auftraggeber gewählte Zahl begrenzt. Das potenziell Unendliche kommt dadurch herein, dass es keine Begrenzung gibt für die jeweils endliche Zahl, die der Auftraggeber wählen darf.

Das Vorgehen besteht in einem regelten Dialog zwischen Auftraggeber und mathematischem Dienstleister. Wir haben hier etwas modernere Namen gewählt als *Opponent* und *Proponent* – Gegner und Befürworter – einer Behauptung in den scholastischen Disputationen des Mittelalters. Archimedes spricht vom *Zweifler* statt vom Opponenten, gegen den er selbst persönlich als Proponent argumentiert. Solche regelten Dialoge sind die Grundlage der von Paul Lorenzen entwickelten dialogischen *Konstruktiven Logik*, vgl. Paul Lorenzen, *Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie*, Lorenzen [3].

Mithilfe dieser regelten Dialoge lässt sich also das Prinzip der vollständigen Induktion für die durch Abstraktion aus Zählzeichen konstruierten natürlichen Zahlen beweisen.

Es gibt modernere Arten, die natürlichen Zahlen einzuführen, etwa die Axiome von Giuseppe Peano (1858–1932), die er 1889 veröffentlicht hat. Dabei wird das Prinzip der vollständigen Induktion als Axiom gefordert. Es gilt dort für beliebige Aussagen $A(n)$ mit einer Variablen n für natürliche Zahlen und das sind aktual unendlich viele.

Das Vorgehen hier gleicht einem Strategiespiel: Der mathematische Dienstleister weiß, dass er den Dialog immer gewinnen und den Auftrag ausführen kann für potenziell jede Wahl, die der Auftraggeber trifft. Er legt sich aber nicht aktual unendlich viele wahre Aussagen auf Lager, damit er für den Auftraggeber immer die

gewünschte Aussage vorrätig hat. Modern ausgedrückt, sein Geschäftsmodell ist die Auftragsfertigung. So viel zum Unterschied zwischen dem potenziell und dem aktual Unendlichen.

Für unseren Teil sehen wir die Aussage für alle n als bewiesen an, wenn wir uns überzeugt haben, dass es für jede Wahl von n eine Gewinnstrategie für den mathematischen Dienstleister gibt.

Auf ähnliche Weise lassen sich auch alle anderen wahren Sätze über natürliche Zahlen herleiten, insbesondere über die Grundrechenarten Addition und Multiplikation inklusive der anderen Axiome von Giuseppe Peano, wie Paul Lorenzen gezeigt hat, vgl. Paul Lorenzen, *Differential und Integral: Eine konstruktive Einführung in die klassische Analysis*, Lorenzen [2] und Lorenzen [3]. Die Axiome sind also wahre Sätze für die durch Abstraktion aus Zählzeichen konstruierten natürlichen Zahlen. Diese Zahlen bilden somit ein Modell für das Axiomensystem von Giuseppe Peano. Eine moderne, mengentheoretische Formulierung der Peano-Axiome findet sich in dem von Klaus Mainzer verfassten Kapitel über *Natürliche, ganze und rationale Zahlen* des von Heinz-Dieter Ebbinghaus herausgegebenen Bandes über *Zahlen*, Ebbinghaus [1]. Das Buch richtet sich an den mathematisch versierten Leser.

Papier ist geduldig, und unser Dezimalsystem sehr effizient. Wir können mit Leichtigkeit unvorstellbar große Zahlen aufschreiben. So können wir uns vorstellen, dass es in unserem Universum vermutlich 2^{300} Atome gibt. Wir wollen von Vermutung reden, weil unser Wissen für den seriöseren Begriff einer Schätzung nicht ausreicht. Dezimal sind das etwa 10^{90} Atome, eine unvorstellbar große Zahl. Kein Mensch kann so weit zählen, auch unsere beste Technik ist weit vorher am Ende. Aber wir können heute mit Computern viel weiter zählen als noch vor 100 Jahren. Die Mathematik abstrahiert von diesen technischen Niederungen. Wenn unser Auftraggeber so weit zählen kann, soll es auch der Dienstleister können. Der Satz „Und wenn sie nicht gestorben sind ...“ gehört nicht zu den Sätzen der Mathematik. Trotzdem soll ein Beweis in endlich vielen Schritten oder logischen Schlüssen durchführbar sein. Und er muss für heute lebende Menschen nachvollziehbar sein, sonst kann er nicht akzeptiert und an andere weitergelehrt werden.

1.4 Vom Teilen

Das Teilen ist mitunter eine schwierige und unter den Bedingungen von Herrschaft sogar eine gefährliche Übung, wie die beiden folgenden Erzählungen zeigen.

In der griechischen Mythologie ist der Titan Prometheus, der „Vorausdenkende“, der Freund und Kulturstifter der Menschen. Nach einer Variante des Mythos hat er sogar als Schöpfer die ersten Menschen aus Lehm gestaltet und mit Eigenschaften ausgestattet. Er bringt ihnen das Feuer im Stängel eines Riesenfenchels, in dessen Mark man Glut transportieren konnte, und wird ihr Lehrmeister. Selbst unsterblich, sieht er die von den Göttern unter Zeus errichtete Oligarchie als anmaßende Gewaltherrschaft an und prophezeit deren Ende.

Die Götter verlangen von den Menschen Anbetung und Opfer. Da verfällt Prometheus auf eine List. Er schlachtet einen Stier und macht daraus zwei Haufen, einen

großen mit den Knochen und einen kleinen mit dem Fleisch, und umhüllt beide mit der Haut des Stiers. Dann fordert er Zeus auf, einen der Haufen zu wählen. Der wählt den größeren. Als der Betrug offenbar wird, verhängt Zeus eine grausame Strafe über Prometheus. Er lässt ihn über einem Abgrund an einen Felsen im Kaukasus schmieden, ohne Nahrung, Wasser und Schlaf. Täglich kommt ein Adler, um von Prometheus Leber zu fressen, die sich immer wieder erneuert, da er unsterblich ist.

Zeus straft auch die Menschen. Er schickt ihnen die Frau Pandora mit einer Büchse, in der alle Leiden, Krankheit und Tod eingeschlossen waren, ebenso wie alle Laster und Untugenden. Im Originaltext ist es ein Pithos, ein Tonkrug. Pandora sollte die Büchse nicht öffnen. Sie tut es trotzdem und so kamen die Leiden, Krankheit und Tod in die Welt, ebenso die Laster und Untugenden. Am Ende kam aber auch die Hoffnung aus der Büchse in die Welt.

Der Philosoph Friedrich Nietzsche (1844–1900), der an der zu seiner Zeit unheilbaren Syphilis erkrankt war, hielt sie für das grausamste aller Leiden, die Pandora den Menschen gebracht hatte.

Wir denken an die frühe Siedlung in Çatal Höyük um 7500 v. Chr., mit Feuerstellen im Haus und Geschirr aus Ton, die keine Anzeichen von Herrschaft zeigt. Allerdings wurden die Toten im Boden der Häuser bestattet, dicht unter dem Fußboden. Das muss zu Seuchen und Epidemien geführt haben. Später gibt man Çatal Höyük auf und trennt die Nekropolen von den Behausungen der Lebenden.

In der Zeit nach 7000 v. Chr. müssen andere Völker eingewandert sein, vielleicht mit besseren Waffen, müssen sich Herrschaft und Patriarchat ausgebildet haben. Um 3000 v. Chr. schrieben die Sumerer über Sklavinnen, zumindest in ihrer Buchhaltung. Mit dem Patriarchat bilden sich neue, patriarchalische Götter aus, die die alten Naturreligionen und ihre Götter verdrängen. Die Frauen werden zur Quelle des Ungehorsams, der Laster und der Leiden erklärt.

Mit patriarchalischen Herrschern wie Zeus lässt sich schlecht teilen. Diesen Prozess beschreibt der Mythos von Prometheus. Vielleicht ist es so zu erklären, dass patriarchalische Gesellschaften wie die Ägypter und auch die Griechen nur eine rudimentäre Bruchrechnung entwickelt haben.

Das Kamelproblem ist ein vorislamisches Rätsel, wahrscheinlich aus dem indischen Raum, das nach Einführung des Islam als arabische Geschichte erzählt wird und vielfach – wohl fälschlicherweise – sogar dem Imam Ali, dem Cousin und Schwiegersohn des Propheten Mohammed und vierten Kalifen zugeschrieben wird, der in Nadschaf im Irak unweit von Babylon begraben liegt. Als Scheich Ali zum Sterben kam, vermachte er seine Herde von 17 Kamelen seinen drei Söhnen. Der Älteste sollte die Hälfte bekommen, der Zweite ein Drittel, der Dritte ein Neuntel. Die Söhne müssen ihm versprechen, kein Tier zu töten und sich friedlich zu einigen. Nach Scheich Alis Tod finden die Söhne zunächst keine Lösung, bis ein Derwisch auf einem Kamel daher geritten kommt, der ihnen hilft. Er leiht ihnen sein Kamel. Nun sind es 18 Kamele, und der Älteste bekommt neun, der Zweite sechs und der Dritte zwei Kamele. Ein Kamel, das des Derwischs, bleibt übrig, und er nimmt es wieder an sich. Alle sind glücklich.

Das Rätsel gibt keinen Hinweis, dass die Lösung in der Mathematik zu suchen wäre. Wie ein Deus ex Machina in der antiken griechischen Tragödie kommt der

Derwisch auf einem Kamel daher und das ist Teil der Lösung. Für uns heute stellt das Rätsel eine Übungsaufgabe im Bruchrechnen dar. Mit etwas Grundschulbildung würden wir sofort den Hauptnenner 18 ermitteln, die Hälfte von 36 – und ein weiterer Hinweis auf Babylon. Uns wäre bald klar, dass das Vermächtnis von Scheich Ali nur 17 Achtzehntel einer ganzzahligen Einheit betraf. Das Rätsel umgeht die Teilung von Tieren, die sicherlich für Viehzüchter eine unerwünschte Form des Handels war, und besteht auf einer ganzzahligen Lösung. Unter diesen Randbedingungen ist die Bruchrechnung wenig populär. Viehzüchtergesellschaften haben weniger Verwendung dafür als Ackerbaugesellschaften.

Was immer der Grund war, die Babylonier jedenfalls hatten eine ausgefeilte Bruchrechnung. Sie waren eine Ackerbaugesellschaft mit starken matriarchalischen Gottheiten. Sie rechneten mit 6, 12, 36, 60 und 3600 und sie hatten eine hoch entwickelte Bruchrechnung damit. Es wird vermutet, dass sie mit dem Daumen der einen Hand eines der zwölf Fingerglieder der anderen vier Finger bezeichneten und mit den fünf Fingern der anderen Hand eines von fünf Dutzend, wie man dem Buch von Georges Ifrah, *Universalgeschichte der Zahlen*, Ifrah [5], Kap. 3 entnehmen kann. Damit kann man bis 60 zählen.

Das erklärt auch die besondere Rolle der Zwölf in den mit Babylon verbundenen Kulturen. Die 13 wird damit zu einer lästigen Zahl. Man brauchte jetzt spätestens die andere Hand, um das zweite Dutzend anzuzeigen, und konnte nicht mehr damit Waren präsentieren oder andere Dinge erledigen. Für viele gilt die 13 heute noch als Unglückszahl, möglicherweise aus diesem Grund.

Das Wissen der Babylonier blieb zwar auf wenige Gelehrte beschränkt, war aber für die ganze Antike wegweisend, und das bleibt so über zwei Jahrtausende. Noch Isaac Newton (1643–1727) rechnete mit ganzen Zahlen dezimal und mit Brüchen babylonisch, mit Sechzigsteln oder Dreitausendsechshundertsteln. Die *Dezimalbrüche* wurden erst 1586 von Simon Stevin (1548–1620) eingeführt und haben sich nur langsam durchgesetzt.

Es war sicherlich nie ein Problem, ein Maß Korn oder einen Krug mit Öl oder auch ein Talent Gold in zwei Hälften zu teilen, wenn die Beteiligten einverstanden waren. Auch ein oder zwei Neuntel von einer teilbaren Ware waren im Handel kein Problem. Wieso aber Brüche addieren und subtrahieren, multiplizieren und dividieren, einen Kalkül der Grundrechenarten wie mit ganzen Zahlen damit aufstellen? Dafür sah man in der Antike keine Notwendigkeit.

Und warum um Himmels willen sollte ein halber Apfelkuchen genau so viel sein wie 500 Tausendstel davon – jeder Krümel fein säuberlich in ein Plastiktütchen verpackt? In unserer heutigen Theorie rationaler Zahlen ist

$$\frac{1}{2} = \frac{500}{1000},$$

weil wir den Faktor 500 kürzen können.

Die Griechen interpretierten Zahlen sofort als geometrische Längen und sahen Brüche folgerichtig als ganzzahlige Verhältnisse von Strecken in geometrischen Figuren an, für die sie eine Theorie der Proportionen entwickelten. Ihre Geometrie war eine Theorie ähnlicher ebener und räumlicher Figuren, in der der Maßstab kei-

ne Rolle spielt. Sie waren als Händler in aller Herren Ländern mit den unterschiedlichsten Maßeinheiten konfrontiert und passten sich als gute Händler ihren jeweiligen Kunden an. Im Gegensatz zur französischen Revolution hatten sie nicht die missionarische Absicht, im Namen der Vernunft eine einheitliche Maßeinheit wie den *Urmeter* überall einzuführen. Das blieb dem Zeitalter der industriellen Revolution und seinem Interesse an Massenproduktion und Normierung vorbehalten.

Sie nannten zwei Strecken *kommensurabel*, wenn sich eine gemeinsame Längeneinheit finden ließ, sodass jede der Strecken ein ganzzahliges Vielfaches dieser Einheit darstellte. Teilt man die gemeinsame Längeneinheit ganzzahlig in mehrere gleichlange Teilstücke, so ist auch jedes Teilstück eine gemeinsame Längeneinheit der beiden ursprünglichen Strecken. In unserem Beispiel stehen zwei Strecken im Verhältnis eins zu zwei. Teilt man die Strecke der Länge eins in 500 gleiche Teilstücke, so stehen die beiden Strecken im Verhältnis 500 zu 1000. Es ist aber die gleiche Proportion, die beiden Strecken sind gleich geblieben. Kommensurabilität bedeutet immer eine ganzzahlige Proportion der Längen, einen *Logos* – lateinisch *ratio*, deutsch *Verhältnis*, d. h. einen Bruch, genauer viele gleichwertige Brüche. Zwei Brüche sind dabei *gleichwertig*, wenn sie durch Kürzen oder Erweitern ineinander übergehen.

Wie bei den natürlichen Zahlen haben wir es wieder mit einer Abstraktion zu tun. Wir reden *abstrakt* über *rationale Zahlen*, wenn die spezielle Wahl eines Bruches unter den vielen gleichwertigen Brüchen keine Rolle mehr spielt. Ein Satz über rationale Zahlen bleibt wahr, wenn man jeden vorkommenden Bruch durch einen gleichwertigen ersetzt. So ist der Satz

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

ein Satz über rationale Zahlen, nicht aber der Satz „Der Bruch $\frac{1}{3}$ hat einen ungeraden Nenner“. Er gilt nämlich nicht für den gleichwertigen Bruch $\frac{2}{6}$. In der Theorie rationaler Zahlen beschränken wir uns also auf Sätze über Brüche, die invariant bleiben unter dem Austausch eines Bruchs durch einen gleichwertigen. Dabei gibt es unter allen gleichwertigen Brüchen immer einen besonderen Vertreter, nämlich den Bruch, bei dem alle gemeinsamen Faktoren weggekürzt sind. Hier kann man nicht mehr kürzen.

Mit den so definierten rationalen Zahlen lässt sich – nach Einführung der Null und der negativen rationalen Zahlen – eine Theorie der vier Grundrechenarten aufbauen, die nicht aus den rationalen Zahlen hinausführt. Das Ergebnis jeder Rechnung mit rationalen Zahlen ist wieder eine rationale Zahl, wobei die Division durch null verboten bleibt. Das ist eine Theorie der Neuzeit. Die Griechen begriffen rationale Zahlen nicht als Zahlen, sondern als geometrische Proportionen und konnten diesen Schritt nicht machen.

Simon Stevin schlug 1586 den Gebrauch von Dezimalbrüchen vor. Er hatte erkannt, dass Brüche genauso wie rationale Zahlen durch einen endlichen oder unendlich periodischen Dezimalbruch dargestellt werden können. Um das zu verstehen, müssen wir in den bei vielen ehemaligen Schülern aufgrund traumatischer Erfahrungen aus der Schulzeit so unpopulären Bereich der Gleichungen eintauchen.

Leser, die sich gar nicht dazu entschließen können, sollten den Abschnitt überspringen. Wenn sie sich aber doch zum Durchhalten motivieren können, winkt, neben dem Erfolgserlebnis, eine Belohnung: Sie werden das berühmte Paradoxon von *Achilleus und der Schildkröte* besser verstehen, als es Griechen und Römer im Altertum je konnten. Der Sprung ins kalte Wasser soll so einfach wie möglich gemacht werden.

Betrachten wir z. B. den Bruch $\frac{1}{9}$ und multiplizieren ihn mit dem Faktor

$$\left[\frac{9}{10} + \frac{1}{10} \right] = 1.$$

Das ändert nichts am Wert von $\frac{1}{9}$, wohl aber an der Form des Ausdrucks, insbesondere wenn wir ausmultiplizieren. Durch die Klammern wird das auch recht einfach. Wir müssen beide Summanden multiplizieren und können beim linken einmal durch neun kürzen, also:

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{9} \cdot \left[\frac{9}{10} + \frac{1}{10} \right] = \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10} \right) = 0,1 + \frac{1}{9 \cdot 10}.$$

Den Wert $\frac{1}{10}$ schreibt man in *Positionsschreibweise* kurz als 0,1. Wir wiederholen die Prozedur, wobei wir jetzt den letzten Summanden mit dem obigen Faktor vom Wert eins multiplizieren, und erhalten

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{9 \cdot 10} \cdot \left[\frac{9}{10} + \frac{1}{10} \right] = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{9 \cdot 10} \cdot \frac{1}{10} \right) = 0,11 + \frac{1}{9 \cdot 100}.$$

Diese Entwicklung in einen endlichen Dezimalbruch als *Näherungswert* und einen *Rest* lässt sich beliebig weiter fortsetzen, wobei die Reste, hier $\frac{1}{9 \cdot 100}$, beliebig klein werden. Wenn beim Näherungswert n Dezimalen hinter dem Komma stehen, so ist

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{9 \cdot 10^n} = 0,11\dots1 + \frac{1}{9 \cdot 10^n}$$

mit einem Rest von $\frac{1}{9 \cdot 10^n}$. Der Ausdruck 10^n ist eine Kurzschreibweise für die Multiplikation von n Faktoren vom Wert zehn miteinander. Lässt man n immer größer werden, so geht die Folge der Reste gegen null, und die *unendliche Reihe*

$$0,11\dots1\dots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots$$

konvergiert gegen den Grenzwert $\frac{1}{9}$.

Simon Stevin hat dies eher intuitiv formuliert. Es hat noch Jahrhunderte gedauert, bis die Idee der Konvergenz und des Grenzwerts mit der heutigen Präzision formuliert waren. Man ahnt, dass dieses Verfahren dem Bereich des potenziell Unendlichen zuzurechnen ist, wovon man sich im Kap. 7 über reelle Zahlen überzeugen kann.

Endliche Dezimalbrüche sind z. B. $\frac{1}{4} = 0,25$ und $\frac{1}{8} = 0,125$, unendlich periodische z. B. $\frac{1}{3} = 0,33\dots3\dots = 0,\overline{3}$ und $\frac{1}{6} = 0,166\dots6\dots = 0,1\overline{6}$ und $\frac{1}{7} = 0,142857142857\dots = 0,142857$, wobei der Querstrich oben die Periode anzeigt. Eine Besonderheit ist der unendlich periodische Dezimalbruch

$$0,\overline{9} = 0,99\dots9\dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \dots + \frac{9}{10^n} + \dots$$

der gegen den Grenzwert eins konvergiert.

Aufgrund der Konstruktionsvorschrift kann man Dezimalbrüche weder erweitern noch kürzen. Alle rationalen Zahlen besitzen eine Darstellung als endlicher oder unendlich periodischer Dezimalbruch. Umgekehrt stellen endliche oder unendlich periodische Dezimalbrüche immer eine rationale Zahl dar. Die Darstellung ist eindeutig, wenn man gegebenenfalls die ab einer bestimmten Stelle auftretende unendliche Periode neun durch die Periode null ersetzt und zum Ausgleich die vorangehende Stelle um eins erhöht. Das entspricht dem eben genannten Grenzwertprozess. Die Periode null kann man streichen, der Dezimalbruch ist endlich. In mathematischen Lehrbüchern werden unendlich periodische Dezimalbrüche als *konvergente geometrische Reihen* behandelt.

In der Mathematik spielen neben den rationalen Zahlen auch die irrationalen Zahlen eine wichtige Rolle. Sie werden in Kap. 7 mithilfe der Begriffe Konvergenz und Grenzwert definiert und lassen sich durch aperiodische unendliche Dezimalbrüche darstellen, was Simon Stevin auch schon wusste. Zusammengenommen bilden rationale und irrationale Zahlen das Feld der reellen Zahlen. Wie wir in Kap. 8 sehen werden, lassen sich nur die rationalen Zahlen in Computern darstellen, sogar nur ein endlicher Teil davon. Warum die Mathematik trotzdem damit nicht auskommt, hatten erstmals die Griechen erkannt, wie wir im folgenden Kap. 2 sehen werden.

Literatur zu Kapitel 1

Allgemeine Literatur

- 1 Aristoteles (1988). *Physik: Vorlesung über Natur ; griechisch-deutsch*. Philosophische Bibliothek. Meiner, Hamburg. ISBN 3-787-30713-3.
- 2 Aristoteles (1991). *Metaphysik*. Philosophische Bibliothek. Meiner, Hamburg, 3. verb. Auflage. ISBN 3-787-31021-5.
- 3 Devlin, K.J. (2002). *Muster der Mathematik: Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur: Übersetzt von Immo Diener*. Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg and Berlin, 2. Auflage. ISBN 3-827-41325-7.
- 4 Enzensberger, H.M. (1999). *Drawbridge up: Zugbrücke außer Betrieb*. Peters, Natick, Mass.. ISBN 1-568-81099-7.
- 5 Ifrah, G. (1989). *Universalgeschichte der Zahlen*. Campus-Verl, Frankfurt u.a.. ISBN 3-593-34192-1.

- 6 Kamlah, W. und Lorenzen, P. (1973). *Logische Propädeutik: Vorschule des vernünftigen Redens*, volume 227 von *BI-Hochschultaschenbücher*. Bibliographisches Institut, Mannheim [u.a.]. ISBN 3-411-05227-9.
- 7 Mittelstraß, J. (Hrsg.) (2005). *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie [in acht Bänden]*. Metzler, Stuttgart, 2. Neubearb. und wesentlich erg. Auflage. ISBN 3-476-02108-3.
- 8 Mittelstraß, J. (2014). *Die griechische Denkform: Von der Entstehung der Philosophie aus dem Geiste der Geometrie*. de Gruyter, Berlin [u.a.]. ISBN 978-3-110-33970-3.
- 9 Schmandt-Besserat, D. (1978). Vom Ursprung der Schrift. *Spektrum der Wissenschaft*, Dez. 1978, pages 4–13.
- 10 Schmandt-Besserat, D. (2006). *How writing came about: Paperback pr., abridged ed.* University of Texas Press, Austin, Tex., 2. Auflage. ISBN 0-292-77704-3.
- 11 Schmandt-Besserat, D. (2007). *When writing met art: From symbol to story*. University of Texas Press, Austin, Tex., 1. Auflage. ISBN 0-292-71334-7.
- 12 Schmidt, K. (2006). *Sie bauten die ersten Tempel*. Verlag C.H.Beck, München, 3. erw. und aktualisierte Auflage. ISBN 978-3-406-53500-0.

Fachliteratur

- 1 Ebbinghaus, H.D. (Hrsg.) (1992). *Zahlen*. Grundwissen Mathematik. Springer, Berlin [u.a.]. ISBN 3-540-55654-0.
- 2 Lorenzen, P. (1965). *Differential und Integral: Eine konstruktive Einführung in die klassische Analysis*. Akademische Verl.-Ges., Frankfurt am Main.
- 3 Lorenzen, P. (1987). *Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie*. Wissenschaftsverlag, Mannheim [u.a.]. ISBN 3-411-03154-9.