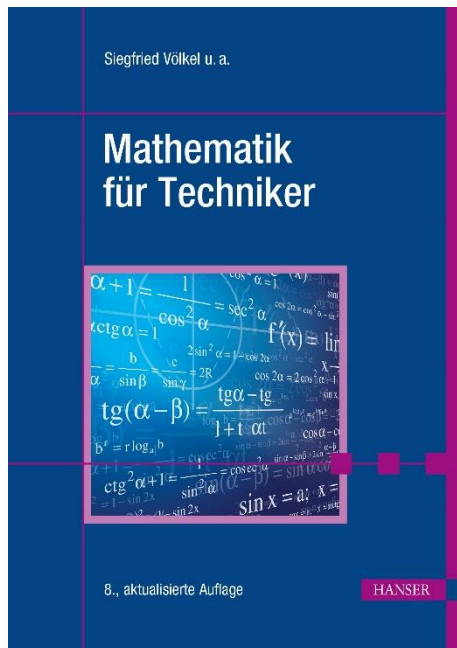


HANSER



Leseprobe

zu

Mathematik für Techniker

von Siegfried Völkel u.a.

Print-ISBN: 978-3-446-47416-1

E-Book-ISBN: 978-3-446-47430-7

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446474161>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

Vorwort

■ Vorwort zur 8. Auflage

Die vorliegende 8. Auflage wurde durchgesehen und aktualisiert. Des Weiteren wurden Lesereinschriften berücksichtigt, entsprechende Änderungen vorgenommen und Fehler behoben.

Leipzig, Mühlhausen, Halle und Berlin, im Februar 2022

Die Verfasser

■ Vorwort zur 7. Auflage

Die 7., neubearbeitete und erweiterte Auflage stellt eine umfangreiche Überarbeitung des in der Mathematikausbildung angehender Techniker bewährten Lehrbuches dar.

Der Inhalt orientiert sich an den Lehrplänen für die Technikerausbildung. Aus didaktischen Gründen folgt das Kapitel „Gleichungen und Ungleichungen“ nun direkt dem Kapitel „Rechenoperationen“. Der Abschnitt, der das Lösen von linearen Gleichungssystemen mit Determinanten behandelt, wurde im Umfang erhöht, dafür entfallen Rechenoperationen mit Matrizen. Die Kapitel Geometrie und Trigonometrie sind entsprechend den Lehrplananforderungen umfassend bearbeitet worden. Das Kapitel „Funktionen“ wurde neu strukturiert. Es schließen sich Zahlenfolgen und Grenzwerte an. Der Differenzial- und der Integralrechnung ist nun je ein eigenes Kapitel gewidmet, um die verschiedenen Grundanliegen dieser Teilgebiete der Infinitesimalrechnung hervorzuheben. Im Kapitel „Differenzialrechnung“ wird auch die geometrische Bedeutung der 2. Ableitung einer Funktion mit allen Konsequenzen zur Bestimmung von Maxima und Minima von Funktionen betrachtet. Der Abschnitt „Kurvendiskussion“ wurde vollständig überarbeitet. Neu aufgenommen wurde ein Abschnitt über das Aufstellen von Funktionsgleichungen mittels Ableitungen. Im Kapitel „Integralrechnung“ wurden Abschnitte über die Integration durch Substitution sowie die Berechnung des Rauminhalts von Rotationskörpern ergänzt. Anschließend folgen die Kapitel „Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung“ und „Einführung in die Statistik“. Neu ist hier ein Bezug im Bereich der Anwendungsaufgaben auf Taschenrechner mit Computeralgebrasystem und auf Tabellenkalkulationssoftware. Die Inhalte zu komplexen Zahlen waren bisher auf verschiedene Abschnitte verteilt. In die Neuauflage wurde ein separates Kapitel „Komplexe Zahlen“ aufgenommen. Auf vielfachen Wunsch der Leser dieses Buches

wurde die „Vektorrechnung“ als neues Kapitel hinzugefügt. Die Bilder und Grafiken zur Illustration der dargestellten mathematischen Sachverhalte wurden teilweise neu erstellt, an der großen Anzahl von Beispielen wurde festgehalten.

Die Autoren, die sämtlich über ein hohes Maß an Erfahrung in der Technikerausbildung verfügen, haben sich um größtmögliche Verständlichkeit und Anschaulichkeit bemüht.

Durch die Art der Stoffdarbietung eignet sich das Buch sowohl für den Gebrauch im Unterricht als auch zum Selbststudium. Zu diesem Zweck wurden die Kontrollfragen, die sich jedem Abschnitt anschließen, beibehalten und die Anzahl der Aufgaben, die weitgehend anwendungsorientiert und praxisnah sind, erhöht. Am Kapitelende sind zur Selbstkontrolle die Lösungen der Aufgaben eingefügt.

Für Kritik, Korrekturen, Anregungen und Hinweise inhaltlicher und didaktischer Art ist das Autorenteam dankbar, soll dieses Buch doch aus der Unterrichtspraxis zur Praxis, d. h. zum Gelingen des Mathematikunterrichts und zum Lernerfolg der Studierenden, beitragen.

Ein besonderer Dank gilt der Lektorin Frau Christine Fritsch vom Fachbuchverlag Leipzig, der es gelungen ist, das fünfköpfige Autorenteam mit großer Geduld zu koordinieren und dafür zu sorgen, dass dieses Unterrichtswerk in einer neuen Auflage vorliegt. Auch Frau Katrin Wulst gebührt Dank für die technische Unterstützung und die Herstellung dieses Buches. Die Zusammenarbeit mit beiden Fachfrauen war stets sehr angenehm.

Möge dieses Buch dazu beitragen, dass die Vermittlung mathematischer Sachverhalte und Zusammenhänge im Rahmen der Technikerausbildung gelingt!

Leipzig, im Mai 2014

Die Verfasser

Inhalt

1	Rechenoperationen	13
1.1	Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik	13
1.1.0	Vorbemerkung	13
1.1.1	Begriff der Menge	13
1.1.2	Relationen zwischen Mengen	16
1.1.3	Operationen mit Mengen	19
1.2	Zahlenbereiche	23
1.2.0	Vorbemerkung	23
1.2.1	Bereich der reellen Zahlen und seine Teilbereiche	23
1.2.2	Zahlensysteme	25
1.2.3	Intervalle, absoluter Betrag, Runden von Zahlen	27
1.3	Rechenoperationen erster und zweiter Stufe	32
1.3.0	Vorbemerkung	32
1.3.1	Grundbegriffe	32
1.3.2	Rechenoperationen mit Zahlen	34
1.3.3	Algebraische Summen	35
1.3.4	Bruchrechnung	39
1.3.5	Proportionen	44
1.3.6	Summenzeichen	49
1.4	Rechenoperationen dritter Stufe	51
1.4.0	Vorbemerkung	51
1.4.1	Rechnen mit Potenzen und Wurzeln	51
1.4.2	Rechnen mit Logarithmen	61
1.4.3	Potenz eines Binoms	68
1.5	Aufgaben	71
1.6	Lösungen	80
2	Gleichungen und Ungleichungen	86
2.1	Gleichungen mit einer Variablen	86
2.1.0	Vorbemerkung	86
2.1.1	Grundbegriffe	86
2.1.2	Lösen von algebraischen Gleichungen	90
2.1.3	Lösen von transzendenten Gleichungen	99
2.1.4	Lösen von Gleichungen durch Näherungsverfahren	104
2.2	Ungleichungen	110
2.2.0	Vorbemerkung	110
2.2.1	Grundbegriffe	110
2.2.2	Einfache Typen linearer Ungleichungen	111
2.3	Lineare Gleichungssysteme	113
2.3.0	Vorbemerkung	113

2.3.1	Herkömmliche Lösungsverfahren	114
2.3.2	Lösbarkeitsbetrachtungen	117
2.3.3	Gauß'scher Algorithmus	120
2.3.4	Determinantenverfahren	125
2.4	Aufgaben	131
2.5	Lösungen	138

3 Geometrie 143

3.1	Planimetrie	143
3.1.0	Vorbemerkung	143
3.1.1	Grundbegriffe	143
3.1.2	Winkel an sich schneidenden Geraden	146
3.1.3	Bewegungen in der Ebene, Kongruenz, Symmetrie	147
3.1.4	Grundkonstruktionen	151
3.1.5	Ähnlichkeit	154
3.1.6	Allgemeines Dreieck	156
3.1.7	Rechtwinkliges, gleichschenkliges und gleichseitiges Dreieck	163
3.1.8	Viereck	166
3.1.9	Regelmäßiges n -Eck	168
3.1.10	Kreis	170
3.1.11	Flächeninhalte	174
3.2	Stereometrie	180
3.2.0	Vorbemerkung	180
3.2.1	Quader	181
3.2.2	Prisma und Pyramide	183
3.2.3	Prismatoid	188
3.2.4	Zylinder und Kegel	190
3.2.5	Cavalierisches Prinzip	195
3.2.6	Kugel und Kugelteile	195
3.3	Aufgaben	200
3.4	Lösungen	208

4 Trigonometrie 215

4.1	Goniometrie	215
4.1.0	Vorbemerkung	215
4.1.1	Winkelmessung	215
4.1.2	Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck	216
4.1.3	Winkelfunktionen für beliebige Winkel	222
4.1.4	Quadrantenrelationen	225
4.1.5	Zusammenhang zwischen den Funktionswerten eines Winkels ..	231
4.1.6	Additionstheoreme	233
4.2	Dreiecksberechnung	237
4.2.1	Allgemeines	237
4.2.2	Sinus- und Kosinussatz	238
4.2.3	Grundaufgaben der Dreiecksberechnung	244
4.2.4	Weitere Anwendungen	246
4.3	Aufgaben	252
4.4	Lösungen	258

5 Funktionen 263

5.0	Vorbemerkung	263
5.1	Der Funktionsbegriff	263
5.1.1	Die Definition einer Funktion	263
5.1.2	Darstellungsformen von Funktionen	264
5.1.3	Eigenschaften von Funktionen	269
5.1.4	Die Umkehrfunktion	271
5.2	Lineare Funktionen (Geraden)	274
5.2.1	Die analytischen Darstellungsarten linearer Funktionen	274
5.2.2	Die lineare Funktion und ihre Umkehrfunktion	277
5.2.3	Lagebeziehungen zwischen Geraden	279
5.3	Quadratische Funktionen (Parabeln)	283
5.3.1	Die Darstellungsarten quadratischer Funktionen	283
5.3.2	Die Umwandlung zwischen den Darstellungsarten quadratischer Funktionen	288
5.3.3	Die Umkehrfunktion der quadratischen Funktion	291
5.4	Potenz- und Wurzelfunktionen	293
5.4.1	Potenzfunktionen und ihre Eigenschaften	293
5.4.2	Wurzelfunktionen und ihre Eigenschaften	295
5.5	Ganzrationale Funktionen	296
5.6	Gebrochenrationale Funktionen	300
5.7	Exponential- und Logarithmusfunktionen	303
5.7.1	Exponentialfunktionen und ihre Eigenschaften	303
5.7.2	Logarithmusfunktionen und ihre Eigenschaften	306
5.8	Trigonometrische Funktionen und ihre Umkehrfunktionen	307
5.9	Der Einfluss von Funktionsparametern auf Funktionsgraphen	313
5.10	Bestimmung von Funktionsgleichungen	322
5.11	Aufgaben	326
5.12	Lösungen	333

6 Zahlenfolgen 341

6.0	Vorbemerkung	341
6.1	Grundbegriffe	341
6.2	Arithmetische Folgen	344
6.3	Geometrische Folgen	348
6.4	Anwendungsbeispiele der geometrischen Folge	350
6.5	Grenzwert einer Zahlenfolge	355
6.6	Grenzwert einer Funktion	358
6.6.1	Grenzwert einer Funktion an der Stelle $x = a$	358
6.6.2	Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$	362
6.7	Aufgaben	363
6.8	Lösungen	366

7 Differenzialrechnung 368

7.0	Vorbemerkung	368
7.1	Grundbegriffe	368
7.2	Ableitung der Potenzfunktion	373
7.3	Ableitung einer konstanten Funktion und einer Funktion mit konstantem Faktor	375
7.4	Ableitung einer Summe von Funktionen	375
7.5	Differenzial einer Funktion	376
7.6	Weitere Grundregeln der Differenzialrechnung	380
7.6.1	Ableitung eines Produktes von Funktionen	380
7.6.2	Ableitung eines Quotienten zweier Funktionen	381
7.7	Regeln für die Ableitung weiterer Funktionen	383
7.8	Höhere Ableitungen	385
7.9	Geometrische Interpretation der ersten und zweiten Ableitung	386
7.10	Kurvendiskussion	391
7.11	Extremwertaufgaben	397
7.12	Aufstellen von Funktionsgleichungen mittels der Ableitungen	400
7.13	Aufgaben	403
7.14	Lösungen	406

8 Integralrechnung 412

8.0	Vorbemerkung	412
8.1	Unbestimmtes Integral	412
8.2	Bestimmtes Integral	415
8.3	Eigenschaften bestimmter Integrale	420
8.4	Bestimmtes Integral als Grenzwert einer Summenfolge	421
8.5	Flächeninhalte ebener Flächen zwischen einer Kurve und der x -Achse	425
8.6	Flächen zwischen zwei Kurven	427
8.7	Integration durch Substitution	430
8.8	Der Rauminhalt von Rotationskörpern	432
8.9	Numerische Integration	435
8.10	Aufgaben	439
8.11	Lösungen	440

9 Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung 442

9.0	Vorbemerkung	442
9.1	Zufällige Erscheinungen und Ereignisse	442
9.2	Wahrscheinlichkeitsbegriff	445
9.3	Anzahl von Ergebnissen und Wahrscheinlichkeiten mehrstufiger Zufallsversuche	452
9.4	Simulation von Zufallsversuchen	465
9.5	Aufgaben	470
9.6	Lösungen	472

10	Einführung in die Statistik	474
10.0	Vorbemerkung	474
10.1	Statistische Erhebung, Auswertung und Darstellung von Daten	474
10.2	Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilung	494
10.3	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	498
10.4	Binomialverteilte Zufallsgrößen	501
10.5	Anwendungen zur Binomialverteilung	503
10.6	Aufstellen und Testen von Hypothesen	509
10.7	Anwendungsaufgaben	513
10.8	Die Poisson-Verteilung	515
10.9	Die Normalverteilung	518
10.10	Anwendungen der Normalverteilung	523
10.11	Exponentialverteilung	525
10.12	Aufgaben	526
10.13	Lösungen	531
11	Komplexe Zahlen	536
11.0	Vorbemerkung	536
11.1	Die arithmetische Form der komplexen Zahlen	536
11.1.1	Imaginäre und komplexe Zahlen	536
11.1.2	Rechnen mit komplexen Zahlen in der arithmetischen Form	540
11.1.3	Die Darstellung komplexer Zahlen in der Gauß'schen Zahlen- ebene	543
11.2	Die trigonometrische Form der komplexen Zahlen	545
11.3	Die Exponentialform der komplexen Zahlen	549
11.3.1	Die Multiplikation und die Division komplexer Zahlen in der Ex- ponentialform	549
11.3.2	Das Potenzieren, das Radizieren und das Logarithmieren kom- plexer Zahlen	551
11.4	Aufgaben	554
11.5	Lösungen	555
12	Vektorrechnung	559
12.0	Vorbemerkung	559
12.1	Punkte und Vektoren im kartesischen Koordinatensystem	559
12.1.1	Punkte im kartesischen Koordinatensystem	559
12.1.2	Vektoren im kartesischen Koordinatensystem	560
12.2	Rechnen mit Vektoren	564
12.2.1	Addition und Subtraktion von Vektoren	564
12.2.2	Die Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen	567
12.2.3	Das Skalarprodukt	569
12.2.4	Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt)	575
12.3	Die vektorielle Beschreibung von Geraden	578
12.3.1	Die Vektorgleichung einer Geraden	578
12.3.2	Die Lagebeziehungen zwischen Geraden	580
12.4	Die vektorielle Beschreibung von Ebenen	583
12.4.1	Die Vektorgleichung einer Ebene	583

12.4.2	Die Lagebeziehungen zwischen einer Ebene und einer Geraden ..	587
12.4.3	Die Lagebeziehung zwischen Ebenen	589
12.4.4	Der Normalenvektor einer Ebene	593
12.5	Aufgaben	597
12.6	Lösungen	604
Sachwortverzeichnis		608

1

Rechenoperationen

■ 1.1 Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik

1.1.0 Vorbemerkung

Die Mengenlehre hat sich seit ihrer Begründung durch Georg Cantor (1845–1918) zu einer grundlegenden mathematischen Disziplin entwickelt. Viele Gebiete der Mathematik und der Logik wurden durch sie entscheidend beeinflusst.

Die Logik ist eine Wissenschaft, in der die allgemeinste Struktur des richtigen Denkens untersucht wird.

Mithilfe der Mengenlehre und Logik lassen sich mathematische Zusammenhänge präzise und übersichtlich darstellen. Deshalb werden in diesem Abschnitt Grundbegriffe und -beziehungen aus beiden Gebieten eingeführt. Ihre Anwendung in den folgenden Abschnitten wird mit dazu beitragen, das Erkennen der dargestellten Zusammenhänge zu erleichtern.

1.1.1 Begriff der Menge

Für den Mengenbegriff gab Cantor die *Erklärung*

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung M bestimmter, wohlunterschiedener Objekte m unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte m heißen die **Elemente** von M .

Mengen werden mit Großbuchstaben bezeichnet. Die Elemente einer Menge werden durch geschweifte Klammern zusammengefasst.

Ein Objekt a ist entweder ein Element einer Menge M oder nicht. Man schreibt:

$a \in M$, gelesen „ a (ist) Element (von) M “;
 $a \notin N$, gelesen „ a (ist) nicht Element (von) N “.

Beispiele

- 1.1 Die Menge M aller positiven Zahlen, die Teiler von 12 sind: $M = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$. Es ist z. B. $3 \in M$, aber $5 \notin M$.
- 1.2 Die Menge L aller Lösungen der Gleichung $x^2 = 16$: $L = \{-4; 4\}$.

- 1.3 Die Menge K aller Primzahlen enthält unendlich viele Elemente: $K = \{2; 3; 5; 7; \dots\}$.
- 1.4 Die Menge P aller geraden Primzahlen enthält nur ein Element: $P = \{2\}$.
- 1.5 Die Menge B aller Hauptstädte der deutschen Bundesländer enthält 16 Elemente: $B = \{\text{Hauptstadt Bremen; Dresden; München; } \dots \text{ Stuttgart}\}$. Es ist „Schwerin“ $\in B$, aber „Meißen“ $\notin B$. ■

Während die Umgangssprache unter einer Menge eine Vielzahl von Elementen versteht, können Mengen im Sinne der angegebenen Erklärung auch aus wenigen Elementen bzw. aus keinem Element bestehen.

Eine Menge, die nur ein Element enthält, heißt **Einemenge**. Wenn sie zwei verschiedene Elemente enthält, heißt sie **Zweiermenge** usw. Eine Menge, die kein Element enthält, heißt **leere Menge** (Symbol: $\emptyset$). Es ist $\emptyset = \{ \}$.

Beispiele

- 1.6 Die Gleichung $x^2 = -4$ hat keine reelle Lösung (denn das Quadrat einer reellen Zahl kann nicht negativ sein). Die Menge ihrer Lösungen ist leer: $L_1 = \{ \} = \emptyset$.
- 1.7 Die Gleichung $2x = 0$ hat die Lösung 0 (denn $2 \cdot 0 = 0$). Die Menge ihrer Lösungen ist die **Einemenge** $L_2 = \{0\}$. L_2 ist nicht die leere Menge, denn sie enthält ein Element (die Zahl 0), während L_1 in *Beispiel 1.6* kein Element enthält. ■

Zwischen den Begriffen der Mengenlehre und der Logik besteht ein enger Zusammenhang. Das gilt auch für den Begriff „Menge“.

Man kann das Prinzip der Mengenbildung mit den Begriffen „Aussage“ und „Aussageform“, die Grundbegriffe der Logik sind, erklären.

Eine **Aussage** ist ein Gebilde, das einen Sachverhalt widerspiegelt. Wenn der Sachverhalt richtig widerspiegelt wird, ist die Aussage **wahr**, anderenfalls ist sie **falsch**.

Die Eigenschaften „wahr (w)“ und „falsch (f)“ heißen **Wahrheitswerte**. Für Aussagen gilt der

Satz der Zweiwertigkeit 1.1

Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Es gibt also

1. keinen dritten Wahrheitswert,
2. keine Aussage, die sowohl wahr als auch falsch ist.

Aussagen werden schriftlich (oder sprachlich) durch Aussagesätze ausgedrückt. Diese können auch mathematische Beziehungen sein.

Beispiele

- 1.8 „Dresden liegt an der Elbe.“ (w)
- 1.9 „7 ist durch 4 teilbar.“ (f)
- 1.10 $3 + 4 = 7$ (w)
- 1.11 $3 + 4 = 10$ (f)

1.12 $3 + 4 > 6$ (w)

1.13 $3 + 4 < 5$ (f) ■

Die *Beispiele 1.10* und *1.11* sind Gleichungen (weil sie ein Gleichheitszeichen enthalten), von denen die eine wahr und die andere falsch ist. Aus dem Begriff „Gleichung“ kann demnach nicht auf den Wahrheitswert geschlossen werden. Entsprechendes gilt für die Ungleichungen in den *Beispielen 1.12* und *1.13*.

Aussagen sind daran erkennbar, dass sie einen (und nur einen) Wahrheitswert haben. Dieser lässt sich allerdings nicht immer feststellen.

Beispiele

1.14 $3 + 5$

1.15 „Komm her!“



1.17 $ab + c$

1.18 $3 + 5 = 8$

1.19 „Der Monat März hat 30 Tage.“

1.20 „Auf anderen Sternen gibt es vernunftbegabte Lebewesen.“

1.21 „Am 1. Juni 1750 regnete es in Berlin.“ ■

Die *Beispiele 1.14* bis *1.17* sind keine Aussagen; *1.18* ist eine wahre, *1.19* eine falsche Aussage; *1.20* und *1.21* sind Aussagen, deren Wahrheitswert noch nicht bzw. nicht mehr feststellbar ist.

Die Gebilde der beiden folgenden Beispiele haben keinen Wahrheitswert, sind also keine Aussagen. Sie werden aber zu Aussagen, wenn für u bzw. x Objekte (Städtenamen bzw. Zahlen) eingesetzt werden.

Beispiele

1.22 „ u ist Hauptstadt eines deutschen Bundeslandes.“ Wenn z. B. $u = \text{„Dresden“}$ ist, entsteht eine wahre Aussage, für $u = \text{„Leipzig“}$ ergibt sich eine falsche Aussage.1.23 $x^2 = 16$ wird für $x = 4$ und für $x = -4$ zu einer wahren, für jede andere Zahl zu einer falschen Aussage. ■

Für $x^2 = 16$ könnte auch geschrieben werden: $(\dots)^2 = 16$. Demnach steht x für eine Leerstelle in der Gleichung.

- Ein Zeichen, das für eine Leerstelle steht, heißt **Variable (Veränderliche)**. Mithilfe des Variablenbegriffs wird definiert:
- Eine **Aussageform** ist ein Gebilde, das mindestens eine Variable enthält und durch Belegen dieser Variablen zu einer Aussage wird.

Die Gebilde in den *Beispielen 1.22* und *1.23* sind demnach Aussageformen.

Für die Objekte, mit denen die Variablen belegt werden können, ist ein Bereich zu wählen (**Grundbereich**), und zwar so, dass beim Belegen sinnvolle Aussagen entstehen (für *Beispiel 1.23* wären z. B. Städtenamen kein möglicher Grundbereich). Wenn sich beim Belegen einer Variablen eine wahre Aussage ergibt, so sagt man „die Aussageform wird erfüllt (gelöst)“, und das Objekt heißt **Erfüllung (Lösung)** der Aussageform. Alle Lösungen können zu einer Menge zusammengefasst werden.

Prinzip der Mengenbildung

Wenn eine Aussageform für die Objekte eines Grundbereichs vorliegt, so bilden alle Objekte, die diese Aussageform erfüllen (lösen), eine **Menge**.

Die Aussageform drückt eine gemeinsame Eigenschaft aller Elemente der Menge aus. Wenn die Aussageform mit $H(x)$ bezeichnet wird (d. h. ein Gebilde, das die Variable x enthält, gelesen: „ H von x “), so kann man schreiben:

$$M = \{x: H(x)\}, \quad \text{gelesen: „}M \text{ ist die Menge aller (Elemente) } x, \text{ für die } H(x) \text{ gilt“}.$$

Beispiele

- 1.22 (Fortsetzung) Die Lösungsmenge ist B (siehe *Beispiel 1.5*).
Man kann schreiben $B = \{u: u \text{ ist Hauptstadt eines deutschen Bundeslandes}\}$.
- 1.23 (Fortsetzung) Die Lösungsmenge ist L (siehe *Beispiel 1.2*).
Es ist $L = \{\pm 4\} = \{x: x^2 = 16\}$, falls der Grundbereich die Menge der reellen Zahlen ist. Wenn der Grundbereich auf die Menge der natürlichen Zahlen eingeschränkt wird, ändert sich die Lösungsmenge: $L_{\mathbb{N}} = \{4\}$. ■

Mengen lassen sich demnach auf zwei Arten darstellen: durch Angabe der Elemente oder Angabe der die Menge definierenden Aussageform. Eine Menge heißt **Allmenge**, wenn sie alle Objekte des Grundbereichs enthält. Im *Abschnitt 1.1* dieses Buches wird sie mit U bezeichnet.

Beispiel

- 1.24 Grundbereich: Gesamtheit aller reellen Zahlen.
Es gilt $\{x: x + x = 2x\} = U$, denn die Gleichung wird durch jede reelle Zahl gelöst. ■

Kontrollfragen

- 1.1 Wie ist nach Cantor der Begriff der Menge erklärt?
- 1.2 Was ist eine Aussage, und woran ist sie erkennbar?
- 1.3 Was ist eine Variable?
- 1.4 Was ist eine Aussageform, und wie lässt sich mit ihrer Hilfe das Prinzip der Mengenbildung erklären?

Aufgaben: 1.1 und 1.2

1.1.2 Relationen zwischen Mengen**Definition 1.1**

Zwei Mengen A und B heißen **gleich** genau dann, wenn sie dieselben Elemente haben.

Schreibweise: $A = B$, gelesen: „ A (ist) gleich B “.

A heißt **Teilmenge** von B genau dann, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

Schreibweise: $A \subseteq B$, gelesen: „ A (ist) Teilmenge von B “.

Die Teilmengenrelation $A \subseteq B$ wird auch Inklusion genannt.

Mengen kann man durch Punktmengen in der Ebene veranschaulichen. Alle Punkte, die von einer geschlossenen Kurve begrenzt werden, sollen Elemente der Menge sein. In den *Bildern 1.1* und *1.2* sind $A \subseteq B$ und $A = B$ dargestellt. Die Rechteckfläche soll den Grundbereich (die Allmenge) U darstellen.

Folgerungen:

1. Wenn $A \subseteq B$ ist, so ist $B \supseteq A$. A wird auch Untermenge von B , und entsprechend B Obermenge von A , genannt.
2. Die Gleichheit $A = B$ ist ein Sonderfall von $A \subseteq B$. Es ist $A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ ist, d. h., wenn jedes Element von A auch Element von B und jedes Element von B auch Element von A ist.
3. Wenn $A \subseteq B$ ist und B mindestens ein Element enthält, das nicht Element von A ist, so heißt A **echte Teilmenge** von B : $A \subset B$.
4. Für die leere Menge, eine beliebige Menge A und die Allmenge gilt:

$$\emptyset \subseteq A; \quad A \subseteq U \quad (1.1)$$

Zwei Mengen A und B , für die weder die Teilmengen- noch die Gleichheitsrelation gilt, können gemeinsame Elemente haben, aber dann enthält jede Menge mindestens ein Element, das nicht Element der anderen Menge ist (*Bild 1.3*). Falls A und B keine gemeinsamen Elemente haben, heißen sie **disjunkte (elementfremde) Mengen** (*Bild 1.4*).

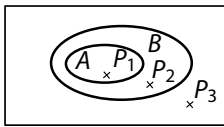


Bild 1.1

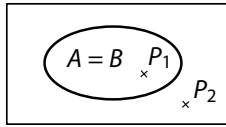


Bild 1.2

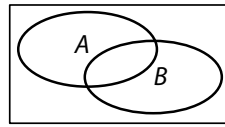


Bild 1.3

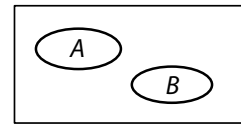


Bild 1.4

Beispiele

- 1.25 Grundbereich: $U = \{1; 2; \dots; 20\}$ (Menge der ganzen Zahlen von 1 bis 20).

Wenn $A = \{x: x \text{ ist teilbar durch } 6\} = \{6; 12; 18\}$ und
 $B = \{x: x \text{ ist teilbar durch } 3\} = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$,
 so ist $A \subseteq B$ (A ist sogar echte Teilmenge von B : $A \subset B$).

- 1.26 Grundbereich: Menge aller Vierecke.

Wenn A die Menge aller Quadrate ist und B die Menge aller gleichseitigen Rechtecke, also
 $A = \{x: x \text{ ist ein Quadrat}\}$, $B = \{x: x \text{ ist gleichseitiges Rechteck}\}$, so ist $A = B$.

- 1.27 Welche Relationen bestehen zwischen $P = \{3; 5; 7\}$, $Q = \{5; 7; 10\}$, $R = \{5; 7; 9; 10\}$ und $S = \{4; 6\}$?

Lösung: P und Q enthalten gemeinsame Elemente, es besteht aber keine Teilmengenrelation; für P und R gilt das Gleiche; P und S sind disjunkt. Es ist $Q \subset R$; Q und S und gleichfalls R und S sind disjunkt. ■

Zusammenhang mit logischen Operationen

In *Abschnitt 1.1.1* wurde festgestellt, dass zwischen Mengenlehre und Logik ein enger Zusammenhang besteht. Das gilt auch für die in diesem Abschnitt eingeführten Relationen:

- (1) $A \subseteq B$: Für alle Elemente des Grundbereichs gilt (vgl. *Bild 1.1*) „wenn $x \in A$ erfüllt ist, so muss auch $x \in B$ erfüllt sein“ (z. B. Punkt P_1), aber „wenn $x \in B$ erfüllt ist, so kann $x \in A$ erfüllt sein, muss aber nicht“ (z. B. liegen P_1 und P_2 beide in B , aber P_2 liegt nicht in A). In der Logik gibt es für zwei Aussagen (oder auch Aussageformen) p, q die Verknüpfung $p \Rightarrow q$. Sie heißt **Implikation** und wird gelesen „wenn p , so (muss) q “ (bei Vertauschen von p und q „wenn q , so kann p “). Die Bedingung p heißt hinreichend für q , q heißt notwendig für p . Zwischen Teilmengenrelation und Implikation besteht demnach der Zusammenhang:

$A \subseteq B$ gilt genau dann, wenn $x \in A \Rightarrow x \in B$ ($x \in B$ folgt aus $x \in A$).

Die Bedingung $x \in A$ ist hinreichend für $x \in B$, aber nicht notwendig; andererseits ist $x \in B$ notwendig für $x \in A$, aber nicht hinreichend. Für die Punktmenge in *Bild 1.1* bedeutet das: Damit ein Punkt in B liegt, ist es hinreichend, dass er in A liegt (P_1), aber nicht notwendig (auch P_2 liegt in B). Damit ein Punkt in A liegt, ist es notwendig, dass er in B liegt (denn wenn er nicht in B liegt, kann er auch nicht in A liegen: P_3); die Bedingung ist aber nicht hinreichend (P_2 liegt zwar in B , aber nicht in A).

- (2) $A = B$: Für alle Elemente des Grundbereichs gilt (vgl. *Bild 1.2*) „wenn $x \in A$, so muss $x \in B$ “ und auch „wenn $x \in B$, so muss $x \in A$ “. In der Logik gibt es eine entsprechende Verknüpfung. Sie heißt **Äquivalenz** (Gleichwertigkeit): $p \Leftrightarrow q$, gelesen „genau dann q , wenn p “. Da $p \Leftrightarrow q$ sowohl $p \Rightarrow q$ als auch $q \Rightarrow p$ bedeutet, heißt jede der Bedingungen p, q ist notwendig und hinreichend für die andere.

Die Äquivalenz wird auch gelesen „dann und nur dann q , wenn p “.

Zwischen Gleichheitsrelation und Äquivalenz besteht demnach der Zusammenhang:

$A = B$ gilt genau dann, wenn $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Da äquivalente Aussageformen gleiche Mengen erklären, wird besonders die letzte Lesart genutzt, wenn ein neuer Begriff definiert wird.

Beispiele

- 1.28 Für die Mengen in *Beispiel 1.25* gilt wegen $A \subseteq B$ „ x ist teilbar durch 6“ $A \Rightarrow B$ „ x ist teilbar durch 3“. Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, so muss sie auch durch 3 teilbar sein, d. h., die Teilbarkeit durch 6 ist hinreichende Bedingung für die Teilbarkeit durch 3 (aber keine notwendige). Andererseits gilt: Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, so kann sie durch 6 teilbar sein, d. h., Teilbarkeit durch 3 ist notwendige Bedingung für die Teilbarkeit durch 6 (aber keine hinreichende).

- 1.29 Grundbereich: Menge aller Vierecke.

Welche der beiden Bedingungen „ x ist Rechteck“, „ x ist Quadrat“ ist notwendige Bedingung für die andere?

Lösung: Für $R = \{x: x \text{ ist Rechteck}\}$ und $Q = \{x: x \text{ ist Quadrat}\}$ gilt $Q \subseteq R$. Folglich gilt für die Aussageformen „ x ist Quadrat“ $\Rightarrow$ „ x ist Rechteck“.

Da die notwendige Bedingung rechts vom Implikationszeichen steht, ist „ x ist Rechteck“ eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für „ x ist Quadrat“.

- 1.30 Die Bedingungen „ x ist Rhombus“ und „ x ist gleichseitiges Viereck“ sind miteinander zu vergleichen.

Lösung: Es ist $\{x: x \text{ ist Rhombus}\} = \{x: x \text{ ist gleichseitiges Viereck}\}$, folglich „ x ist Rhombus“ $\Leftrightarrow$ „ x ist gleichseitiges Viereck“, d. h., „ein Viereck ist ein Rhombus genau dann, wenn es gleichseitig ist“. Jede der beiden Bedingungen ist notwendig und hinreichend für die andere.

Das Beispiel zeigt, wie mithilfe einer Äquivalenz ein Begriff (der Begriff „Rhombus“) definiert werden kann. ■

Kontrollfragen

- 1.5 Wie ist die Teilmengenrelation definiert?
- 1.6 Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit eine Menge eine echte Teilmenge einer anderen ist?
- 1.7 Mithilfe welcher Wörter ist eine Implikation $p \Rightarrow q$ zu formulieren? Wie ist sie nach Vertauschen von p und q zu lesen? Welche Art von Bedingung sind p bzw. q ?
- 1.8 Mithilfe welcher Wörter ist eine Äquivalenz zu formulieren? Welche Art von Bedingung sind p und q ?

Aufgaben: 1.3 und 1.4

1.1.3 Operationen mit Mengen

Bei einer Mengenoperation wird aus zwei Mengen eine neue gebildet. Die wichtigsten Operationen sind Durchschnitt, Vereinigung und Differenz.

Definition 1.2

Gegeben seien zwei Mengen A und B .

Der **Durchschnitt** $A \cap B$ (gelesen: „ A geschnitten mit B “) enthält alle Elemente, die gemeinsame Elemente von A und B sind (Bild 1.5).

Die **Vereinigung** $A \cup B$ (gelesen: „ A vereinigt mit B “) enthält alle Elemente, die Element von mindestens einer der Mengen A , B sind (Bild 1.6).

Die **Differenz** $A \setminus B$ (gelesen: „ A ohne B “) enthält alle Elemente von A , die nicht Element von B sind (Bild 1.7).

Entsprechend enthält $B \setminus A$ alle Elemente von B , die nicht Element von A sind (Bild 1.8).

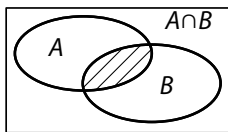


Bild 1.5

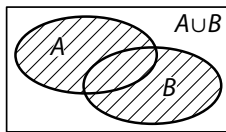


Bild 1.6

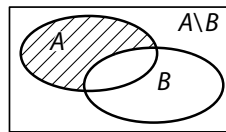


Bild 1.7

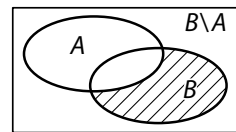


Bild 1.8

Beispiel

- 1.31 Mit $A = \{a; b; c; d\}$ und $B = \{c; d; e; f\}$ sind Durchschnitt, Vereinigung und Differenzmengen zu bilden.

Lösung:

$$A \cap B = \{c; d\} \quad A \cup B = \{a; b; c; d; e; f\}$$

$$A \setminus B = \{a; b\} \quad B \setminus A = \{e; f\}$$



Allgemein gilt (vgl. *Bilder 1.5 bis 1.8*):

$$A \cap B \subseteq A \cup B \quad (1.2)$$

$$A \setminus B \subseteq A; \quad B \setminus A \subseteq B \quad (1.3)$$

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B); \quad B \setminus A = B \setminus (A \cap B) \quad (1.4)$$

Beispiele

- 1.32 Es seien $A = \{c; d\}$ und $B = \{a; b; c; d; e\}$, d. h., $A \subseteq B$.

Dann ist

$$A \cap B = \{c; d\} = A; \quad A \cup B = \{a; b; c; d; e\} = B$$

und nach *Gln. (1.4)*

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = \{c; d\} \setminus \{c; d\} = \emptyset$$

$$B \setminus A = B \setminus (A \cap B) = \{a; b; c; d; e\} \setminus \{c; d\} = \{a; b; e\}$$

- 1.33 Es seien $A = \{2; 4\}$ und $B = \{10; 12; 14\}$, d. h., A und B sind disjunkt.

Dann ist

$$A \cap B = \emptyset; \quad A \cup B = \{2; 4; 10; 12; 14\}$$

$$A \setminus B = \{2; 4\} \setminus \emptyset = \{2; 4\} = A$$

$$B \setminus A = \{10; 12; 14\} \setminus \emptyset = \{10; 12; 14\} = B \quad \blacksquare$$

Aus diesen Beispielen folgt durch Verallgemeinerung:

1. Wenn eine Menge A Teilmenge einer Menge B ist, so ist der Durchschnitt gleich der Teilmenge, die Vereinigung gleich der Obermenge, und die Differenz $A \setminus B$ ist leer:

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A, \quad A \cup B = B, \quad A \setminus B = \emptyset$$

2. Wenn zwei Mengen A, B disjunkt sind, so ist der Durchschnitt leer ($A \cap B = \emptyset$). Für die Differenzmengen gilt:

$$A \setminus B = A; \quad B \setminus A = B.$$

Eigenschaften des Durchschnitts und der Vereinigung von Mengen sind:

Kommutativität

$$A \cap B = B \cap A; \quad A \cup B = B \cup A \quad (1.5)$$

Assoziativität

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C; \\ A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \end{aligned} \quad (1.6)$$

Distributivität

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C); \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Idempotenz

$$A \cap A = A; \quad A \cup A = A \quad (1.8)$$

Kommutativität und Idempotenz sind offensichtlich, die beiden anderen Eigenschaften lassen sich an Beispielen leicht nachprüfen.

Die Differenz zweier Mengen ist i. Allg. weder kommutativ noch assoziativ:

$$A \setminus B \neq B \setminus A, \quad A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$$

Beispiel

- 1.34 Für $A = \{a; b; c; d\}$, $B = \{b; c; d; e\}$ und $C = \{c; d; e; f\}$ ist zu zeigen, dass die Differenz nicht assoziativ ist.

Lösung: Es ist

$$A \setminus (B \setminus C) = A \setminus \{b\} = \{a; c; d\}$$

$$(A \setminus B) \setminus C = \{a\} \setminus C = \{a\}$$

$$\{a; c; d\} \neq \{a\}, \quad \text{d. h.,} \quad A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C \quad \blacksquare$$

Als letzte Mengenoperation wird das Bilden des Komplements eingeführt.

Definition 1.3

Das **Komplement** $\bar{A}$ einer Menge A enthält alle Elemente des Grundbereichs (der Allmenge U), die nicht Element von A sind (*Bild 1.9*).

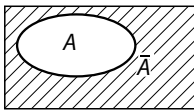


Bild 1.9

A und $\bar{A}$ sind demnach disjunkte Mengen: $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Ferner gilt: $A \cup \bar{A} = U$; $U \setminus A = \bar{A}$; $U \setminus \bar{A} = A$.

Zweifache Komplementbildung hebt sich auf:

$$\bar{\bar{A}} = A \quad (1.9)$$

Zusammenhang mit logischen Operationen

Eine Verknüpfung zweier Aussagen (oder Aussageformen) p und q , die ausdrückt, dass bei zwei Sachverhalten sowohl der eine als auch der andere gilt, heißt **Konjunktion** $p \wedge q$, gelesen: „ p und q “. Wenn von zwei Sachverhalten mindestens einer gilt, heißt die Verknüpfung **Alternative** $p \vee q$, gelesen: „ p oder q “. Mit Konjunktion und Alternative kann man Durchschnitt und Vereinigung von Mengen definieren:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

(d. h., x ist genau dann ein Element des Durchschnitts, wenn es Element der einen „und (auch)“ der anderen Menge ist);

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

(d. h., x ist genau dann ein Element der Vereinigung, wenn es ein Element der einen „oder“ der anderen Menge ist (oder auch ein Element beider Mengen ist)).

Das Bindewort „oder“ schließt bei der Alternative den Fall mit ein, dass beide Sachverhalte gelten. Deshalb wird es auch „einschließendes „oder““ genannt. Das Bindewort „oder“ kann aber auch ausdrücken, dass nur einer der beiden Sachverhalte gilt („ausschließendes „oder““, „entweder – oder“), z. B. in dem Satz „Jede ganze Zahl ist (entweder) gerade oder ungerade“. Eine Verknüpfung mit dem ausschließenden „oder“ ist keine Alternative.

Eine Aussage (oder Aussageform) p , mit der zu einem gegebenen Sachverhalt der entgegengesetzte ausgedrückt wird, heißt **Negation** $\neg p$ (gelesen: „nicht p “). Sie entsteht aus p durch Vorsetzen von „es ist nicht wahr, dass ...“. Wenn eine Menge A die Lösungen der Aussageform $H(x)$ als Elemente hat, so wird das Komplement $\bar{A}$ aus den Lösungen der Negation von $H(x)$ gebildet.

Für die Negation von p ist auch die Schreibweise $\bar{p}$ üblich.

Beispiele

- 1.35 Für $M = \{x: x \text{ ist teilbar durch } 2\}$ und $N = \{x: x \text{ ist teilbar durch } 3\}$ ergibt sich $M \cap N = \{x: (x \text{ ist teilbar durch } 2) \wedge (x \text{ ist teilbar durch } 3)\}$, d. h., $M \cap N$ enthält die durch 2 und durch 3 teilbaren, also die durch 6 teilbaren Zahlen: $M \cap N = \{0; 6; 12; \dots\}$.

Die Vereinigung ist $M \cup N = \{x: (x \text{ ist teilbar durch } 2) \vee (x \text{ ist teilbar durch } 3)\}$, d. h., $M \cup N$ enthält die Zahlen, die durch 2 oder durch 3 (oder durch beide) teilbar sind: $M \cup N = \{0; 2; 3; 4; 6; 8; \dots\}$.

- 1.36 Im Grundbereich $\{1; 2; \dots; 10\}$ sei

$$A = \{x: x < 7\} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Wenn die Aussageform „ $x < 7$ “ negiert wird, ergibt sich „es ist nicht wahr, dass $x < 7$ “, kürzer „ x ist nicht kleiner als 7“ oder „ $x \geq 7$ “, und das Komplement der Menge A ist

$$\bar{A} = \{x: x \geq 7\} = \{7; 8; 9; 10\}.$$



Kontrollfragen

- 1.9 Mithilfe welcher logischer Verknüpfungen werden Durchschnitt und Vereinigung von Mengen definiert?
- 1.10 Es sei A Teilmenge von B . Was folgt daraus für Durchschnitt $A \cap B$, Vereinigung $A \cup B$ und Differenz $A \setminus B$?
- 1.11 Es seien A und B disjunkte Mengen. Was folgt daraus für Durchschnitt $A \cap B$ und die Differenzen $A \setminus B$, $B \setminus A$?
- 1.12 Welche Relation besteht zwischen Durchschnitt und Vereinigung zweier Mengen?

Aufgaben: 1.5 bis 1.10

Sachwortverzeichnis

2π -periodisch 308
2-Punkte-Form der Geradengleichung 277

A

Abbildung 263
abhängige Variable einer Funktion 263
Abklingkonstante 324
Ableitung 370
– der mittelbaren Funktion 382
– der Potenzfunktion 373
– einer konstanten Funktion 375
– eines konstanten Faktors 375
– eines Produktes 380
– eines Quotienten 381
–, geometrische Interpretation 386
–, höhere 385
–, Summe 375
– weiterer Funktionen 383
–, zweite 385
Abschreibung 347
–, geometrisch-degressive 353
–, lineare 347
Abschreibungsbetrag 347
Abschreibungssatz 347
absoluter Betrag 29
Abszisse 266
Achsenabschnitt einer Geraden 275
achsensymmetrische Funktion 294
Addition 40
Addition von Vektoren 564 f.
Additionsregel 448
Additionssystem 25
Additionstheoreme 233
Additionsverfahren 114
Ähnlichkeit 154
Ähnlichkeitssätze 160
algebraische Form komplexer Zahlen 539
algebraische Gleichung 88, 90
algebraische Summe 35
allgemeine Form der quadratischen Funktion 283
allgemeine Form eines linearen Gleichungssystems 113
allgemeines Dreieck 156
Allmenge 16

Alternative 21
Alternativhypothese 509
Alternativtest 509
analytische Darstellung einer Funktion 265
Anfangsbedingung 415
Anfangsglied 342
Anfangswert 324
äquivalente Umformung 89
Äquivalenz 18
Arbeitshypothese 509
Argument einer komplexen Zahl 546
arithmetische Form komplexer Zahlen 539
arithmetisches Mittel 481
Arkusfunktionen 310
Assoziativgesetz 564, 567, 572, 575
Assoziativität 20, 33
Asymptote 304, 362, 392 f.
Aufzinsen 352
Aussage 14
Aussageform 15
–, Erfüllung 15
axialsymmetrisch 300

B

Basis 51, 61
Baumdiagramm 453
bedingte Wahrscheinlichkeit 461
Bedingung, hinreichende 18
notwendige 18
Bernoulli-Experiment 501
Bernoulli-Formel 458
Bernoulli-Kette 501
Betrag, absoluter 29
Betrag einer komplexen Zahl 544, 546
Betrag eines Vektors 561
Bijektivität 270
binärer Logarithmus 64
Binärsystem 26
Binomialkoeffizient 69, 458
Binomialverteilung 501
–, kumulative 505
binomische Formel 36
binomischer Lehrsatz 70
Bogenmaß 103, 216

Bruch, echter 39
 –, unechter 39
 Bruchgleichung 91
 Bruchrechnung 39

C

Cavalierisches Prinzip 195
 Cramersche Regel 126

D

deckungsgleiche Geraden 279
 Definitionsbereich einer Funktion 263
 Definitionsbereich einer Ungleichung 111
 dekadischer Logarithmus 63, 66
 Determinante 126
 –, dreireihige 129
 –, mehrreihige 129
 –, zweireihige 126
 Determinantenverfahren 125
 Dezimalbruch 24
 Dezimalsystem 26
 Differenz 19
 Differenzenquotient 368
 –, Grenzwert 369
 Differenzial 368, 376
 Differenzialquotient 378
 Differenzierbarkeit 372
 Dimension eines Koordinatensystems 560
 direkte Proportionalität 45
 disjunkte Menge 17
 Diskontierung 352
 diskrete Zufallsgröße 515
 Distributivgesetz 567, 572, 575
 Distributivität 20, 33
 Divergenz 107
 Division 40
 Doppelbruch 43
 Drehung 148
 Dreieck, allgemeines 156
 –, Flächeninhalt 246
 –, gleichschenkliges 164
 –, gleichseitiges 165
 –, rechtwinkliges 163
 Dreiecksberechnung 237
 Dreieckstransversale 161
 dreireihige Determinante, Lösung 129
 Durchschnitt 19
 Durchstoßpunkt 587

E

Ebene, Normalenvektor 593
 –, vektorielle Beschreibung 583
 echt gebrochenrationale Funktion 302

echte Teilmenge 17
 echter Bruch 39
 e-Funktion 305
 Einheitsvektor 561, 571
 Einsetzungsverfahren 114
 Element 13
 –, einer Menge 13
 empirische Verteilungsfunktion 477
 Endglied 344
 entgegengesetzte Zahl 29, 33
 ε -Umgebung 355
 Ereignis 442
 Erfüllung der Aussageform 15
 Ergebnis 442
 Ergebnisraum 442
 –, Mächtigkeit 442
 Erwartungswert 498, 502, 516, 518, 521, 525
 Erweitern 40
 Eulersche Formel 549
 Eulersche Gerade 161
 explizite Form einer Funktionsgleichung 268
 Exponent 51
 Exponentialform komplexer Zahlen 549
 Exponentialfunktionen 303
 Exponentialgleichung 100
 Exponentialverteilung 525
 Extrempunkt 389
 Extremwertaufgabe 398

F

Faktorenzerlegung 36
 Fakultät 69
 Fehler 1. Art 509
 –, 2. Art 509
 Festkommadarstellung 30
 Flächenelement 423
 Flächeninhalt 174, 425, 427
 Flächeninhalt eines Dreiecks 246
 freie Variable 86
 Funktion 263, 382
 –, abhängige Variable 263
 –, Ableitung 370
 –, achsensymmetrische 294
 –, allgemeine Form der quadratischen 283
 –, analytische Darstellung 265
 –, äußere 382
 –, Definitionsbereich 263
 –, ganzrationale, n -ten Grades 296
 –, gebrochenrationale 300
 –, gerade 293
 –, grafische Darstellung 265
 –, innere 382
 –, konkave 386
 –, konstante 269

- , konvexe 386
- , lineare 274
- , Lücke 392
- , Maschinenmodell 264
- , mittelbare 320
- , nach oben beschränkte 270
- , nach unten beschränkte 270
- , Nullstelle 270, 277 ff., 286 ff., 290 f., 298, 308 f.
- , Polstelle 300
- , Produktform einer quadratischen 287
- , Prozessmodell 264
- , punktsymmetrische 294
- , quadratische 283
- , Scheitelform einer quadratischen 286
- , stetige 361
- , streng monoton fallende 269
- , streng monoton wachsende 269
- , Stützstellen 298
- , trigonometrische 217
- , Umkehrfunktion einer linearen 277
- , unabhängige Variable 263
- , verkettete 320
- , Wertebereich 263
- Funktionsgleichung 265
- , aufstellen mittels der Ableitungen 400

G

Galton-Brett 503
ganze Zahl 24
ganzrationale Funktionen 296
– n -ten Grades 296
Gauß'sche Zahlenebene 543
Gauß'scher Algorithmus 120
gebrochenrationale Funktion 300
gebundene Variable 86
Gegenereignis 442
Gegenhypothese 509
Gegenvektor 563
Genauwert 351
geometrisches Mittel 483
geordnetes n -Tupel 114
geordnetes Paar 114
geordnetes Quadrupel 114
geordnetes Tripel 114
Gerade 143
–, Achsenabschnitt 275
–, deckungsgleiche 279
–, Lagebeziehung 279, 580
–, Parallelität 279
–, Schnittpunkt 280
–, senkrechter Schnitt zweier 282
–, Steigungsfaktor 275

–, Steigungswinkel 276
–, Vektorgleichung 578
gerade Funktionen 293
gestaffelte Form 120
gleichschenkliges Dreieck 164
gleichseitiges Dreieck 165
Gleichsetzungsverfahren 114
Gleichung 86
–, algebraische 88, 90
–, Bruch- 91
– dritten und höheren Grades 97
–, Exponential- 100
–, goniometrische 100, 102
–, grafische Lösung 105
–, identische 88
–, kubische 97
–, linear abhängige 118
–, logarithmische 100 f.
– n -ten Grades 97
–, quadratische 93
–, transzendente 88, 99 f.
–, Wurzel- 91
Gleichungssystem, lineares 113
Gleitkommadarstellung 30
goniometrische Form komplexer Zahlen 548
goniometrische Gleichung 100, 102
Gradmaß 215
grafische Darstellung einer Funktion 265
grafische Lösung 105
Grenze, obere 49
–, untere 49
Grenzkurve 302, 304
Grenzwert 360, 368 f.
– einer Folge 355
– einer Funktion 358
–, linksseitiger 359
–, rechtsseitiger 359
–, uneigentlicher 356
Grundbereich 15
Grundintegrale 414
Grundkonstruktion 151
Grundziffer 25

H

Häufigkeit, relative 465
Häufigkeitspolygon 479
Hauptwert 351, 553
Hauptwerte der Arkussinusfunktion 311
Hexadezimalsystem 26
Histogramm 479
Hochpunkt 389
Höhensatz 164
Horner'sches Rechenschema 98
Hyperbel 300

I

Idempotenz 21
 identische Gleichungen 88
 Identität 88
 imaginäre Achse 543
 imaginäre Zahl 537
 imaginäre Zahleneinheit 536
 Imaginärteil 539
 Implikation 18
 implizite Form einer Funktionsgleichung 268
 indirekte Proportionalität 46
 Injektivität 270
 Inklusion 16
 inneres Produkt 571
 Integral 412
 – als Grenzwert 421
 –, bestimmtes 415, 418, 422
 –, partikuläres 416
 –, unbestimmtes 413
 Integralfunktion 413
 Integralrechnung, Grundaufgabe 412
 Integrand 413
 Integration 412
 – durch Substitution 430
 –, Flächenberechnung 416
 –, numerische 435
 Integrationsgrenzen 418
 Integrationsintervall 420
 Integrationskonstante 413
 Integrationsvariable 413
 Intervall 28
 irrationale Zahl 25
 Iteration 105

K

Kardinalzahl 23
 kartesische Koordinaten 546
 kartesisches Koordinatensystem 265, 559
 Kathetensatz 163
 Kegel 190
 Kegelstumpf 191
 Kennziffer 66
 Keplersche Fassregel 436
 Kettenregel 382
 Klasse 476
 Kombination 451, 457
 – mit Wiederholung 457
 – ohne Wiederholung 457
 Kombinatorik 451
 Kommutativgesetz 567
 Kommutativität 20, 33
 Komplement einer Menge 21

komplexe Zahl 539
 –, algebraische Form 539
 –, Argument einer 546
 –, arithmetische Form 539
 –, Betrag einer 544, 546
 –, Exponentialform 549
 –, goniometrische Form 548
 –, konjugiert 539
 –, Norm einer 541
 trigonometrische Form 548
 –, vektorielle Darstellung 543
 Kongruenz 149
 Kongruenzsätze 158
 konjugiert komplexe Zahl 539
 Konjunktion 21
 konstante Funktion 269
 Konvergenz 107
 Konvertieren 27
 Konvertierung 26
 Koordinaten eins Punktes 560
 Koordinatenform des Skalarprodukts 572
 koordinatenfreie Form des Skalarprodukts 573
 Koordinatensystem, Dimension 560
 –, kartesisches 559
 Koordinatenursprung 266, 560
 Korrelation 488
 Korrelationskoeffizient 489
 Kosinus 217
 Kosinusfunktion 308
 –, Maximum und Minimum 309
 Kosinussatz 242
 Kotangens 217
 Kreis 170
 Kreisdiagramm 266
 Kreuzprodukt 575
 kubische Gleichung 97
 Kugel 195
 kumulative Binomialverteilung 505
 Kurvendiskussion 391
 –, Asymptoten 393
 –, Definitionsbereich 392
 –, Extrempunkte und Art der Extremwerte 393
 –, Nullstellen 392
 –, Schnittpunkt mit der y -Achse 392
 –, Skizze der Funktion 393
 –, Symmetrie 392
 –, Unstetigkeitsstellen 392
 –, Verhalten im Unendlichen 393
 –, Wendepunkte 393
 –, Wertebereich 393
 Kürzen 40

L

Lagebeziehung zwischen Ebenen 589
– zwischen einer Ebene und einer Geraden 587
– zwischen Geraden 279, 580
Laplace-Experiment 446
leere Menge 14
linear abhängige Gleichung 118
lineare Funktion 274
lineares Gleichungssystem 113
–, allgemeine Form 113
Linearfaktoren 298
Logarithmensystem 63
logarithmische Gleichung 100 f.
Logarithmus 51, 61
–, Basis 61
–, binärer 64
–, dekadischer 63, 66
–, natürlicher 63
–, Numerus 61
Logarithmusfunktionen 306
Lösung der Aussageform 15
Lücke 392

M

Mächtigkeit des Ergebnisraumes 442
Mantisse 66
Maschinenmodell von Funktionen 264
Maximum 388
–, absolutes 389
–, relatives 388
Median 482
mehrrheilige Determinante 129
mehrstufiger Zufallsversuch 452
Menge 13
–, Differenz 19
–, disjunkte 17
–, Durchschnitt 19
–, Komplement 21
–, leere 14
–, Vereinigung 19
Mengenoperation 19
Merkmal, qualitatives 474
–, quantitatives 474
Minimum 388
–, absolutes 389
–, relatives 388
Mittel, arithmetisches 481
–, geometrisches 483
mittelbare Funktion 320
Mittelwert 480
mittlere Proportionale 44
Modalwert 483
Monotonie von Funktionen 269

Monotoniebogen 386
Multiplikation 40
Multiplikation eines Vektors 567
Multiplikationsregel 449
Multiplikationssatz 462

N

nach oben beschränkte Funktion 270
nach unten beschränkte Funktion 270
Näherungsverfahren 104
natürliche Zahl 23
natürlicher Logarithmus 63
Nebenbedingungen 398
Nebenwinkel 146
 n -Eck 168
Negation 22
Nenner, Rationalmachen 58
Neugrad 216
Norm einer komplexen Zahl 541
Normaleneinheitsvektor 595
Normalenform der Ebenengleichung 593
Normalenvektor einer Ebene 593
Normalform der Geradengleichung 275
Normalform einer quadratischen Funktion 283
Normalparabel 285
Normalverteilung 518
–, standardisierte 521
Normzahlen 351
Nullfolge 356
Nullhypothese 509
Nullpunkt 266
Nullstelle 392
– einer Funktion 270, 277 ff., 286 ff., 290 f., 298, 308 f.
– einer Parabel 287
Nullvektor 563
Numerus 51, 61

O

obere Grenze 49
obere Schranke 270
Obermenge 17
Obersumme 422
Ordinalzahl 23
Ordinate 266
Orientierung eines Vektors 560
Orthogonalitätsbedingung 573
Ortsvektor eines Punktes 561

P

Paar, geordnetes 114

Parabel 283
 – n -ter Ordnung 293
 –, Nullstelle 287
 Parallelität zweier Geraden 279
 Parameter 117
 Partialdivision 38
 Pascalsches Dreieck 68
 π -periodisch 309
 periodische Funktionen 307
 Permutation 451, 456
 – mit Wiederholung 456
 – ohne Wiederholung 456
 Pfadregel 454
 Pivotelement 121
 Planimetrie 143
 Poisson-Verteilung 515
 Polarkoordinaten 228, 546
 Polstelle einer Funktion 300
 Polynom 89
 Polynomfunktion n -ten Grades 296
 Positionssystem 26
 Potenzfunktionen 293
 Potenzgesetz 51
 primäre Verteilungstafel 476, 481
 Prinzip der Mengenbildung 16
 Prisma 183
 Prismatoid 188
 Probe 90
 Produktform einer quadratischen Funktion 287
 Produktgleichung 44
 Produktregel 380, 454
 Promille 47
 Proportion 44
 Proportionalität, direkte 45
 –, indirekte 46
 Prozentrechnung 47
 Prozessmodell von Funktionen 264
 Punkt 143
 punktsymmetrische Funktion 294
 Pyramide 185
 Pyramidenstumpf 189

Q

Quader 181
 Quadranten 266
 Quadrantenrelationen 225
 quadratische Ergänzung 289
 quadratische Funktionen 283
 quadratische Gleichung 93
 Quadrupel, geordnetes 114
 qualitatives Merkmal 474
 quantitatives Merkmal 474
 Quotientenregel 381

R

Radikand 51, 54
 rationale Zahl 24
 Rationalmachen des Nenners 58
 Rauminhalt von Rotationskörpern 432
 Realteil 539
 Rechenoperation 32
 – dritter Stufe 51
 – erster Stufe 32
 – zweiter Stufe 32
 Rechenschema von Horner 98
 Rechteckkoordinaten 546
 Rechte-Hand-Regel 560
 rechtwinkliges Dreieck 163
 rechtwinkliges Koordinatensystem 265
 reelle Achse 543
 reelle Zahl 23, 25
 Regel zum Konvertieren 27
 Regel von Sarrus 130
 Regressionsgerade 491
 Regressionskoeffizient 491
 regula falsi 108
 Reihe 344
 Relation 263
 relative Häufigkeit 465
 Repräsentant eines Vektors 563
 reziproke Zahl 33
 Richtung eines Vektors 560
 Richtungssinn 560
 Richtungsvektor 578
 Runden von Zahlen 31

S

Satz des Pythagoras 164
 Satz von Bayes 464
 Säulendiagramm 266
 Scheitelform einer quadratischen Funktion 286
 Scheitelwinkel 146
 Schnittpunkt zweier Geraden 280
 Schreibweise von Zahlen 30
 Sekantenverfahren 108
 sekundäre Verteilungstafel 476, 481
 senkrechter Schnitt zweier Geraden 282
 signifikante Ziffer 30
 Signifikanztest 511
 Signum 29
 Simpsonsche Regel 437
 Simulation 465
 Sinus 216
 Sinusfunktion 308
 –, Maximum und Minimum 308
 Sinussatz 239
 Skalar 561

Skalarprodukt 571
–, Koordinatenform 572
–, koordinatenfreie Form 573
Spannvektoren 584
Spannweite 475
Spatprodukt 576
Spiegelachse 272
Spiegelung 148
Sprungstelle 361
Stammfunktion 413
Standardabweichung 485, 498, 502
standardisierte Normalverteilung 521
Steigungsdreieck 276
Steigungsfaktor einer Geraden 275
Steigungswinkel einer Geraden 276
Stereometrie 180
Stichprobe 475
Strahl 144
Strecke 144
Streckung, zentrische 154
streng monoton fallende Funktion 269
streng monoton wachsende Funktion 269
Streuung 484, 498, 516, 518, 525
Streuungsmaß 480
Stufenpunkt 390
Stufensprung 351
Stufenwinkel 146
Stützstellen einer Funktion 298
Stützvektor 578
Stützwerte einer Funktion 298
Substitutionsregel 430
Subtraktion von Vektoren 564 ff.
Summationsgrenze 49
Summationsindex 49
Summe, algebraische 35
Summenregel 454
Summenzeichen 49
Surjektivität 270
Symmetrie 150

T

Tangens 217
Tangensfunktion 309
Teilmenge 16
–, echte 17
Term 35
Terrassenpunkt 390
Tiefpunkt 389
totale Wahrscheinlichkeit 462
transzendente Gleichung 88, 99 f.
Trend 492
trigonometrische Form komplexer Zahlen 548
trigonometrische Funktion 217, 307

trigonometrischer Pythagoras 231
Tripel, geordnetes 114
Tupel, n -, geordnetes 114

U

Umkehrfunktion 272
– einer linearen Funktion 277
unabhängige Variable einer Funktion 263
unecht gebrochenrationale Funktion 302
unechter Bruch 39
Unendlichkeitsstelle 392
ungerade Funktionen 293
Ungleichung 110
–, Definitionsbereich 111
Unstetigkeit, hebbare 362
Unstetigkeitsstelle 392
untere Grenze 49
untere Schranke 270
Untermenge 17
Untersumme 422
Urliste 475
Urnenmodell 453
Ursprungsgerade 275

V

Variable 15, 86
–, freie 86
–, gebundene 86
Varianz 498, 502
Variation 451, 457
– mit Wiederholung 457
– ohne Wiederholung 457
Variationskoeffizient 485
Vektor 560
–, Addition 564 f.
–, Betrag 561
–, Multiplikation 567
–, Orientierung 560
–, Repräsentant 563
–, Richtung 560
–, Subtraktion 564 ff.
–, Vielfaches 567
–, Winkel 569
Vektoraddition 545
Vektorgleichung einer Geraden 578
vektorielle Beschreibung von Ebenen 583
vektorielle Darstellung komplexer Zahlen 543
Vektorparallelogramm 564
Vektorprodukt 575
Vereinigung 19
verkettete Funktion 320
Verschiebung 148
Versor 549

Verteilungsfunktion 495, 525
 –, empirische 477
 Verteilungstafel 475
 –, primäre 476, 481
 –, sekundäre 476, 481
 Vielfaches eines Vektors 567
 Viereck 166
 Vierfeldertafel 460
 Vorzeichenregel 34

W

Wachstumskonstante 324
 Wachstumstempo 350
 Wahrheitswert 14
 Wahrscheinlichkeit, bedingte 461
 –, totale 462
 Wahrscheinlichkeitsdichte 499, 518, 525
 Wahrscheinlichkeitsverteilung 495
 Wechselwinkel 146
 Wendepunkt 390
 Wertebereich einer Funktion W 263
 Wertetabelle 265
 Winkel 144
 Winkel zwischen Vektoren 569
 Wurzel 54
 Wurzelexponent 51, 54
 Wurfelfunktionen 295
 Wurzelgleichung 91
 Wurzelsatz von Vieta 96

Z

Zahl, entgegengesetzte 29, 33
 –, ganze 24
 –, irrationale 25
 –, natürliche 23
 –, rationale 24
 –, reelle 23, 25
 –, reziproke 33

–, Runden 31
 –, Schreibweise 30
 Zahlenfolge 341
 –, alternierende 343
 –, arithmetische 344
 –, divergente 356
 –, endliche 342 f.
 –, fallende 343, 348
 –, geometrische 348
 –, Glied einer 342
 –, grafische Darstellung 342
 –, Grenzwert einer 355
 –, konstante 343
 –, konvergente 356
 –, rekursive Darstellung 343 f., 348
 –, streng monoton fallend 343 f., 348
 –, streng monoton wachsend 343 f., 348
 –, tabellarische Darstellung 342
 –, unabhängige Darstellung 342, 344, 348
 –, unendliche 342 f.
 –, wachsende 343
 –, Wortdarstellung 342
 Zahlensystem 25
 zentralsymmetrisch 300
 zentrische Streckung 154
 Zielfunktion 398
 Ziffer 25
 –, signifikante 30
 Zinseszinsrechnung 351
 Zinsrechnung 47
 Zufallsexperiment 442
 Zufallsgröße 494, 502
 –, diskrete 515
 Zufallsversuch 442, 452
 zweireihige Determinante 126
 Zweiwertigkeit 14
 zyklometrische Funktionen 310
 Zylinder 190